IES Dionisio Aguado.Dep Matemáticas

NÚMEROS COMPLEJOS

hoja de problemas (Matemáticas I)

1. Escribe en forma polar el resultado del cociente: $\frac{i^5-i^{-8}}{i\sqrt{2}}$

2. La suma de las partes reales de dos complejos conjugados es 6 y el módulo de uno de ellos es 5. Calcula ambos números.

3. La suma de dos números complejos es $3+i$ y la parte real de uno de ellos es 2. Determina dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro.

4. Calcula m y n para que se cumpla la igualdad: $\frac{4m-2i}{3+\ni} = 6-2i$.

5. Calcula las partes reales e imaginarias de:

   a) $\frac{3-2i}{2+i}$
   b) $\frac{1}{(1-i)^5}$
   c) $\frac{4+i}{1-3i}$
   d) $\frac{1+3i}{2+i}$
   e) $\frac{3-2i}{2-3i}$
   f) $\frac{5-5i}{3+4i}$
   g) $\frac{1}{2+i\sqrt{3}} - \frac{2}{1+i\sqrt{3}} + \frac{5/2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$
   h) $(1-i)(1+i)i$
   i) $(5-i)(1+5i)$
   j) $(1-i)(2+3i)(3+i)(2-2i)$
   k) $(1+i)^4$
   l) $(2+5i)^3$
   m) $(3-2i)^3$
   n) i^{3459}
   ñ) $\frac{(1-i)^5}{(1+i)^5}$
   o) $\frac{1}{(1-i)^6}$
   p) $\frac{(1+i)(1-i)^4}{(1+2i)^3}$
   q) $\frac{6i(2-i)(1-2i)^2}{3+i}$

6. Sean z y w dos números complejos cualesquiera. Comprueba la igualdad $\bar{z}\cdot\bar{w} = \bar{z}\,\bar{\cdot}\,\bar{w}$.

7. Dados los números complejos $z_1 = 5_{\pi/4}$ $z_2 = 2_{15^o}$ y $z_3 = 4i$, calcula

   a) $z_3 \cdot z_2$
   b) $\frac{z_1}{(z_2)^2}$
   c) $\frac{z_1 \cdot z_2^3}{z_3}$
   d) $z_1 \cdot z_2$
   e) $\frac{(z_1)^3}{z_2 \cdot (z_3)^2}$
   f) $z_3 \frac{z_1}{z_2}$

8. Sea $z = \frac{3-\mathsf{ki}}{1-i}$. Calcula el valor de k para que $\mathsf{arg}(z) = \frac{p}{4}$

9. Sea $z = 3_{30^o}(3 - \mathrm{ki})$. Calcula el valor de k para que z sea un número imaginario puro.

10. Sea $z = \frac{k+i}{2+i}$. Calcula el valor de k para que $|z| = \sqrt{2}$.

11. Sea $z = \frac{k+i}{2+i}$. Calcula el valor de k para que $z = 2-i$.

12. Sea $z = (3-6i)(4-\mathsf{ki})$. Calcula el valor de k para que z sea un número imaginario puro.

13. Sea $z = (3-6i)(4-\mathsf{ki})$. Calcula el valor de k para que z sea un número real.

14. Escribe una ecuación de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es $z = 2 - 3i$.

15. Escribe una ecuación de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es $z = 3 - i$.

16. Utilizando la Fórmula de Moivre halla las expresiones de sen 3α y cos 3α en función de sen α y cos α.

17. Recurriendo a la fórmula de Moivre, expresa sen 5α y cos 5α en función de sen α y cos α.

18. ¿Es posible dividir un segmento de longitud 10 en dos cuyas longitudes tengan su producto igual a 40?

19. Sea $z = \sqrt{3} - i$. Calcular:

    a) $\bar{z}$ *b*) $\frac{1}{z}$ *c*) z^4 *d*) $\sqrt[4]{z}$

20. Contesta verdadero o falso:

    a) Si se multiplican dos números complejos que no son reales, no se obtiene nunca un número real.
    b) El cuadrado del conjugado de z es igual al conjugado del cuadrado de z.
    c) Si dos números complejos tienen las mismas raíces cúbicas, entonces dichos números son iguales.
    d) Un número complejo imaginario puro no tiene ninguna de sus raíces cúbicas imaginaria pura.

    Justifica las respuestas.

21. Representa gráficamente las soluciones de las ecuaciones:

    a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ *b*) $x^2 + 16 = 0$

22. Las raíces de una ecuación de segundo grado son $x_1 = 3+4i$ y $x_2 = 3-4i$. Halla la ecuación.

23. Halla los módulos y los argumentos principales de los números complejos:

    a) $4–3i$ *b*) $5+12i$ *c*) $–3+3i$ *d*) $-2 - 4i$

24. Expresa en forma trigonométrica los complejos:

    a) $-3 + 3\sqrt{3}i$ *b*) $1 - i$ *c*) $6 - 5i$ *d*) $–9–8i$

25. Expresa en forma binómica los siguientes complejos:

a) 7_{120} *b*) $2_{\pi/6}$ *c*) $3_{3\pi/4}$ *d*) 5_{135}

26. Determina las formas polar y trigonométrica de los números:

a) $-2\sqrt{3}-2i$ *b*) $3-3\sqrt{3}i$ *c*) $-4+4i$ *d*) $7+7i$

27. Escribe en forma binómica y en forma de par el cociente de los números 6_{120} y $3_{\pi/3}$

28. Si $z=3+3i$, halla el número complejo que tiene igual módulo que z y cuyo argumento es:

a) $\arg(z)+\pi$ *b*) $\arg(z)+\frac{\pi}{4}$ *c*) $3\arg(z)$

29. Hallar los números complejos tales que $\bar{z}=z^{-1}$.

30. Dados $z_1=1+3i$ y $z_2=2-i$, hallar un número complejo w tal que:

a) $|w|=|z_1|+|z_2|$ *b*) $\arg(w)=\frac{\arg(z_1)+\arg(z_2)}{2}$

Representa $z_1, z_2 y w$.

31. Halla el módulo, el argumento y después la forma binómica de cada uno de los siguientes números complejos:

a) $3_{45}\cdot 2_{15}$
b) $1_{33}\cdot 2_{16}\cdot 3_{41}$
c) $5_{23}\cdot 3_{97}$
d) $9_{37}:3_{97}$
e) $2_{106}:1_{61}$
f) $6_{-21}:2_{24}$
g) $(2_{25})^3\cdot 3_{15}$
h) $(2_{51})^4:(4_{72})^2$
i) $(1_{45})^{18}:(2_{90})^3$
j) $\left(\sqrt{2}-i\right)^6$
k) $(3-3i)^8$
l) $(-2+2i)^{10}$

32. Calcula el resultado de las siguientes operaciones, y escríbelos en todas las formas que conoces:

a) $\frac{(1+i)(1-i)^5}{2-2\sqrt{3}i}$ *b*) $\frac{2}{1-\sqrt{3}i}$ $+$ $\frac{2}{1+\sqrt{3}i}+\frac{2}{1+i}$

33. Escribe en todas las formas que conoces las soluciones de la ecuaciones:

a) $x^2+ix+2=0$
b) $x^3+2ix^2+2x=0$
c) $x^2+2=0$
d) $x^3+3x=0$
e) $x^2+x+1=0$
f) $x^2-4x+13=0$
g) $x^2+2x+5=0$
h) $x^2-2x+2=0$
i) $z^2-z+1=0$
j) $\frac{z-3}{2z-i}=1-i$
k) $\frac{z}{2i}+\frac{z+1}{4-2i}=3$
l) $\frac{z}{3+2i}+\frac{z}{4-2i}=3+i$
m) $z^2+3z+7=0$
n) $\frac{z}{1+i}+\frac{z}{i}=2i$
ñ) $\frac{1}{z}+\frac{2}{1+i}=2+3i$
o) $\frac{1+i}{z}-i=(3+2i)^3$

34. Un cuadrado tiene sus vértices por encima del eje real. Si dos vértices consecutivos del cuadrado son $z_1=2+i$ y $z_2=5+3i$, halla los otros dos vértices.

35. Un triángulo equilátero tiene dos de sus vértices en (0,0) y (4,1). Halla las coordenadas del tercer vértice sabiendo que está en el primer cuadrante.

36. Halla las siguientes raíces:

$a)$ $\sqrt[3]{1+i}$ $b)$ $\sqrt[3]{-i}$ $c)$ $\sqrt[6]{-64}$ d) $\sqrt[3]{-27}$

37. Calcula las raíces cuartas de -1 y de i.

38. Calcula y representa: $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$

39. Una raíz cuarta de un número complejo es $-1+i$. Calcula dicho número y sus restantes raíces cuartas.

40. Calcula las raíces cúbicas de:

$a)$ $\frac{(1+i)\cdot(1-i)^4}{(1+2i)^3}$ $c)$ $\frac{i^{-3}-i^4}{\sqrt{2}i}$ $e)$ $\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

$b)$ $\frac{i^5-i^{-8}}{\sqrt{2}i}$ c) $\frac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}$ $d)$ $\frac{\sqrt{3}+i}{-1+i}$ $f)$ $\frac{1+i}{2-i}$

41. Calcula las raíces cuartas de $2-i$ y represéntalas gráficamente.

42. Calcula las raíces quintas de $\frac{1+2i}{2-i}$.

43. Halla todos los números complejos de módulo unidad tales que sus raíces cuartas están situadas en las bisectrices de los ejes real e imaginario.

44. Una raíz cúbica de un número complejo es $1+i$. Halla dicho número complejo y sus otras dos raíces cúbicas.

45. Halla el número complejo cuyas raíces cúbicas tienen módulo 1 y están situadas en los vértices de un triángulo:

46. a) que tiene un vértice sobre la parte positiva del eje real.

47. b) que tiene un vértice sobre la parte negativa del eje imaginario.

48. c) que no tiene ningún vértice sobre los ejes.

49. De un pentágono regular centrado en el origen conocemos un vértice que es el punto $(1, -\sqrt{3})$. Calcula los restantes vértices.

50. Calcula:

$a)$ a) $\sqrt[5]{\frac{32}{-i}}$ $d)$ $\sqrt[3]{2-2i}$ $g)$ $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{-1+i}\right)^4$

$b)$ $\left(\frac{i^5-i^{-8}}{\sqrt{2}i}\right)^5$ $e)$ $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ $h)$ $\sqrt[3]{(1-\sqrt{3}i)\cdot(-\sqrt{3}-i)}$

$c)$ $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^5$ $f)$ $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4$

51. Probar que la suma de los ángulos de un triángulo es π.

52. Probar que los lados y los ángulos opuestos de un paralelogramo son respectivamente iguales y que las diagonales se bisecan entre sí.

53. Demostrar que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.

54. Probar que la simetría $z \to \bar{z}$ no es una transformación lineal.

55. Si $T_1 z = \frac{z+2}{x+3}$ $T_2 z = \frac{z}{x+1}$; hallar $T_1 T_2 z$; $T_2 T_1 z$; $T_1^{-1}\, Tz$.

56. Probar que la transformación más general que deja el origen fijo y conserva todas las distancias es una rotación o una rotación seguida de una simetría respecto al eje real.

57. Probar que cualquier transformación lineal que transforma el eje real en sí mismo puede escribirse con coeficientes reales.

58. Hallar la transformación lineal que transforma 0, i, -1 en 1, -1, 0.

59. Sean z_1, z_2, z_3, z_4, los vértices consecutivos de un cuadrilátero, que están situados sobre una circunferencia. Probar que:

60. $|\, z_1 - z_3| \cdot |\, z_2 - z_4| = |\, z_1 - z_2| \cdot |\, z_3 - z_4| + |\, z_2 - z_3| \cdot |\, z_1 - z_4|$