Álgebra

Ecuaciones e Inecuaciones Polinómicas y algebraicas

Bach MAT I

2023

BY S3R4

MATEMATICAS (MAT I)

1º Bachillerato

ECUACIONES E INECUACIONES

POLINÓMICAS y ALGEBRAICAS

S3r4

1 Ecuaciones primer grado

1.1 Resolución de ecuaciones de primer grado

En la resolución de una ecuación de 1er grado conviene seguir los siguientes pasos:

1. Quitar denominadores.
2. Quitar paréntesis.
3. Trasponer incógnitas a un miembro y los números al otro.
4. Resolver despejando la incógnita.

Ejemplo

Resolver la ecuación

$$\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-4}{10} = 2.(x-5)$$

Solución:

$\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-4}{10} = 2.(x-5) \Rightarrow mcm(5,10) = 10 \Rightarrow$

$\frac{2\cdot(3x+2)}{10} \frac{-1\cdot(4x-4)}{10} = \frac{20\cdot(x-5)}{10} \Rightarrow$

$(3x+2)–1 \cdot (4x–4) = 20 \cdot (x–5)$

$= 6x + 4–4x + 4 = 20x–100 \Rightarrow -18x = -108$

$x = 6$

Como sabemos, las ecuaciones permiten resolver multitud de problemas, el tratamiento habitual ante un problema concreto es el siguiente:

1. Nombrar la incógnita
2. Plantear una ecuación que concuerde con el enunciado.
3. Resolver la ecuación.
4. Comprobar el resultado
5. Interpretarlo

Ejemplo

La suma de 4 números enteros consecutivos es 206. ¿Cuáles son esos números?

Solución:

Llamando x al menor de los números. Los tres números, al ser consecutivos, serán:

1^{o} número: x ;

2^{o} número: $x+1$

3^{o} número: $x+2$

4^{o} número: $x+3$

Planteamos ahora la ecuación correspondiente al enunciado: la suma ha de ser 206.

Por tanto:

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=206$$

Eliminamos los paréntesis y agrupamos términos nos queda:

$$x+x+1+x+2+x+3=206 \Rightarrow x+x+x+x=206-6=200 \Rightarrow$$
$$4x=200 \Rightarrow x=50$$

Por tanto los números son 50,51,52,53.

Ejemplo

R le preguntó a M cuántos años tenía y ésta le respondió: "El doble de los años que tenía hace 15 años más los que tengo ahora son el triple de los que tenía hace 10 años". ¿Cuántos años tiene M?

Solución:

Años de M:x; hace 15 años $x-15$; doble de hace 15 años=$2(x-15)$

hace 10 años $x-10$

Planteamos ahora la ecuación correspondiente al enunciado

$2(x-15)+x=3\cdot(x-10) \Rightarrow 2x-30+x=3x-20$

$-x+x=-30+30 \Rightarrow 0=0$

$0=0$ indica que tenemos una identidad, cualquier valor es solución de la ecuación.Podemos interpretar que M no le quería decir su edad a R.

1.2 Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones de 2º grado se reducen , utilizando las transformaciones en las ecuaciones, a la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

que es una ecuación completa de 2º grado en x.

Las ecuaciones incompletas de 2º grado en x tienen la forma

1. $ax^2 = 0$

   Solución $\quad ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{a} = 0 \Rightarrow x = 0$

2. $ax^2 + bx = 0$

   Solución $\quad x(ax+b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$

3. $ax^2 + c = 0$

   Solución $\quad ax^2 = -c \Rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \\ x = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \end{cases}$ Debe ser que $\frac{-c}{a} > 0$ para tener solución.

Para resolver las ecuaciones de 2º grado completas, aplicamos la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aunque las ecuaciones incompletas se pueden resolver directamente despejando x.

Ejemplo

Resolver las siguientes ecuaciones

1. $3x^2 - 48 = 0$

$$3x^2 = 48 \Rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{\dfrac{48}{3}} = +\sqrt{16} = +4 \\ x = -\sqrt{\dfrac{48}{3}} = -\sqrt{16} = -4 \end{cases}$$

2. $x^2 + 3x = 0$

$$x(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

3. $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \begin{cases} x = \frac{-5+\sqrt{1}}{2} = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x = \frac{-5-\sqrt{1}}{2} = \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

4. $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2$

$$\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2 \Rightarrow \frac{2x \cdot 2x}{\cancel{(x+2)(2x)}} + \frac{(x+2)(x+2)}{\cancel{(x+2)(2x)}} = \frac{2(x+2)(2x)}{\cancel{(x+2)(2x)}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x^2 + x^2 + 4x + 4 = 4x^2 + 8x$4x^{2}+x²+4x+4=4x²+8x

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \begin{cases} x = \frac{4+\sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{4+0}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x = \frac{4-\sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{4-0}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

El número de soluciones de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, pueden ser dos, una o ninguna. Para saber cuántas soluciones tiene una ecuación de segundo grado sin tener que resolverla, basta observar el valor de la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, que se llama **discriminante de la ecuación**.

1.- Si $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ La ecuación tendrá dos soluciones distintas.

2.- Si $b^2 – 4ac = 0 \Rightarrow$ La ecuación una solución.

3.- Si $b^2 – 4ac < 0 \Rightarrow$La ecuación no tiene solución.

1.3 Ecuaciones de grado superior a dos.

1.3.1 Ecuaciones bicuadradas.

Estas ecuaciones tienen la forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

Para resolver estas ecuaciones hacemos un cambio de variable, llamaremos $t = x^n$.

Al realizar este cambio, la ecuación resultantes es $a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$ que es de 2º grado en la variable t y ya sabemos como hallar el valor t. Una vez hallada la t, se calcula el valor de x sin más que despejarla en la ecuación

$$x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$$

Ejemplo

1.- Resolver la ecuación $x^4 + 20x^2 – 576 = 0$

Llamamos

$t = x^2 \Rightarrow t^2 + 20t – 576 = 0$

$t = \frac{-20 \pm \sqrt{400+2304}}{2} = \frac{-20 \pm 52}{2} \Rightarrow \begin{matrix} t = 16 \\ t = -36 \end{matrix}$

Hallemos ahora el valor de x

$t = 16 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

$t = -36 \Rightarrow x^2 = -36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-36} \notin R \, no \, hay \, solución.$

Ejemplo

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $4x^6 - 37x^3 + 9 = 0$

   Solución:

   Llamamos $t = x^3 \Rightarrow 4t^2 - 37t + 9 = 0$

   $t = \frac{+37 \pm \sqrt{1369+144}}{8} = \frac{-20 \pm \sqrt{1225}}{8} = \frac{-20 \pm 35}{8} \Rightarrow \begin{matrix} t = \frac{-55}{8} \\ t = \frac{15}{8} \end{matrix}$

Hallemos ahora el valor de x

$t = \frac{-55}{8} \Rightarrow x^3 = \frac{-55}{8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-55}{8}}$

$t = \frac{15}{8} \Rightarrow x^3 = \frac{15}{8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{15}{8}}$

1. $2x^4 – 10x^2 + 12 = 0$

   Llamamos $t = x^2 \Rightarrow 2t^2 - 10t + 12 = 0$

   $t = \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{4} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{4} \Rightarrow \begin{matrix} t = 2 \\ t = 3 \end{matrix}$

   Hallemos ahora el valor de x

   $t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

   $t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Ejemplo

El área de un rectángulo mide 48 cm^2 y la diagonal mide 10 cm. ?Cuánto miden los lados del rectángulo?.

Solución:

Llamando x al lado del rectángulo y al otro lado

Se tiene que $\left\{\begin{array}{c} x \cdot y = 48 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y = \frac{48}{x} \\ x^2 + \frac{48^2}{x^2} = 100 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y = \frac{48}{x} \\ x^4 + 2304 = 100x^2 \end{array}\right.$

Llamamos $t = x^2 \Rightarrow t^2 - 100t + 2304 = 0$

$t = \frac{+100 \pm \sqrt{1000-9216}}{2} = \frac{100 \pm 28}{2} \Rightarrow \begin{array}{c} t = \frac{128}{2} = 64 \\ t = 72 \end{array}$

Hallemos ahora el valor de x

$t = 64 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = \frac{48}{8} = 6$
$t = 72 \Rightarrow x^2 = 72 \Rightarrow x = 6\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{48}{6\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

1.3.2 Aplicación de la teoría de polinomios a la resolución de ecuaciones de grado superior a dos.

Supongamos que tenemos el polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Si igualamos dicho polinomio a cero, obtenemos una ecuación polinómica.

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

Podemos aplicar todo lo estudiado con el cálculo de raíces de un polinomio, para calcular las soluciones de estas ecuaciones.

Para resolver la ecuación anterior podemos aplicar la factorización de polinomios, aplicamos la regla de Ruffini.

Los divisores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$x^3 – 4x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 1).(x^2 – 5x + 6) = 0$

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3 \end{cases}$$

Luego las soluciones son: $x = -1; x = 2; x = 3$

Ejemplo

1.- Resolver la ecuación $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

Solución:Sacamos factor común

$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow$ $x = 0; \}$ $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo

2.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a)$x^3 - 7x^2 + 3x = 0$

Solución:

$x^3 - 7x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 7x + 3) = 0$

Ya tengo la raiz $x = 0$. Ahora resuelvo $x^2 - 7x + 3 = 0$

$$x = \frac{7\pm\sqrt{49-12}}{2} = \frac{7\pm\sqrt{37}}{2} = \begin{cases} x = \frac{7+\sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{7-\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

Solución:

Como

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 2 & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x - 2)(x^2 - 9) = 0$

$$x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Las soluciones son $x = 2, x = 3$ y $x = -3$

1.4 Ecuaciones racionales.

Hay veces que en una ecuación puede aparecer la variable x en el denominador. En estos casos se procede de forma similar a cuando trabajamos con fracciones algebraicas.

- Se eliminan los denominadores.
- Se resuelve la ecuación.
- Las soluciones obtenidas se comprueban en la ecuación original. Las que la verifican son las soluciones buscadas.

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$$

Solución:

$\frac{x.(x+1)}{(x-1).(x+1)} + \frac{2x.(x-1)}{(x-1).(x+1)} = \frac{3.(x-1).(x+1)}{(x-1).(x+1)}$

$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 – 3 \Rightarrow -x = -3 \Rightarrow x = 3$

La solución se comprueba en la ecuación original y se da por válida si cumple la igualdad

$$\frac{3}{3-1} + \frac{2 \cdot 3}{3+1} = \frac{3}{2} + \frac{6}{4} = \frac{6}{4} + \frac{6}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

2 Inecuaciones

2.1 Inecuaciones de 1^{er} grado con una incógnita.

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas. El grado de una inecuación es el mayor de los grados al que están elevadas sus incógnitas.

Toda inecuación de primer grado con una incógnita se reduce a una expresión del tipo :

$$ax + b < c$$

$$ax + b > c$$

$$ax + b \leq c$$

$$ax + b \geq c$$

Inecuaciones equivalentes Dos inecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución. A veces, para resolver una inecuación, resulta conveniente encontrar otra equivalente más sencilla. Para ello, se pueden realizar las siguientes transformaciones:

- Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la inecuación.

$$5x + 4 < 9 \Leftrightarrow 5x + 4 - 4 < 9 - 4 \Leftrightarrow 5x < 5$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo.

$$5x < 5 \Leftrightarrow \tfrac{5x}{5} < \tfrac{5}{5} \Leftrightarrow x < 1$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad.

$$x < 5 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 5 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -5 \Leftrightarrow x \in (-5, +\infty)$$

Resolver una inecuación consiste en encontrar todos los valores que la verifican. Éstos se denominan soluciones de la misma.

Resolver la inecuación

$2(x + 1)–3(x–2) < x + 6$

$2x + 2–3x + 6 < x + 6 \Rightarrow 2x–3x–x < 6–2–6\}$

$-2x < -2 \Rightarrow x > 1$

- La solución de la inecuación es x $\in (1, \infty)$

2.1.1 Método de resolución

En la mayoría de los casos para resolver la inecuación conviene seguir el siguiente procedimiento:

- Quitar denominadores, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.
- Quitar los paréntesis, si los hay.
- Transponer los términos con x a un miembro y los números al otro.
- Reducir términos semejantes.
- Despejar la x.

Ejemplo

- $\frac{x-5}{3} - \frac{(x-8)}{6} > \frac{3-x}{2} \Longleftrightarrow \frac{2(x-5)}{6} - \frac{(x-8)}{6} > \frac{3(3-x)}{6}$

$2(x-5) - (x-8) > 3(3-x) \Leftrightarrow 1$
$\Leftrightarrow 2x - 10 - x + 8 > 9 - 3x$
$2x - x + 3x > 10 - 8 + 9 \Leftrightarrow$
$4x > 11 \Leftrightarrow x > \frac{11}{4}$
Sol: $x \in (\frac{11}{4}, +\infty)$

2.2 Inecuaciones de 2º grado con una incógnita.

Resolver la inecuación $x^2–3x + 2 \leq 0$

Hallamos las raíces de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

Los tres intervalos en los que queda descompuesta la recta son ($-\infty, 1]$, [1,2], [2, ∞). Tomamos un valor de cada intervalo y lo sustituimos en la inecuación:

- $x = 0 \Rightarrow 0 \cdot 2–3 \cdot 0 + 2 = 2$ no verifica la inecuación
- $x = 1'5 \Rightarrow 1'25–4'5 + 2 = -1'25 \leq 0$ Si verifica la inecuación
- $x = 3 \Rightarrow 9–9 + 2 = 2$ no verifica la inecuación

Luego la solución es el intervalo [1,2] $\quad x \in [1, 2]$

El poner corchete o paréntesis en los intervalos depende de si en la desigualdad aparece el signo igual o no.

2.2.1 Inecuaciones polinómicas de grado superior a dos.

Resolver $\quad x^3 - x^2 - 6x < 0$
Solución:
Tenemos que descomponiendo :

$$x^3 - x^2 - 6x = x.(x + 2).(x - 3) < 0$$

Dividimos la recta real en los intervalos obtenidos a partir de las raices$(-\infty, -2)$, $(-2, 0)(0, 3)(3, \infty)$

$-\infty$ .... -2 ... 0 ... 3 .... ∞				
$-$	$+$	$+$	$+$	$(x + 2)$
$-$	$-$	$+$	$+$	x
$-$	$-$	$-$	$+$	$x - 3$
$-$	$+$	$-$	$+$	$x(x + 2)(x - 3)$

Probamos los valores en la expresión tomados de dichos intervalos para ver el signo de la expresión
La solución es $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 3)$

2.3 Inecuaciones fraccionarias.

Toda inecuación fraccionaria de primer grado con una incógnita se reduce a una expresión del tipo

$$\frac{\mathrm{ax}+b}{\mathrm{cx}+d} <, >, \leq, \geq 0$$

Veamos con un ejemplo cómo se resuelven estas inecuaciones:

Resolver la inecuación $\frac{2x-3}{x+1} > 1$

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x-3-x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0$$

Hallamos los valores que nos anule el numerador (x=4) y el denominador (x=-1), y construimos la siguiente tabla

$-\infty$ .... -1 ... 4 .... ∞			
$-$	$-$	$+$	$(x-4)$
$-$	$+$	$+$	$x+1$
$+$	$-$	$+$	$\frac{x-4}{x+1}$

En los intervalos, si la desigualdad no lleva el igual, se pondrán en todos paréntesis. Pero si la desigualdad es $\leq$ ó $\geq$, los números procedente del numerador llevarán corchetes y los del denominador paréntesis.

De cada intervalo tomamos un valor y lo sustituimos en las expresiones del numerador y denominador, apuntando el signo resultante. Al final aplicamos la regla de los signos. Si la desigualdad es 0 ó ≤ 0 tomaremos como solución los intervalos donde haya quedado el signo (-). Si la desigualdad es 0 ó ≥ 0, tomaremos como solución los intervalos donde haya quedado el signo (+).

En nuestro caso, la solución está en los intervalos $(-\infty,-1) \cup (4,\infty)$