Ecuaciones

Radicales, exponenciales y logarítmicas

Bachillerato 1º

2023

BY S3R4

MATEMATICAS (MAT I)

1º Bachillerato

ECUACIONES RADICALES, EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

S3r4

1 Ecuaciones irracionales.

Son aquellas ecuaciones donde la incógnita aparece, en alguno de sus términos, bajo el signo radical.

Lo primero que debemos hacer es aislar la raíz en un miembro y elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación. Si queda algún radical, repetimos el proceso. De esta forma, llegaremos a una ecuación del tipo de las anteriores, que ya sabemos cómo resolverlas.

Después de resolver las ecuaciones obtenidas, debemos comrobar las soluciones en la ecuación original, ya que al elevar al cuadrado una expresión se pueden añadir soluciones .

Por ejemplo , la ecuación $x = 1$ al elevar al cuadrado $x^2 = 1$produce dos soluciones $x = 1$ y $x = -1$. La solución x=-1 es añadida al elevar al cuadrado y hay que eliminarla.

Ejemplo

1.- Resolver la ecuación $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$

Solución:

Aislamos y elevamos al cuadrado

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2 = (5-\sqrt{x})^2 \Rightarrow x+5 = 25 + x – 10\sqrt{x}$$

$$= -20 = -10\sqrt{x} \Rightarrow 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 4$$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación: $x + \sqrt{5x+10} = 8$

Solución:

Aislamos y elevamos al cuadrado

$\left(\sqrt{5x+10}\right)^2 = (8-x)^2 \Rightarrow 5x+10 = 64 + x^2 – 16x \Rightarrow$

$0 = x^2 – 21x + 54 \Rightarrow$

Resolvemos la ecuación de segundo grado obtenida.

$$x = \frac{-(-21) \pm \sqrt{(-21)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 54}}{2} = \frac{21 \pm 15}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 18 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones

- $x = 3 \Rightarrow 3 + \sqrt{5 \cdot 3 + 10} = 8$ Vale la solución
- $x = 18 \Rightarrow 18 + \sqrt{5 \cdot 18 + 10} \neq 8$ No vale $x = 18$

Ejemplo

Resolver las siguientes ecuación: $7+2x=1+x+3+2\sqrt{3+x}$

Solución:

Aislamos y elevamos al cuadrado

$7+2x=1+x+3+2\sqrt{3+x}\Rightarrow 3+x=2\sqrt{3+x}\Rightarrow$

$(3+x)^2=(2\sqrt{3+x})^2\Rightarrow 9+x^2+6x=12+4x\Rightarrow x^2+2x-3=0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado obtenida.

$x=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}\longrightarrow\begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$

Comprobamos las soluciones

- $x=-3\Rightarrow 7+2(-3)=1+(-3)+3+2\sqrt{3-3}=8$ Vale la solución
- $x=1\Rightarrow 7+2=1+1+3+2\sqrt{3+1}$ Vale $x=1$‘

Ejemplo

Resolver $\boldsymbol{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x}}$

Solución:

$\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x}$

Elevamos al cuadrado

$\left[\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\right]^2=\left(\sqrt{x}\right)^2\Longrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=x\Rightarrow\sqrt{x^2-1}=0$.

Elevamos al cuadrado de nuevo: $x^2-1=0\langle\begin{matrix} x & = & 1 \\ x & = & -1 \end{matrix}$

La ecuación obtenida $x^2-1=0$ tiene dos soluciones: $x=1$ y $x=-1$.
Sin embargo, sólo la positiva es solución de la ecuación irracional.

1 Ecuaciones exponenciales.

Una ecuación exponencial es aquella donde la incógnita aparece en el exponente.

Son ecuaciones exponenciales las siguientes:

- $2^x=8$
- $3^{x+2}+81=0$
- $5^{2x}–6\cdot 5^x+5=0$

Para resolver estas ecuaciones distinguiremos dos apartados:

1.1.1. Ecuaciones donde la incógnita aparece en un solo exponente.

En este tipo de ecuaciones, ponemos la dos partes de la ecuación como ptencias de la misma base e igualamos los exponentes.

Ejemplo

Resolver las siguientes ecuaciones:
a) $2^{x+1} = 8$
b) $4^{x-1} – 8 = 0$
Solución:
a)$2^{x+1} = 8 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

b)$4^{x-1} = 8 \Rightarrow (2^2)^{x-1} = 2^{2x+2} = 2^3 \Rightarrow 2x–2 = 3 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = 5/2$

Puede ocurrir que no podamos descomponer todos los miembros en potencias de la misma base, por ejemplo en:

$2^x = 127$

En estos casos, para despejar x, tomaremos previamente log

$log\, 2^x = log\ 127$

$x.log2 = log127 \Rightarrow x = \frac{\log 127}{log2} = \frac{2'1038}{0'3010} = 0'6332$

1.1.2. Ecuaciones donde la incógnita aparece en más de una potencia.

Son ecuaciones de este tipo

- $2^{x+3} + 4^{x+1} – 320 = 0$
- $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

En este tipo de ecuaciones, todas las potencias que tengan en el exponente la incógnita x, se descompone en potencias de la misma base. A continuación, y haciendo uso de las propiedades de las potencias, debemos conseguir que en el exponente aparezca tan sólo x. Posteriormente, hacemos un cambio de variables, llamamos z a la potencia que tiene en el exponente x, quedando una ecuación algebraica simple de resolver.

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación: $2^{x+3}+4^{x+1}–320=0$
Solucion:
$2^{x+3}+4^{x+1}–320=0 \Rightarrow 2^{x+3}+2^{2x+2}–320=0$
$2^{x}\cdot 8+2^{2x}\cdot 4–320=0 \Rightarrow 8\cdot 2+4\cdot (2^{x})^{2}–320=0$

$z=2x \Rightarrow 8.z+4.z^{2}–320=0 \Rightarrow z^{2}+2z–80=0$

$z=\frac{-2\pm\sqrt{4+320}}{2}=$ $\langle z_1=8$ $\langle z_2=-10$

Una vez hallada z, hallamos x

$2^{x}=8 \Rightarrow 2^{x}=2^{3} \Rightarrow x=3$
$2^{x}=-10$ no tiene solución.

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación: $2^{x+3}+4^{x+1}–320=0$
Solución:
$2^{x-1}+2^{x}+2^{x+1}=7 \Rightarrow \frac{2^{x}}{2}+2^{x}+2^{x},2=7$

llamamos $z=2x \Rightarrow \frac{z}{2}+z+2z=7 \Rightarrow z+2z+4z=14$

$7z=14 \Rightarrow z=2 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$

1.1.3. Ecuaciones exponenciales más complejas

Cuando la incógnita se encuentra en el índice de una raíz, también se la considera exponencial, ya que sólo basta escribirla como exponente fraccionario.

Ejemplo

Sea la ecuación:

$$\sqrt[3x+1]{2^{x+2}}=8$$

Vemos que la variable se encuentra también en el exponente de una .

Por las propiedades de la radicación, vamos a escribirla así: $2^{\frac{x+2}{3x+1}}=8$

Aplicamos el método de igualación de bases: $2^{\frac{x+2}{3x+1}} = 2^3$

O sea: $\frac{x+2}{3x+1} = 3$

Operando, obtenemos: $x = -\frac{1}{8}$

Ejemplo

Resolver $\frac{5^{3x+1}}{5^{1+x}} - 25^{x+1} \cdot \frac{5^{2x-1}}{5^{1+3x}} = 20$ **mediante el cambio de variable**
Solución:
Operamos la ecuación simplificándola: $\frac{5^{3x+1}}{5^{1+x}} - 25^{x+1} \cdot \frac{5^{2x-1}}{5^{2x-1}} = 20$
$5^{3x+1-1-x} - (5^2)^{x+1} \cdot 5^{2x-1-3x} = 20 \Longrightarrow 5^{2x} - 5^{2x+2} \cdot 5^{-x-1} = 20$
$5^{2x} - 5^{2x+2-x-2} = 20; \Longrightarrow 5^{2x} - 5^x = 20$

Aplicamos el cambio de variable $5^x = t$:$5^{2x} - 5^x = 20 \Longrightarrow t^2 - t = 20$

$\Longrightarrow t^2 - t - 20 = 0$.Obtenemos $t = 5$ y $t = -4$
Como $t = 5^x$,
$t = -4 \longrightarrow -4 = 5^x$ No tiene solucion real
$t = 5 \longrightarrow 5 = 5^x \Longrightarrow \boxed{x = 1}$

2 Ecuaciones logarítmicas.

Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita aparece en una expresión afectada por un logaritmo. Así en la ecuación $2log\, x = 1 + log(x - 0,9)$, en la que la incógnita x aparece tras el signo de logaritmo, es logarítmica.

Cómo se resuelven ecuaciones logarítmicas
Para resolver estas ecuaciones se intenta, aplicando las propiedades de los logaritmos, llegar a expresiones del tipo

$$log\, A = log\, B.$$

Una vez conseguido, se aplica la equivalencia

$$log\, A = log\, B \Rightarrow A = B,$$

deduciendo, a partir de aquí, los valores de las incógnitas.

Ejemplo

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $logx + log(x+3) = 2.log(x+1)$
2. $2.logx–2.Log(x+1) = 0$
3. $2logx = 1 + log(x-0,9)$.

Soluciones

1. $logx + log(x+3) = 2.Log(x+1) \quad \Rightarrow log(x^2+3x) = log(x+1)^2$

   $x^2 + 3x = x^2 + 1 + 2x \quad \Rightarrow 3x–2x = 1 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$

2. $2.logx–2log(x+1) = 0 \Rightarrow logx^2–log(x+1)^2 = 0$

   $log\frac{x^2}{x^2+2x+1} = \log 10^0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+2x+1} = 1 \Rightarrow x^2 = x^2 + 2x + 1$

   $-2x = 1 \Rightarrow x = -1/2$

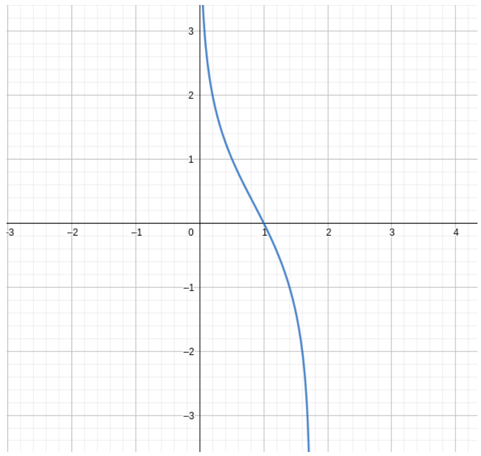
3. $logx^2 = log10 + log(x-0'9)$
   $logx^2 = log[10(x-0'9)] \Rightarrow x^2 = 10(x-0'9)$
   $x^2 = 10x - 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$
   Hay dos soluciones: $x = 9$ y $x = 1$

2.0.1. Validez de las soluciones

En algunos casos algunas de las soluciones que se obtiene para una ecuación logarítmica pueden no ser válidas. Veamos:

Resolver la ecuación $log(3-x^2) = log2 + logx$

Si representamos la ecuación $y = log(3-x^2) - log2 - logx$ en el siguiente gráfico ¿qué se observa? ¿qué soluciones tiene la ecuación?



Si te fijas en la gráfica azul (ecuación con logarítmos), sólo corta al eje X en en punto (solución $x = 1$), mientras que la ecuación que se obtiene al agrupar $log(3 - x^2) = log2x$, que da lugar a la ecuación: $3 - x^2 = 2x$, que representamos como:

$$y = 3 - x^2 - 2x$$

¡tiene dos soluciones! Una la ya obtenida $x = 1$ y otra ¡$x = -3$!

¿porqué no hemos obtenido la solución $x = -3$ en la ecuación con logaritmos?

Sustituye el valor (-3) en la ecuación inicial, Obtendrás: $log(-6) = log2 + log(-3)$.

¡logaritmos de números negativos que no existen!. Por tanto:

"En algunas ecuaciones logarítmicas podemos obtener soluciones numéricas que no son válidas, lo que nos obliga a comprobar las soluciones obtenidas en la ecuación inicial para decidir sobre su validez"