MATEMATICAS CCSS (MASII)

2º Bachillerato

EJERCICIOS DE MATRICES

SELECTIVIDAD Y PAU

2000-2019

Departamento de Matemáticas

Ies Dionisio Aguado

1. (3 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Compruébese que B es la inversa de A.

   (b) Calcúlese la matriz $(A - 2I)^2$.

   (c) Calcúlese la matriz X tal que $AX = B$. (Modelo 2001 - Opción A)

2. (3 puntos) Sean las matrices$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   (a) Determínese si A y B son inversibles y, en su caso, cacúlese la matriz inversa.

   (b) Resuélvase la ecuación matricial $XA - B = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

   (c) Calcúlese A^{86}(Septiembre 2001 - Opción A)

3. (3 puntos) Dadas las matrices

   $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (a) Calcular las matrices$M = AB$ y $N = BA$.

   (b) Calcular P^{-1} , siendo$P = (N - I)$, donde I representa la matriz identidad.

   (c) Resolver el sistema $PX = C$. (Junio 2002 - Opción A)

4. (3 puntos) Encontrar todas las matrices X tales que $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$(Septiembre 2002 - Opción A)

5. (3 puntos) Calcular los valores de a para los cuales la inversa de la matriz $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ coincide con su transpuesta. (Septiembre 2003 - Opción A)

6. (3 puntos) Hallar todas las matrices $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$; a, b, c $\in$ R que satisfacen la ecuación matricial $X^2 = 2X$ (Junio 2004 - Opción B)

7. (3 puntos) Se dice que una matriz cuadrada es ortogonal si $AA^T = I$

   (a) Estudiar si la matriz A es ortogonal $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Siendo A la matriz del apartado anterior, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Nota: La notación A^T significa matriz traspuesta de A. (Modelo 2005 - Opción A)

8. (3 puntos) Encontrar todas las matrices X cuadradas 2×2 que satisfacen la igualdad $XA = AX$ en cada uno de los casos siguientes:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ (Junio 2006 - Opción B)

9. (3 puntos) Dadas las matrices

   A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (a) Hallar los valores de n para los que la matriz A tiene inversa.

   (b) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$ para $n = 3$ (Modelo 2008 - Opción A)

10. (3 puntos) Se considera la matriz dependiente del parámetro real k:

    A=$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$

    (a) Determínese los valores de k para los cuales A tiene inversa.

    (b) Para k = 2, calcúlese (si existe) A^{-1} .

    (c) Para k = 1, calcúlese $(A-2A^T)^2$. Nota: La notificación A^Trepresenta a la matriz transpuesta de A. (Modelo 2009 - Opción A)

11. (3 puntos) Se consideran las matrices

    A=$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

    (a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.

    (b) Para a = 2, calcúlese la matriz inversaA^{-1} .

    (c) Para a = 2, calcúlese, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$. (Modelo 2011 - Opción B)

12. (3 puntos). Se consideran las matrices:

A$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}; I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Calcúlense a, b para que se verifique la igualdad $AB = BA$.

   (b) Calcúlense c, d para que se verifique la igualdad $A^2 + cA + dI = O$.

13. (3 puntos). Se consideran las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

   (a) Calcúlese $A^{-1}A^T$.- Nota.- La notación A^T representa a la matriz transpuesta de A.

   (b) Resuélvase la ecuación matricial: $\frac{1}{4}A^2 - AX = B$. (Septiembre 2011 (Reserva)- Opción B)

14. (3 puntos) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

   (a) Calcúlense los valores de a para los cuales no existe la matriz inversaA^{-1} .

   (b) Para a = 2, calcúlese la matriz$B = (A^{-1}A^T)^2$.

   (c) Para a = 2, calcúlese la matriz Xque satisface la ecuación matricial: $AX - A^2 = A^T$ Nota.-A^T representa a la matriz traspuesta de A. (Modelo 2012 - Opción B)

15. (3 puntos) Dadas las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

   (a) Para k = 4, calcúlese el determinante de la matriz $3A^2$.

   (b) Para k = 2, calcúlese (si existe) la matriz inversa A^{-1} .

   (c) Discútase la existencia de solución del sistema lineal $AX = B$ según los diferentes valores del parámetro k. (Junio 2012(coincidente) - Opción A)

16. (2 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

   (a) Obténgase A^{2007} .

   (b) Hállese la matriz B tal que $AB = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ (Modelo 2013 - Opción B)

17. (2 puntos) Dada la matriz$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Calcúlese A^{-1}

   (b) Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (Junio 2013 - Opción A)

18. (2 puntos) Encuéntrese la matriz X que verifica
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$
(Junio 2013 (coincidente) - Opción B)

19. (2 puntos) Se consideran las matrices
$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} yB = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

   (a)) Calcúlese la matriz inversa de A

   (b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B - I$; donde I es la matriz identidad. (Septiembre 2013 - Opción A)

20. (2 puntos) Se considera la matriz$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$

   (a) Calcúlese A^2 , A^3 , A^{20} .

   (b) Hállese la matriz B tal que $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (Septiembre 2013 (coincidente)- Opción B)

21. (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$A; $B = \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

   (a) Hállense los valores de a y b para los que se cumple A + B + AB = C.

   (b) Para el caso en el que a = 1 y b = 2, determínese la matriz X que verifica BX − A = I; donde I es la matriz identidad. (Modelo 2014 - Opción A)

22. (2 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Calcúlese $(A^t B)^{-1}$, donde A^t denota a la traspuesta de la matriz A.

(b) Resuélvase la ecuación matricial $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (Junio 2014 - Opción A

23. (2 puntos) Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

 (a) Calcúlese A^{-1} .
 (b) Determínese la matriz X tal que $AX = A^{-1}$ (Junio 2014 (coincidente)- Opción A)

24. (2 puntos) Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

 (a) Calcúlese $(A \cdot A^T)^{200}$. Calcúlese $(A \cdot A^T - 3I)^{-1}$. Nota: A T denota a la traspuesta de la matriz A. I es la matriz identidad de orden 3. (Septiembre 2014 - Opción B) $\surd$

25. (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

 (a) Calcúlese B^{31}.
 (b) Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot B$. (Septiembre 2014 (coincidente)Opción A)

26. (2 puntos) Se considera A $= A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

 (a) CalcúleseA^{-1} .
 (b) Calcúlese $A^{T \cdot} A$. # Nota: A T denota la traspuesta de la matriz A. (Modelo 2015 - Opción A)

27. (2 puntos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

 (a) Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k.
 (b) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para k = 3. (Junio 2015 - Opción B)

28. (2 puntos) Se consideran las matrices dependientes del parámetro real a

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determínense los valores de a para los que la matriz A · B admite inversa.

(b) Para a = 0, resuélvase la ecuación matricial$(AB)X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(Junio 2015 (coincidente)- Opción B)

29. (2 puntos) Se consideran las matrices

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Calcúlese A^{15} e indíquese si la matriz A tiene inversa.

(c) Calcúlese el determinante de la matriz $(B \cdot A^t \cdot B^{-1} - 2 \cdot Id)^3$. Nota: A^t denota la matriz traspuesta de A. Id es la matriz identidad de orden 2. (Septiembre 2015 - Opción A)

30. (2 puntos) Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

(a) Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

(b) Determínese la matriz X tal que $B \cdot A \cdot X = C$. (Septiembre 2015 (coincidente)- Opción A)

31. (2 puntos) Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$

(a) Determínese para qué valores de a ∈ R es invertible A.

(b) Resuélvase para a = 0 el sistema

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Modelo 2016 - Opción A)

32. (2 puntos) Determínese la matriz X que verifica

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X$(Modelo 2016 - Opción A)

33. Problema (2 puntos) Considérense las matrices

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}$.

(b) Calcúlese la matriz M = A · B. ¿Existe M^{-1}? Nota: C^T denota la matriz traspuesta de la matriz C. (Junio 2016 - Opción A)

34. (2 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$;$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ siendo a un número real.

   (a) Determínese a para que la matriz A admita inversa.

   (b) Para a = 1, determínese la matriz X que verifica A · X + A = Id. (Junio 2016 - Opción B (Coincidentes))

35. (2 puntos) Se considera la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

   (a) Estudíese para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.

   (b) Determínese, para k = 1, la matriz X tal que$XA = Id$. Nota: Id denota la matriz identidad de tamaño 3 × 3. (Septiembre 2016 - Opción A)

36. (2 puntos) Considérense las matrices

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene matriz inversa.

   (b) Determínese para k = 0 la matriz X que verifica la ecuación A·X = B.

   (c) Calcúlese la matriz M = A · B. ¿Existe M^{-1} ? (Junio 2017 - Opción A)

37. (2 puntos) Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Calcúlese la matriz $D = A^T \cdot B$. ¿Existe la matriz $F = A \cdot B$?

   (b) Calcúlese la matriz $M = B^{-1}$. Nota: A^T denota la matriz traspuesta de la matriz A. (Junio 2017 (coincidente) - Opción A)

38. (2 puntos) Considérense las matrices$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Determínese la matriz C

   (b)) Calcúlese la matriz X que verifica X · A + 3B = C (Septiembre 2017 - Opción B)

39. (2 puntos) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1+a \\ a & a & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

    (a) Estúdiese para qué valores del parámetro real a la matriz A tiene inversa.

    (b) Determínese, para a = 1, la matriz X tal que A · X = Id, siendo Id la matriz identidad de tamaño 3 × 3. (Septiembre 2017 (coincidente) - Opción A)

40. (2 puntos) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$

    (a) Determínese para qué valores de a para los que la matriz A es invertible.

    (b) Para a = 1, despéjese y determínese la matriz X de la ecuación matricial A · X = A + 2Id, donde Id representa la matriz identidad de orden 3. (Modelo 2018 - Opción A)

41. (2 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

    (a) Compruébese que B es la matriz inversa de A.

    (b) Calculése la matriz X tal que A · X = B. (Junio 2018 - Opción A)

42. (2 puntos) Se consideran las matrices$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$A donde m es un parámetro real.

    (a) Determínense los valores de m para los que la matriz A es invertible.

    (b) Para m = 0 considérese la ecuación matricial A · X = B. Exprésese X en función de A y B y calcúlese X. (Junio 2018 (coincidente) - Opción A)

43. (2 puntos) Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

    (a) Calcúlese la matriz $[(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t]^{11}$.

    (b) Determínense el número de filas y columnas de la matriz X que verifica que $X \cdot A^t = B^t$. Justifíquese si A^t es una matriz invertible y calcúlese la matriz X. Nota:M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M . (Julio 2018 (extraordinari- Opción A)

44. (2 puntos) Se consideran lan matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{donde m es un parámetro real.}$$

(a) Determínese para qué valores de m para los que la matriz A es invertible.

(b) Considérese la ecuación matricial A · X = A · B + B. Para m = 5 , exprésese X en función de A y B y calcúlese la matriz X. (Modelo 2019 - Opción A)

45. (2 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$sea nulo.

(b) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas. (Junio 2019 - Opción A)

46. (2 puntos) Considérense las matrices A, B y C siguientes,$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

,$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ donde a, b, c ∈ R.

(a) Determínense los valores de a, b y c para que se verifique $C \cdot A = B \cdot C$ y |C| = 2 Nota: |C| es el determinante de la matriz C.

(b) Calcúlese, para los valores$a = b = c = 1$,
$C^{-1} \cdot B \cdot C$ y B^{100} . (Junio 2019 (coincidente)- Opción B)