Números Complejos

Bachillerato 1º

2023

BY S3R4

MATEMATICAS (MAT I)

1º Bachillerato

NÚMEROS COMPLEJOS

S3r4

1 Introducción

Los algebristas de los siglos XV y XVI, al resolver ecuaciones de segundo grado del tipo $x^2–4x + 13 = 0$ y llegar a la expresión $x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 1}$ decían:

«No es posible extraer la raíz cuadrada de un número negativo. Por tanto, la ecuación no tiene solución».

$x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm 6\sqrt{-1}$
Pero en algún momento los algebristas se decidieron a operar con estas expresiones como si se tratara de números reales:

Y seguían operando con $\sqrt{-1}$ como si se tratara de un número real. En el siglo XVII ,Leibnitz, dijo que:

“ $\sqrt{-1}$ *es una especie de anfibio entre el ser y la nada.”*

Fue en el año 1777 cuando Euler le dio a $\sqrt{-1}$ el nombre de i (por imaginario).

El número imaginario i, operado elementalmente con los reales, dio lugar a los números complejos. Su representación gráfica, pasando de la recta real al plano complejo (Gauss, finales del siglo xviii), acabó de darles la entidad necesaria para que fueran plenamente aceptados.

2 ¿Cómo se maneja $\sqrt{-1}$?

Dijimos que "los algebristas del xvi decidieron operar con $\sqrt{-1}$ como si se trata de un número real".

Vamos a hacer como ellos: operar este "extraño personaje” consigo mismo y con los números reales sido las reglas de las operaciones entre números

Extraer fuera de Ia raíz
Observa cómo se extraen números de la raíz: $= \sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}$

Potencias de $\sqrt{-1}$

De la definición de raíz cuadrada, es lógico que: $(\sqrt{-1})^2 = -1$
$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$
$(\sqrt{-1})^4 = 1$
$(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1}$
$(\sqrt{-1})^6 = -1$

3 Un nuevo campo numérico C

Al resolver $x^2 - 6x + 13 = 0$, obtenemos *3 + 2* $\sqrt{-1}$ y *3 - 2* $\sqrt{-1}$, soluciones que carecen de sentido en el conjunto de los reales porque $\sqrt{-1}$ no es un número real.

Los números complejos nacen del deseo de dar validez a estas expresiones. Para ello es necesario admitir como números válidos a $\sqrt{-1}$ y a todos los que se obtengan al operar con él como si se tratara de un número más.

Unidad imaginaria. Se llama así al nuevo número $\sqrt{-1}$. Se designa por la letra i.

$$i = \sqrt{-1};$$

$i^2 =$ -1 (El nombre i viene de *imaginario).*

3.1 Definición

- **Números complejos. Son las expresiones *a* + *bi*, donde *a* y *b* son números reales**.
- **Componentes.** La expresión $a + bi$ se llama forma **binómica** de un número complejo porque tiene dos componentes:

  a **componente real**

  b **componente imaginaria**

También se llaman parte real y parte imaginaria.

- **Igualdad.** Dos números complejos son iguales cuando tienen la misma componente real y la misma componente imaginaria.
  - El conjunto de todos los números complejos se designa por e : $C = a + bi/a, b \in R$
- Los números reales son complejos, **R** $\subset$ **C**
  - Los reales son números complejos cuya componente imaginaria es cero: $a + 0i = a$
- Números imaginarios son los números complejos cuya componente imaginaria no es cero.
  - Por tanto, un número complejo o es real o es imaginario.
- Números imaginarios puros son los imaginarios cuya componente real es cero. *5i ; i ; i ; -i* son imaginarios puros.

Los números complejos $a + bi$ y -a - bi se llaman opuestos.

	3+7i	$-\sqrt{5} + 8i$	8i	9
parte real	3	$-\sqrt{5}$	0	9
Parte imaginaria	+7	8	9	0

4 Conjugado de un número complejo.

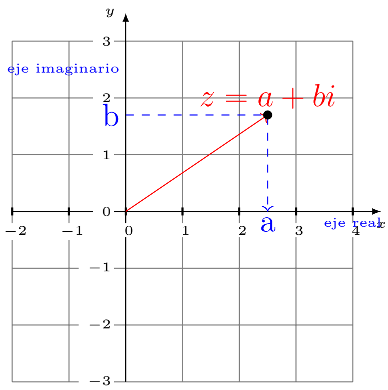
Dado un número complejo $z = a + bi$, llamamos **Número Complejo Conjugado** de z al número $\overline{z}$ = a - bi

Escribe estos números como complejos $\sqrt{-3}$; $\sqrt{\mathbf{3}}$; $\sqrt[4]{-16}$; 8
Solución:
$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i = 0 + \sqrt{3}i$
$\sqrt{3} = \sqrt{3} + 0 \cdot i$
$\sqrt[4]{-16} = \sqrt{\sqrt{-16}} = \sqrt{4i} = \sqrt{4_\pi} = 2(cos\pi/4 + isen\pi/4) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$
$8 = 8 + 0i$

4.1 Representación gráfica de los números complejos.Forma binómica

Los reales llenan por completo la recta, de modo que a cada número real le corresponde un punto en la recta y a cada punto, un número real. Por eso hablamos de recta real.

Para representar los números complejos tenemos que salir de la recta y llenar el plano, pasando así de la **recta real** al **plano complejo.**

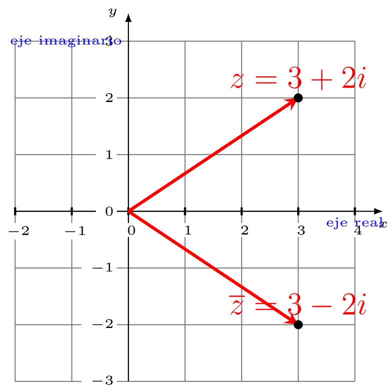


Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos. El eje X se llama eje real, y el Y, eje imaginario.

El número complejo $a + bi$ se representa mediante el punto *(a, b)* , que se llama su **afijo**, o mediante un vector (flecha) de origen (0, 0) y extremo *(a, b)* .

Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real, y los imaginarios puros, sobre el eje imaginario.

Cualquier ecuación de segundo grado con coeficientes reales que no tenga solución real tiene dos soluciones imaginarias que son números complejos conjugados.



Ejemplo

1. **Identifica las partes imaginaria y real de los siguientes números complejos y halla su conjugado y su opuesto:**

   a) $z = 8 + 2i$

   b) $z = 5$

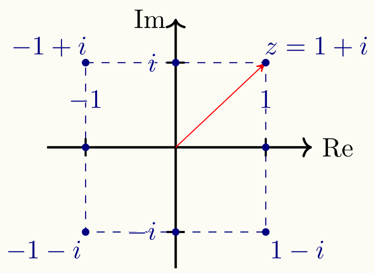
   c) Construye un cuadrado a partir de $z = 1 + i$

   Solución:

   a) La parte real es $a = Re(z) = 8$ y la parte imaginaria es $b = Im(z) = 2$.
   El conjugado es $\overline{z} = 8 - 2i$ y el opuesto de z es $-z = -8 - 2i$.

   b) La parte real es $a = Re(z) = 5$ y la parte imaginaria es $b = Im(z) = 0$. El conjugado de z es $\overline{z} = 5$ y el opuesto de z es $-z = -5$.

   c) Uso $z = 1 + i$, su conjugado $\overline{z}$,su opuesto $-z = -1 - i$ y su conjugado $\overline{-z}$



5 Operaciones con números complejos

La suma, la resta y la multiplicación de números complejos se realizan siguiendo las reglas de las operaciones de los números reales y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

5.1 Suma y Diferencia de números complejos.

Sean $z = a + bi$ y $z' = c + di$

- **Suma** $z + z' = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- **Resta** $z - z' = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Ejemplo

1. $(3 - 2\sqrt{-1}) + (5 + 6\sqrt{-1}) = 8 + (-2+6)\sqrt{-1} = 8 + 4\sqrt{-1}$
   $(3-2i) + (5 + 6i) = 8 + (-2 + 6)i = 8 + 4i$
2. **Dados los números complejos** $z_1 = 56 + 4i$ **y** $z_2 = 4 + 8i$**, calcula:**

   a) $z_1 + z_2$ **b)** $z_1 - z_2$

   Solución:

   a)$(56 + 4i) + (4 + 8i) = 60 + 12i$

   b)$(56 + 4i) - (4 + 8i) = 52 - 4i$

5.2 Producto de un número complejo por un número real.

Sea $z = a + bi$ y k un número real

$$k.z = k.(a + bi) = ka + kbi$$

5.3 Producto de dos números complejos.

Sean $z = a + bi$ y $z' = c + di$
$z.z' = (a + bi).(c + di) = a.c + ad \cdot i + bc \cdot i + bd \cdot i^2 = ac + adi + bci - bd =$

$$z \cdot z' = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo

$(3 - 2\sqrt{-1}) \cdot (5 + 6\sqrt{-1}) = 3{\cdot}5 + 3{\cdot}6\sqrt{-1} - 2{\cdot}\sqrt{-1} \cdot 5 - 2\sqrt{-1}{\cdot}6\sqrt{-1} = 15 + 18\sqrt{-1} - 10\sqrt{-1} - 12((\sqrt{-1})^2) = 15 + 8\sqrt{-1} - 12 \cdot (-1) = 15 + 12 = 27 + 8\sqrt{-1}$

Ejemplo

1. **Dados los números complejos** $z_1 = 56 + 4i$ **y** $z_2 = 4 + 8i$, **calcula:**

   a) $z_1 \cdot z_2$ **b)**z_1^3

   Solución:

   a) $(56 + 4i) \cdot (4 + 8i) = 224 + 448i + 16i - 32i^2$
   Recordando que $i^2 = -1$, simplificamos:

   $$224 + 464i + 32 = 256 + 464i$$

   b) $(z_1)^3 = (56 + 4i)^3$
   Usando la fórmula del binomio al cubo:

   $$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

   donde a=56 y b=4i:
   $(56 + 4i)^3 = 56^3 + 3 \cdot 56^2 \cdot 4i + 3 \cdot 56 \cdot (4i)^2 + (4i)^3$
   Simplificamos los términos:$= 175616 + 9408i - 1792 - 64i$
   Agrupamos los términos reales e imaginarios:$= 174824 + 9344i$

Multiplicación de un número por su conjugado

$$z \cdot \bar{z} = (c + di) \cdot (c - di) = c2\text{—}cdi + cdi + d2 = c^2 + d^2$$

Ejemplo

$$(2 + 4i)(2 - 4i) = (2 \cdot 2 + 8i - 8i - 16i^2 = 4 + 16 = 20$$

Multiplicando un número complejo por su conjugado se obtiene un número real. *Este resultado va a ser muy útil para dividir complejos: multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado de este último, consiguiendo así que en el denominador quede un número real.*

5.4 Potencias de la unidad imaginaria

- $i^1 = i$ $i^5 = i$ .....
- $i^2 = -1$ $i^6 = -1$ .....
- $i^3 = -i$ $i^7 = -i$ .....

- $\mathrm{i}^4 = 1 \quad \mathrm{i}^8 = 1 \quad .....$

Ejemplo

Calcula
a)$\frac{i^{241}}{1-i} - \frac{2i^{42}}{1+i^9} + i^{83}$ b)$i^{333} - \frac{i^{27}}{1-i^{27}} + \frac{i^{72}}{1-i^{25}}$
Solución:
a)$i^{241} = i^{240}i = 1 \cdot i = i;i^{42} = i^{40}i = 1 \cdot i^2 = -1;i^9 = i^8 i = 1 \cdot i = i;i^{83} = i^{80}i = 1 \cdot i = i;$
$\frac{i^{241}}{1-i} - \frac{2i^{42}}{1+i^9} + i^{83} = \frac{i}{1-i} - \frac{-2}{1+i} - i = \frac{i(1+i)+2(1-i)-i(1-i)}{1-i^2} = \frac{1-3i}{2}$
b)$i^{333} - \frac{i^{27}}{1-i^{27}} + \frac{i^{72}}{1-i^{25}} = i - \frac{-i}{1-(-i)} + \frac{1}{1-i} = \frac{i\left(1-i^2\right)+i(1-i)+(1+i)}{2} = 1 + 2i$

5.5 Cociente de dos números complejos.

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + b \cdot i}{c + d \cdot i} = \frac{(a + b \cdot i) \cdot (c - d \cdot i)}{(c + d \cdot i) \cdot (c - d \cdot i)} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (\mathrm{b{\cdot}c} - \mathrm{a{\cdot}d}) \cdot i}{c^2 + d^2}$$

Ejemplo

$\frac{5-3i}{4+2i} = \frac{5-3i}{4+2i}\frac{4-2i}{4-2i} = \frac{20-10i-12i+6i^2}{4^2+2^2} = \frac{20-6-22i}{4^2+2^2} = \frac{14-22i}{20} = \frac{14}{20} - \frac{22}{20}i$

Ejemplo

1. **Dados los números complejos $z_1 = 56 + 4i$ y $z_2 = 4 + 8i$, calcula:**

   a) $\frac{z_1}{z_2}$

   Solución:

   a) Para realizar la división $\frac{56+4i}{4+8i}$ multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador:
   $\frac{(56+4\mathrm{i})(4-8\mathrm{i})}{(4+8i)(4-8i)}$
   Realizamos la multiplicación: $\frac{224-448i+16i-32i^2}{16+64}$
   Sustituimos $i^2 = -1$ y queda $\frac{224-432i-32}{8}$.
   Simplificamos: $\frac{192-432i}{80}$
   La división es $\frac{192}{80} - \frac{432}{80}i = \frac{24}{10} - \frac{54}{10}i$

5.6 Propiedades de las operaciones con números complejos

- La suma es asociativa y conmutativa
- El 0 es el elemento neutro de la suma.
- Todo número complejo, ***a* + *bi*,** tiene un opuesto. $-a-bi$.
- El poducto es asociativo y conmutativo
- El 1 es el elemento neutro del producto.
- Todos los números complejos, $z = a + bi$, salvo el 0, tienen un inverso: $z^{-1} = \frac{a-\mathrm{bi}}{a^2+b^2}$

$$(a+\mathrm{bi})(\frac{a-\mathrm{bi}}{a^2+b^2}) = \frac{a^2+\mathrm{abi}-\mathrm{abi}-\mathrm{abi}^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

En la práctica, las propiedades de estas operaciones permiten operar con los complejos de la misma forma que con los reales, incluso en ecuaciones

Ejemplo

Desarrollar la expresión $[x-(5-2i)][x-(5+2i)]$
Solución:
$[x-(5-2i)][x-(5+2i)] = [(x-5)+2i][(x-5)-2i] = (x-5)^2-(2i)^2 = x^2-10x+25+4 = x^2-10x+29$
por tanto, $x^2-10x+29$.

Ejemplo

Hallar x para que $(2+xi)^2$ sea imaginario puro
Solución:
Empezamos desarrollando la expresión dada:
$(2+xi)^2 = 4+4xi-x^2 = (4-x^2)+4xi$
Para que este complejo sea imaginario puro, su parte real debe ser cero:
$4-x^2 = 0$;$-x^2 = -4$;

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Ha de ser x = 2 o x = -2.

6 Módulo y argumento de un número complejo.

Se llama **módulo** del número complejo $z = a+bi$ al valor

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

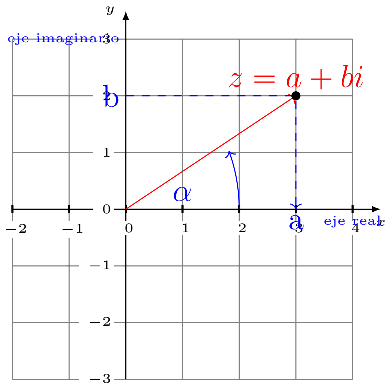
$\sqrt{a^2+b^2}$. **Representa la longitud del vector que representa el complejo**

El argumento representa el ángulo que forma el vector del complejo y la horizontal

Se llama **argumento** del número complejo $z = a + bi$ al valor

$$arg(z) = \alpha = arctg\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) = arctg(\frac{b}{a})$$

El argumento de un complejo es el ángulo que forma el afijo con la horizontal



7 Representación polar

En esta representación,se llama **módulo** del número complejo $z = a + bi$ al valor

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Se llama **argumento** del número complejo $z = a + bi$ al valor :

$$arg(z) = \alpha = arctg\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) = arctg(\frac{b}{a})$$

Forma polar:

$$z = r_\alpha$$

donde $r = |z|$

7.1 Paso de forma polar $\Longleftrightarrow$ forma binómica

- Binómica a Forma polar:$z = r_\alpha$ donde r=|z| y $\alpha = arctg(\frac{b}{a})$
- Polar a Forma Binómica: Si me dan el complejo en forma polar $z = r_\alpha$

$$z = r(\cos\alpha + \text{i}\,\text{sen}\alpha) \;\; \text{donde } \alpha = arcotg(\frac{b}{a})$$

8 Operaciones en forma polar

8.1 Producto de dos números complejos.

Supóngase que tenemos dos complejos en forma polar y queremos hallar el producto y el cociente de ellos.

Sean $z = |z|(cos\alpha + isen\alpha)$ y $w = |w|(cos\beta + isen\beta)$

Podemos realizar la multiplicación de estos números complejos en forma polar de una forma muy fácil

$z \cdot w = |z|(cos\alpha + isen\alpha)|w|(cos\beta + isen\beta) =$

$$= |z||w|[(cos\alpha + isen\alpha){\cdot}(cos\beta + isen\beta)] =$$

$= |z||w|[(cos\alpha{\cdot}cos\beta - sen\alpha{\cdot}sen\beta) + (cos\alpha{\cdot}sen\beta + sen\alpha{\cdot}cos\beta)]$

después de usar un par de identidades trigonométricas muy conocidas, tenemos la formula siguiente:

$$z{\cdot}w = |z||w|(cos(\alpha + \beta) + isen(\alpha + \beta))$$

O lo que es lo mismo $z = r_\alpha$ y $w = r'_\beta$

$$\Rightarrow z.z' = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

"Cuando se multiplican dos complejos, el resultado es un número complejo cuyo módulo es igual al producto de los módulos y cuya amplitud es igual a la suma de las amplitudes".

8.2 Cociente de dos números complejos.

Sean $z = r_\alpha$ **y** $z' = r'_\beta \Rightarrow$

$$\frac{z}{z'} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

"Cuando se dividen dos números complejos, el resultado es un número complejo cuyo módulo es igual al cociente de los módulos y cuya amplitud es igual a la diferencia de las amplitudes".

Ejemplo

Sean $z = 2(cos95° + isen95°)$ y $w = 3(cos26° + isen26°)$. Entonces podemos calcular su producto, usando la fórmula anterior. Luego se tiene:

$z{\cdot}w = 2{\cdot}3(cos(95° + 26°) + isen(95° + 26°))$

$z \cdot w = 6(cos121° + isen121°)$

Si queremos hallar el cociente de z entre w, hacemos:
$\frac{z}{w} = \frac{2}{3}(cos(95° - 26°) - isen(95° - 26°))$
$\frac{z}{w} = \frac{2}{3}(cos69^{\text{o}} + isen69^{\text{o}})$

8.3 Potenciación de Números Complejos.

La fórmula del producto en forma polar puede ser utilizada para hallar la potencia n-ésima de un número complejo. Supongamos que $z = |z|(cos\alpha + isen\alpha)$, y n es un entero positivo, entonces se obtiene:

$$\boxed{z^n = |z|^n(cos(n \cdot \alpha) + isen(n \cdot \alpha))}$$

Esta relación, que se conoce con el nombre de ***Fórmula de De Moivre***, nos da un algoritmo bastante eficiente para hallar la potencia n-ésima de cualquier número complejo en forma polar.

Ejemplo

Sea $z = 2(cos30^{\text{o}} + i\ sen30^{\text{o}})$. Calcule la potencia de orden cinco de este número, es decir, z^5.

Solución. Usando la Fórmula de Moivre

$$z^5 = 2^5(cos(5{\cdot}30^{o}) + isen(5{\cdot}30^{o}))$$

$$z^5 = 32(cos150^{\text{o}} + isen150^{\text{o}})$$

Ejemplo

Calcular z^6, donde $z = 3 + 4\ i$.

Solución.

En primer lugar, llevamos z a la forma polar. Para hallar el módulo hacemos:

$$|z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Por otro lado, el ángulo viene dado por: $\alpha = arctg\ 4/3 = 53.13^{o}$

Por lo tanto, tenemos a z en forma polar:

$$z = 5(cos53.13^{o} + i\ sen53.13^{o})$$

Calculamos ahora z^6 empleando la relación *(2.8)*:

$z^6 = 56(cos(6{\cdot}53.13^{o}) + i\ sen(6{\cdot}53.13^{o}))$

$z^6 = 15625(cos318.78^{o} + i\ sen318.78^{o})$

Finalmente, llevamos este resultado a la forma cartesiana:

$$z^6 = 15625(0.7522 - i\ 0.6590)$$

$$z^6 = 11753{,}12 – 10296{,}12i$$

En polares:

$$z = r_\alpha \Rightarrow z^n = (r_\alpha)^n = (r)^n_{n\alpha}$$

Fórmula de Moivre $z = r.(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha) \Rightarrow z^n = r^n.(\cos n.\alpha + i.\mathrm{sen}.n\alpha)$

8.4 Radicación de un número complejo.

Se pasa de binómica a polar y después se opera de la siguiente manera:
$\sqrt[n]{r_\alpha}$ tiene n raíces que serán, en forma polar:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} (\sqrt[n]{r})_{\frac{\alpha+0\cdot 2\pi}{n}} \\ (\sqrt[n]{r})_{\frac{\alpha+1\cdot 2\pi}{n}} \\ \vdots \\ (\sqrt[n]{r})_{\frac{\alpha+(n-1)\cdot 2\pi}{n}} \end{cases} \qquad (8.4)$$

Ejemplo: Hallar todas las raíces cúbicas de $z = 8(cos30^{o} + isen30^{o})$

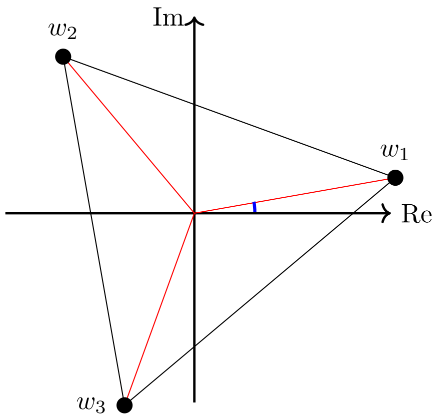
Solución: Si usamos la relación *(8.4)* se tiene:

$$z^{1/3} = 8^{1/3}\left(\cos\frac{30^{o}+2k\pi}{3} + i\ \mathrm{sen}\frac{30^{o}+2k\pi}{3}\right)$$

con k = *0, 1, 2*. Sustituyendo estos valores de k en la expresión de arriba nos da las tres raíces cúbicas:

w_1 = *2(cos10º + i sen10º)* $k = 0$
w_2 = *2(cos130º + i sen130º)* $k = 1$
w_3 = *2(cos250º + i sen250º)* $k = 2$

Si representamos gráficamente estas tres raíces, veremos que se hallan sobre una circunferencia con centro en el origen y radio *2*. Además todas ellas están a la misma distancia de las otras: forman los vértices de un triángulo equilátero.



La gráfica muestra las tres raíces cúbicas del complejo z = 8 (cos 30º + i sen 30º).

Ejemplo

Hallar las seis raíces sextas de la unidad.

Solución:
Tomamos la representación en forma polar de *1*, la cual viene dada por

1 = 1· (cos 0º + i sen 0º)

Luego hallamos las raíces sextas

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\left(\frac{0^{\text{o}} + 2\text{k}\Pi}{6}\right) + \text{isen}\left(\frac{0^{\text{o}} + 2k\mathit{\Pi}}{6}\right)\right)$$

Con k = *0, 1, 2, 3, 4* y *5*.

Estos valores de k nos dan las seis raíces:
w_1 = *1(cos 0º + i sen 0º)* $k = 0$

w_2 = *1(cos 60º + i sen 60º)* $k = 1$

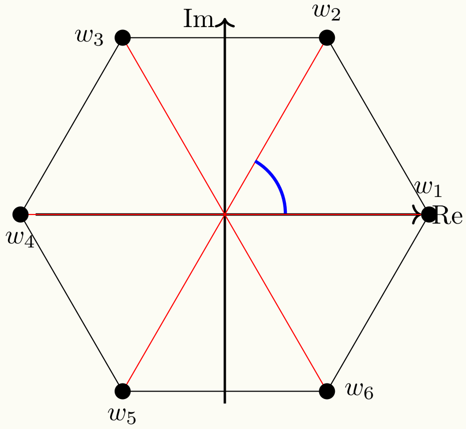
w_3 = *1(cos 120º + i sen 120º)* $k = 2$

w_4 = 1(cos 180º + i sen 180º) k = 3

w_5 = 1(cos 240º + i sen 240º) k = 4

w_6 = 1(cos 300º + i sen 300º) k = 5

Si las graficamos en el plano complejo, vemos que ellas ocupan los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio *1*, como se muestra en la figura .



Muestra las seis raíces sextas de la unidad.

Un hexágono con centro en el origen tiene uno de sus vértices en el punto A(1, 1). Calcula los demás vértices.

Solución:

El punto A(1, 1) es el afijo del número $\sqrt{2}_{45º}$. Cada vértice se obtiene del anterior girándolo 60º. O lo que es lo mismo, multiplicando por 1_{60^o} el número que representa su afijo.

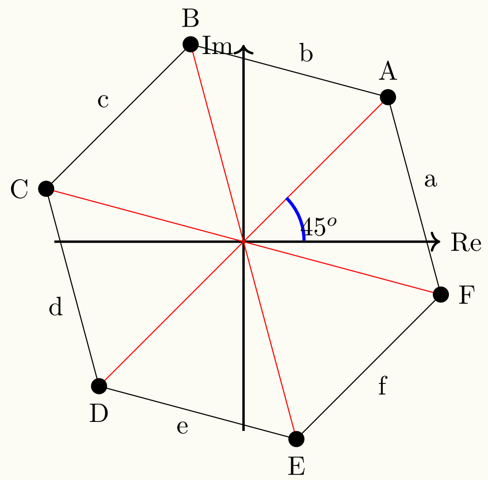
Así B es el afijo del número $\sqrt{2}_{45^o} \cdot 1_{60^o}$=$\sqrt{2}_{105^o}$;

C es el afijo del número $\sqrt{2}_{105^o} \cdot 1_{60^o} = \sqrt{2}_{165^o}$;

D es $\sqrt{2}_{165^o} \cdot 1_{60^o} = \sqrt{2}_{225^o}$;

E es $\sqrt{2}_{225^o} \cdot 1_{60^o} = \sqrt{2}_{285^o}$;

F es $\sqrt{2}_{285^o} \cdot 1_{60^o} = \sqrt{2}_{345^o}$;



Ejemplo

1. **Calcula las raíces cuadradas de $z = 2\pi$ y las raíces cúbicas de $z = 27_{30^\circ}$.**

   Solución:

   Para calcular raíces, hallaremos la raíz del módulo $\sqrt[n]{r_\alpha} = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\alpha}{n}+k\frac{2\pi}{n}}$ y calcularemos los argumentos dando valores a k desde 0 hasta $n-1$.

   Las raíces cuadradas de $z = 2\pi$ tendrán módulo $\sqrt{2}$ y argumentos: $\alpha_1 = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}$; $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + 1\frac{2\pi}{2}\cdot = \frac{3\pi}{2}$

   Por lo tanto, las raíces son $2_{\frac{\pi}{2}}$ y $2_{\frac{3\pi}{2}}$.

   Las raíces cúbicas de $z = 27_{30^\circ}$ tendrán módulo $\sqrt[3]{27} = 3$ y argumentos:

   $$k = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{30^o + 0 \cdot 360^o}{3} = 10^o;$$

   $$k = 1 \Longrightarrow \alpha_2 = \frac{30^o + 360^o \cdot 1}{3} = 130^o;$$

   $$k = 2 \Longrightarrow \alpha_3 = \frac{30^o + 360^o \cdot 2}{3} = 250^o$$

   Las raíces son, por lo tanto, $3_{10^\circ}, 3_{130^\circ}\ y\ 3_{250^\circ}$.