Departamento
de Matemáticas

2023

TRIGONOMETRIA(I)

by S3r4

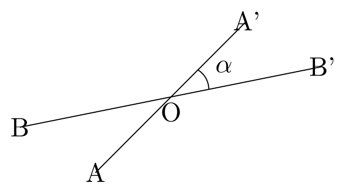
Bachillerato I

IES Dionisio Aguado (Fuenlabrada)

1 TRIGONOMETRÍA (PARTE I)

1 Definición de Ángulo

Ángulo es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que se encuentran en el mismo plano y se intersectan (rectas secantes), el punto de intersección de éstas recibe el nombre de vértice.



AA',BB' rectas secantes en plano
O vértice
OA',OB' lados del ángulo
α ángulo

1 Medida de los ángulos

Para medir ángulos se utilizan las siguientes unidades:

1.2.1. Grado sexagesimal

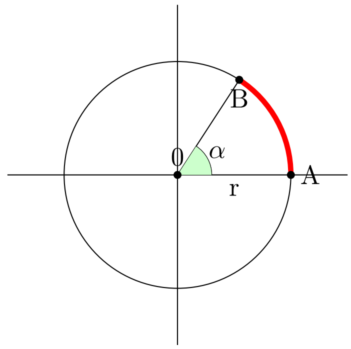
La unidad de medida de los ángulos se llama grado, y resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales, por lo tanto, un ángulo recto mide 90^o o bien de dividir el círculo completo en 360 partes iguales, por lo que el círculo completo diremos que mide 360^o

Uno de los sistemas de medición de los ángulos mas usado se llama **sexagesimal** en el que un grado tiene 60 minutos (') y un minuto tiene 60 segundos (").

Se usa tambien el sistema **centesimal** donde un grado tiene 100 minutos(m) y un minuto tiene 100 segundos(s). Sin embargo , en matemáticas el sistema mas usado es el basado en una medida de ángulos llamada radian.

1.2.2. Radián (rad)

Es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio.



En el gráfico la longitud de AB es igual al radio , entonces el ángulo α mide 1 radian

Como el arco de circunferencia correspondiente a una vuelta mide $2\pi r$, el ángulo correspondiente (360º) mide $\frac{2\pi r}{\cancel{r}} = 2\pi$ radianes.

Por lo tanto $2\pi\ rad = 360^o$;

$\pi\ rad = 180^o$.

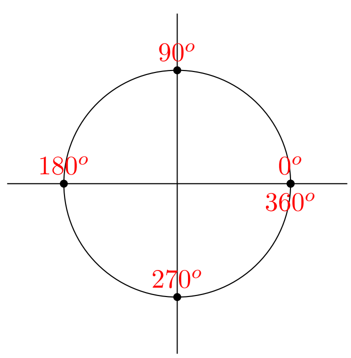
$30^o \Longleftrightarrow$ ¿rad?

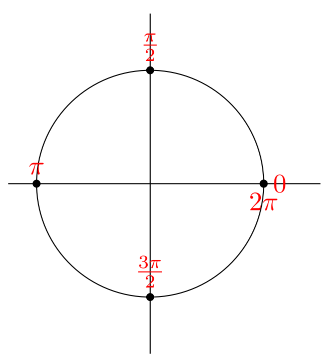
Conversión grados a radianes

$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180^o}{30^o} \Rightarrow \alpha = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}\ rad$

Conversión radianes a grados $\frac{\pi}{3}$ rad $\Longleftrightarrow$ ^{o}

$\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{180^o}{\alpha} \Rightarrow 3\alpha = 180^o \Rightarrow \alpha = \frac{180^o}{3} = 60^o$





El ángulo llano (180^o) mide π radianes y el ángulo recto $\frac{\pi}{2}$.

La medida de un ángulo en radianes es igual a la longitud del arco dividida por el radio:

$$\alpha = \frac{longitud\ del\ arco}{radio}$$

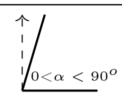
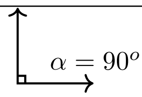
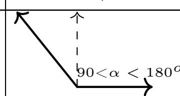
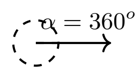
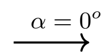
Para pasar de grados a radianes se multiplica por $\frac{\pi}{180}$ y para pasar de radianes a grados por el inverso de este número $\frac{180}{\pi}$.

Un radián es aproximadamente $57,2958^o$.

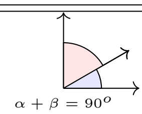
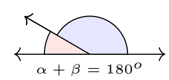
1.2.3. Conversión de grados a radianes y viceversa.

- De x grados a radianes: $\alpha = \frac{x\pi}{180}$
- De radianes a grados:$x = \frac{\alpha \cdot 180}{\pi}$

1 Tipos de Ángulos según su medida

Á. Agudo	Ángulo Recto	Ángulo Obtuso	Ángulo Perigonal	Á. Nulo	Á. Llano
$< 90^o$	$= 90^o$	$> 90^o$	$= 360^o$	$= 0^o$	$= 180^o$
$< \pi/2$	$\pi/2$	$>\pi/2$	2π	0	π
					

1 Tipos de ángulos según la suma de sus medidas

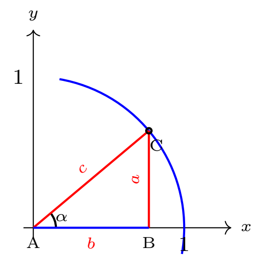
Complementarios	Suplementarios
	
La suma de los ángulos complementarios de de 90^o o de $\frac{\pi}{2}$ radianes	La suma de los ángulos complementarios de de 180^o o de π radianes

Hasta ahora se han considerado los ángulos como la porción del plano comprendida entre dos semirrectas con el origen común. De esta manera, la medida de un ángulo está comprendida entre 0 y 360 grados. A partir de ahora, un ángulo va a ser también considerado como la medida de un giro. Así, los ángulos podrán ser mayores de una vuelta (360^o) y podrán tener dos sentidos: contrario al movimiento del reloj al que asignaremos signo positivo, o según el movimiento del reloj al que asignaremos ángulos negativos.

Representaremos los ángulos sobre una circunferencia centrada en el origen de coordenadas tomando como origen de ángulos el eje OX.

2 Razones trigonométricas

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo α , correspondiente al vértice A, situado en el centro de la circunferencia.



El **seno** (abreviado como sen, o sin por llamarse "sinus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto sobre la hipotenusa,

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c} \tag{1}$$

El **coseno** (abreviado como cos) es la razón entre el cateto adyacente sobre la hipotenusa,

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c} \tag{2}$$

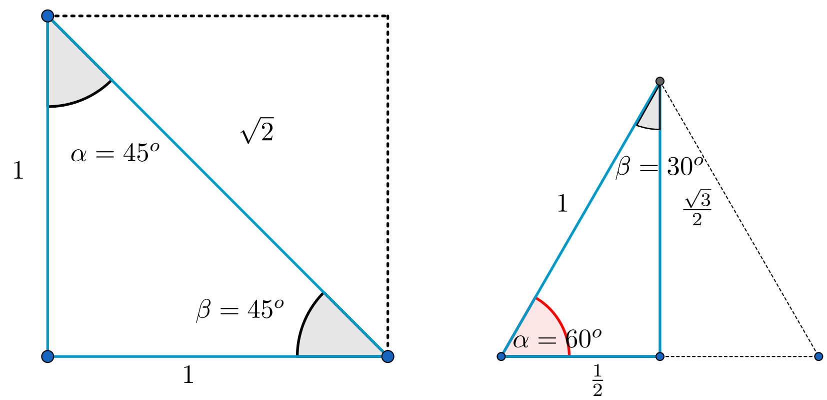
La **tangente** (abreviado como tan o tg) es la razón entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente,

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\quad opuesto}{cateto\quad adyacente} = \frac{a}{b} \tag{3}$$

2 Razones de $30^o, 45^o$ y 60^o

La escuadra es un triángulo rectángulo isósceles. Sus ángulos agudos son ambos iguales a 45^o. El cartabón es un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos son iguales a 30^o y 60^o .

La escuadra puede considerarse como el triángulo rectángulo que se forma cuando un cuadrado se divide en dos triángulos mediante la diagonal. El cartabón es el triángulo resultante de dividir un triángulo equilátero en dos partes iguales mediante una altura. Las proporciones entre las longitudes de los lados de estos triángulos aparecen reflejadas en la figura adjunta.



De la figura se deducen los siguientes valores para las razones trigonométricas de los ángulos de $30^o, 45^o$ y 60^o

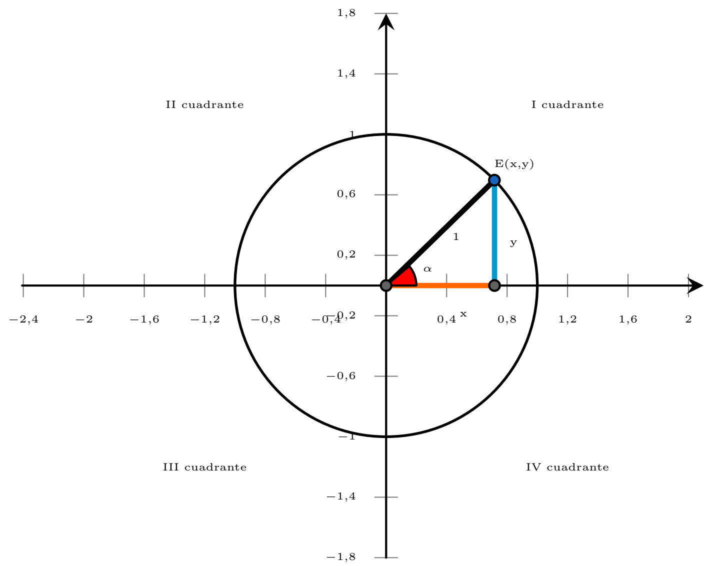
	Fórmula	30^o	45^o	60^o
seno	$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
coseno	$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$tg\ \alpha = \frac{cateto \quad opuesto}{cateto \quad adyacente}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3 Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

3 Circunferencia goniométrica y líneas trigonométricas

Se llama circunferencia goniométrica a aquélla que tiene su centro en el origen de coordenadas y su radio es la unidad.

En la circunferencia goniométrica los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.



Representemos el ángulo α sobre una circunferencia centrada en el origen y tomemos el eje de abscisas como origen de ángulos. A cada ángulo α le corresponde un punto de la circunferencia de coordenadas $E(x, y)$ (extremo del arco). Las razones trigonométricas de α se definen a partir de las coordenadas de ese punto.

$$sen\ \alpha = \frac{ordenadade\ E}{radio} = \frac{y}{r}$$

$$cos\ \alpha = \frac{abscisa\ de\ E}{radio} = \frac{x}{r}$$

$$tg\ \alpha = \frac{ordenada\ de\ E}{abscisa\ de\ E}$$

Como el radio de la circunferencia es igual a 1, el seno es la ordenada y el coseno la abscisa del extremo del arco.

$$sen\ \alpha = y$$

$$cos\ \alpha = x$$

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x}$$

El punto P tiene por coordenadas (x, y) por tanto el valor x está comprendido entre los valores $[-1, 1]$ al igual que los valores posibles de y

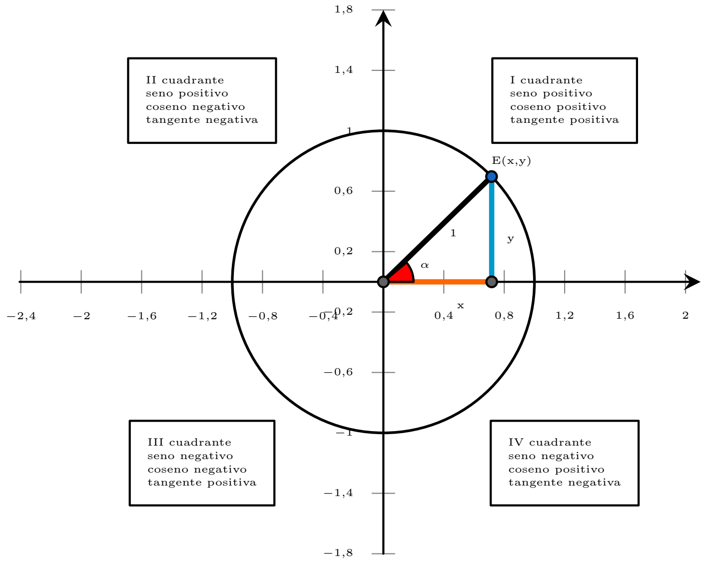
Como $y = sen\ \alpha$

$$-1 \leqslant sen\alpha \leqslant +1$$

Como $cos\ \alpha = x$

$$-1 \leqslant cos\alpha \leqslant +1$$

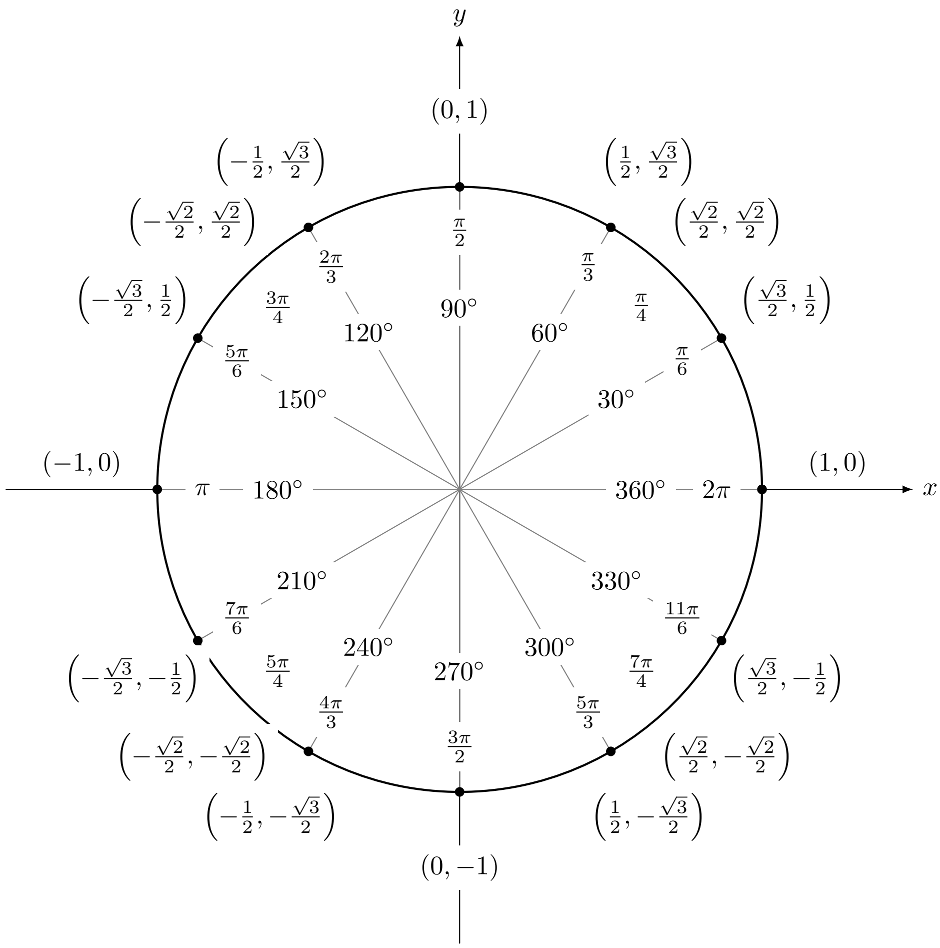
Como el seno, coseno y tangente se han definido a partir de las coordenadas de un punto, pueden ser positivos o negativos dependiendo del cuadrante en que se encuentre el punto. En la figura se han representado los signos de las tres funciones en cada cuadrante.



3 Tabla con R.T. de los ángulos mas frecuentes

	0	$30=\frac{\pi}{6}$	$45=\frac{\pi}{4}$	$60=\frac{\pi}{3}$	$90=\frac{\pi}{2}$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

3 Círculo unidad con (coseno α, seno α) de los ángulos mas frecuentes



3 Razones trigonométricas recíprocas

La Cosecante: (abreviado como csc o cosec) es la razón recíproca de seno, o también su inverso multiplicativo: (el inverso de la razón seno)

$$sen\ \alpha = y$$

$$cos\ \alpha = x$$

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x}$$

$$cosec\ \alpha = \tfrac{1}{sen\ \alpha} = \tfrac{1}{y}$$

La secante (abreviado como sec) es la razón entre la hipotenusa sobre el cateto adyacente (el inverso de la razón coseno)

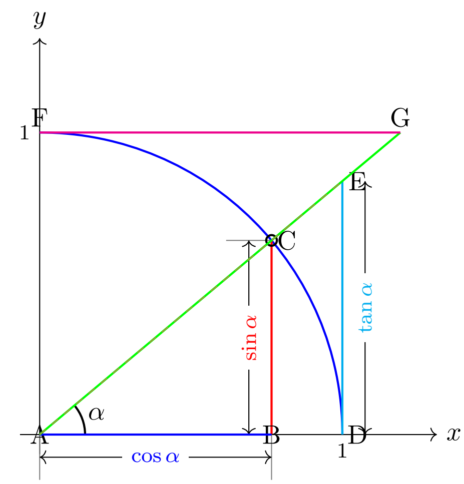
$$sec\ \alpha = \tfrac{1}{cos\ \alpha} = \tfrac{1}{x}$$

La cotangente (abreviado como cotan o ctg) es la razón entre el cateto adyacente sobre el cateto opuesto, $sen\ \alpha = y$

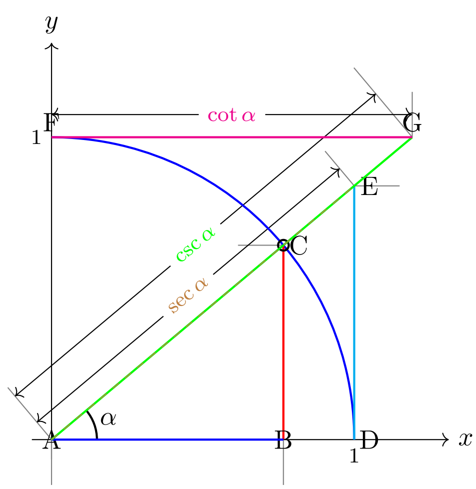
$$cotg\ \alpha = \tfrac{1}{tg\alpha} = \tfrac{x}{y}$$

4 Líneas trigonométricas

Si consideramos radio $r = 1$, entonces se obtiene la circunferencia goniométrica, que nos da inmediatamente el valor de las razones trigonométricas y su representación gráfica como se explica a continuación para un ángulo del primer cuadrante:



- $sen\,\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CB}}{1} = \overline{CB}$
- $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$
- $\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DE}}{1} = \overline{DE}$
- El resto de las líneas



- $cosec\alpha = \frac{1}{\sin\ \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AG}}{1} = \overline{AG}$
  - En el esquema su representación geométrica es: :

$$cosec\ \alpha = \overline{AG}$$

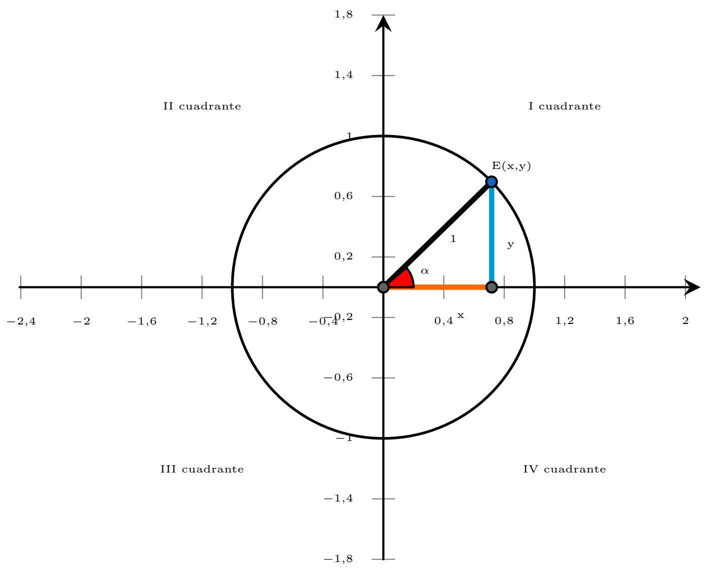
- $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{1} = \overline{AE}$
  - En el esquema su representación geométrica es:

$$\sec\alpha = \overline{AE}$$

- $cotg\ \alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{FG}}{1} = \overline{FG}$
  - En el esquema su representación geométrica es: :

$$\cot\alpha = \overline{FG}$$

5 Identidades y fórmulas de trigonometría



de la figura anterior se tiene que: $\sin(\alpha) = \frac{y}{1}$, $\cos(\alpha) = \frac{x}{1}$ por tanto: :
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{y}{1}\right)^2 + \left(\frac{x}{1}\right)^2 = \frac{y+x}{1} = \frac{1}{1} = 1$

entonces para todo ángulo α, se cumple la identidad Pitagórica:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Es llamada identidad trigonométrica fundamental, y efectuando sencillas operaciones permite encontrar unas identidades más, muy útiles para problemas introductorios del tipo conocido el valor de la función seno, obtenga el valor de las restantes (sin tabla ni calculadora).

Por ejemplo, si se divide ambos miembros de "$\text{sen}^{\mathbf{2}} + \cos^{\mathbf{2}} = 1$" por $cos^2\alpha$, se obtiene:

$$\boxed{\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)}$$

Ahora, dividiendo ambos miembros de la misma expresión por el $\text{sen}^{\mathbf{2}}$, se obtiene:

$$\boxed{cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)}$$

Entonces puede expresarse la función seno según alguna otra conocida:

- $sen(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$ $\qquad sen(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan(x)}}$
- $sen(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\cot(x)}}$ $\qquad sen(x) = \frac{1}{\sec(x)}\sqrt{\sec^2(x) - 1}$

6 Ángulos determinados por los semiejes

Los ejes determinan sobre la circunferencia cuatro puntos que determinan cuatro ángulos que separan los cuadrantes

Estos puntos son:

$(1, 0)[\alpha = 0°]$ $\qquad (0, 1)[\alpha = 90°]$ $\qquad (-1, 0)[\alpha = 180°]$ $\qquad (0, -1)[\alpha = 270°]$

Por tanto, los ángulos

$0°{+}2k\pi,$ $\qquad \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\qquad \pi + 2k\pi,$ $\qquad \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

tambén están determinados por ejes de coordenadas y sus razones trigonométricas se miden a partir de puntos de los ejes.

Por lo tanto

$sen(0 + 2k\pi) = sen0 = 0$ $\qquad cos(2k\pi,) = cos0 = 1$ $\qquad tg(2k\pi,) = tg0 = 0$

$sen(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=sen(\pi/2)=1 \quad \cos(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=cos(\frac{\pi}{2})=0 \quad \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=tg(\frac{\pi}{2})=no$ existe

$sen(\pi+2k\pi)=sen(\pi)=0 \quad cos(\pi+2k\pi)=cos(\pi)=-1 \quad tg(\pi+2k\pi,)=tg(\pi)=0$

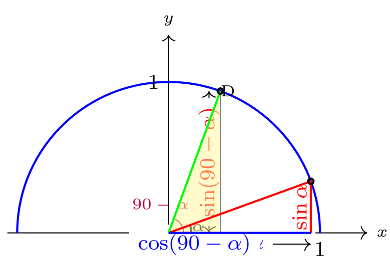
$sen(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)=sen(3\frac{\pi}{2})=-1 \quad cos(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)=cos(\frac{3\pi}{2})=0 \quad tg(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)=tg(3\frac{\pi}{2})=No \quad existe$

7 Reducción al primer cuadrante

Un ángulo puede estar situado en cualquiera de los cuatro cuadrantes de la circunferencia. Los valores de sus correspondientes razones trigonométricas dependen de su posición.

Cuando un ángulo se encuentra situado en el segundo, tercero o cuarto cuadrante siempre es posible relacionarlo con otro del primer cuadrante cuyas líneas trigonométricas tengan los mismos valores absolutos.

7 Relación ángulos complementarios (suman 90^o)



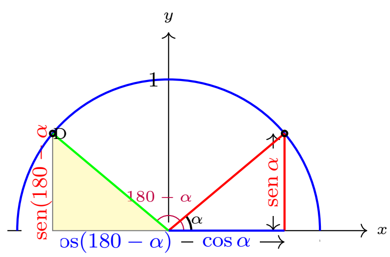
$$cos\ \alpha = sen(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

$$sen\ \alpha = cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

Ejemplo

Si $\alpha = 30^o$ ó $\frac{\pi}{6}$. y
$90^o - \alpha = 90^o - 30^o = 60^o$
$sen(60^o) = sen(\frac{\pi}{2} - \alpha) = cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos(60^o) = cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = sen(\alpha) = \frac{1}{2}$
$tag(60^o) = cotag(30^o) = \sqrt{3}$

7 Relación entre primer y segundo cuadrante(suplementarios)



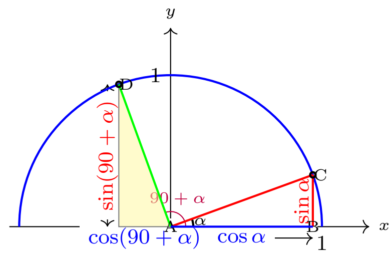
$$cos\ \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$$

$$sen\alpha = sen(\pi - \alpha)$$

Ejemplo

Si $\alpha = 30^o$ ó $\frac{\pi}{6}$. y
$180^o - \alpha = 180^o - 30^o = 150^o$
$sen(150^o) = sen(\pi - \alpha) = sen(\alpha) = \frac{1}{2}$
$cos(150^o) = cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$tag(150^o) = -tag(30^o) = -\sqrt{3}$

7 Relación entre primer cuadrante y giro de $90°$



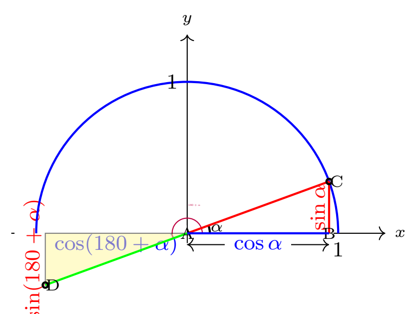
$$cos\alpha = sen(\alpha + \pi/2)$$

$$\sin\alpha = cos(\alpha + \pi/2)$$

Ejemplo

$sen120^o = cos30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\ 120^o = cos\frac{2\pi}{3} = sen30^o = -\frac{1}{2}$
$tg\ 120 = tg\frac{2\pi}{3} = ctg\ 30^o = -\sqrt{3}$

7 Relación entre primer y tercer cuadrante



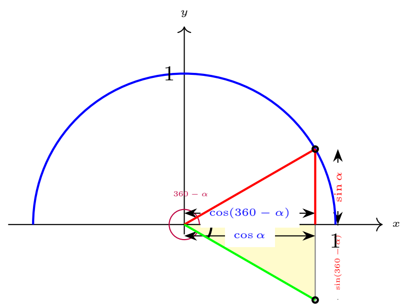
$$cos\alpha = -\cos(\pi + \alpha)$$

$$sin\alpha = -\sin(\pi + \alpha)$$

Ejemplo

$sen210^o = sen(180 + 30^o) = -sen30^o = -\frac{1}{2}$
$cos\ 210^o = -cos(180 + 30^o) = -cos30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$tg\ 210 = tg30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

7 Relación entre primer y cuarto cuadrante



$$cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha) = cos(-\alpha)$$

$$sen\alpha = -sen(2\pi - \alpha) = -sen(-\alpha)$$

Ejemplo

$sen - 30^o = sen(360 - 30^o) = -sen30^o = -\frac{1}{2}$
$cos\ \ -30^o = cos(360 - 30^o) = cos30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$tg\ \ -30 = -tg30 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

8 Aplicación de la Trigonometría

8 Resolución de triángulos

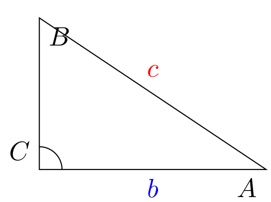
Resolver un triángulo es hallar uno o más elementos desconocidos a partir de los elementos (lados y ángulos) conocidos.

8.1.1. Resolución de triángulos rectángulos

Preguntas clave para resolver un triángulo: ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es el elemento desconocido? ¿Qué razón trigonométrica liga los elementos conocidos y desconocidos?

Elemento conocido	¿Cómo se calculan los demás?
CASO I : Dos lados	El tercer lado se calcula mediante el teorema de Pitágoras. El ángulo que forman los dos lados conocidos se halla a partir de la razón trigonométrica que los relaciona
CASO II Un lado y un ángulo	Otro lado se calcula mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos. El otro ángulo agudo es el complementario del que conocemos.

8.1.2. Ejercicios resueltos



- En un triángulo se conocen un cateto, $a = 11cm$, y la hipotenusa, $c = 20cm$. Hallar los demás elementos.
  - El otro cateto: $b = \sqrt{20^2 - 11^2} = 16,7cm$
  - Un ángulo: $senA = 0,55 \;\; \hat{A} = 33°22$’

- El otro ángulo agudo: $B = 90° - A = 56°38'$

- En un triángulo rectángulo del que se conocen $B = 50°$ y un cateto $a = 15cm$, hallar los demás elementos.
  - tgB= > b = a tg50º = 15 tg 50° = 17,88 cm cos B = A = 90° - B = 90° - 50° = 40° 3.2.

8 Resultados útiles

Los siguientes resultados, ligados a la resolución de triángulos rectángulos, aparecen con tanta frecuencia que es conveniente memorizarlos:

8.2.1. Proyección de un segmento

En el triángulo ABC, AC= AB A'B' = AB La longitud de la proyección de un segmento sobre una recta es igual al producto de la longitud del segmento por el coseno del ángulo que forman.

8.2.2. 3.2.2. Altura de un triángulo

En el triángulo rectángulo de la izquierda, La altura de un triángulo es igual al producto de uno de sus lados laterales por el seno del ángulo que dicho lado forma con la base.

8.2.3. 3.2.3. Área de un triángulo

Área = El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

8 Estrategia de la altura para resolver problemas de triángulos oblicuángulos

Cualquier triángulo no rectángulo puede ser resuelto, aplicando los m todos de resolución de los triángulos rectángulos, mediante la estrategia de la altura.

Consiste en elegir adecuadamente una de sus alturas, de modo que, al trazarla, se obtengan dos triángulos rectángulos resolubles con los datos que se tienen.

Ejemplo 1

Estamos en A. Conocemos las distancias de A a C (b = 3 800 m) de C a B (a = 5 600 m). Queremos calcular la distancia de A a (AB = c). Para ello medimos el ángulo Á = 49°. Y, sobre el papel, trazamos altura h y nombramos x e y a las proyecciones de a y b sobre • x = b cos Á = 3 800 cos 49° = 2 493 m h = b sen = 3 800 sen 49° = 2 868 m Conociendo h y a calculamos y (teorema de Pitágoras):y = a2 - h2 = 6002 - 2 8682 = 4 810 m

Ejemplo 2

Estamos en P, situado en un llano. Queremos hallar la altura de montaña, M. Para ello medimos el ángulo P que forma la visual la montaña con la horizontal (P = 29°). Avanzamos 300 m hacia Ia montaña y volvemos a medir el ángulo (Q = 32°).

En MM'Q, tg 32° =h/x --> h = x tg 32° En MM'P, tg 29° = h = (x + 300) tg 29° x tg 32° = (x + 300) tg 29°x(tg 32° - tg 29°) = 300 tg 29°

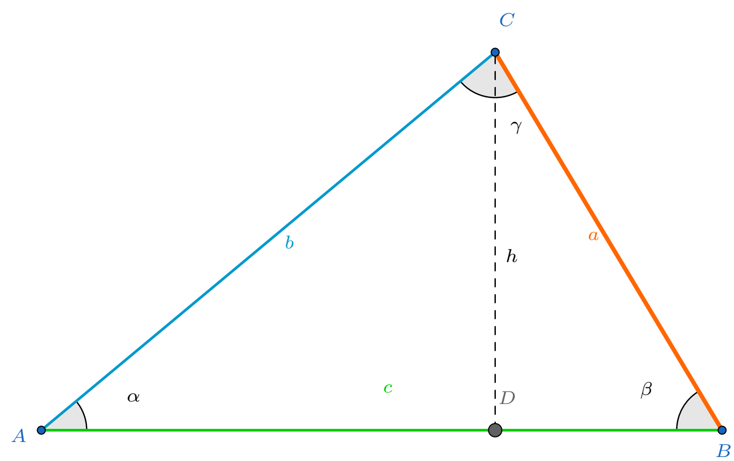
Ahora volvemos a h: h = x tg 32° = 2 357 tg 32° = 1 473 m Hemos obtenido que la altura de la montaña es de 1473 m.

8 Solución de triángulos cualesquiera

Vamos a obtener unas fórmulas que nos permitirán resolver directamente triángulos cualesquiera, sin necesidad de utilizar cada vez la estrategia de la altura para descomponerlos en dos triángulos rectángulos.

8.4.1. Teorema de los senos

En un triángulo cualquiera ABC de lados a,b,c se cumplen las siguientes igualdades

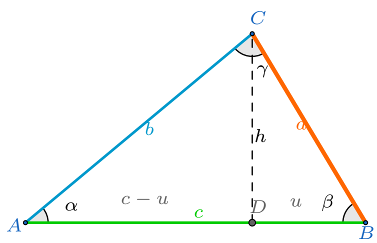


$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

• Ejemplo De un triángulo sabemos que: a = 6 m, B = 45° y C = 105°. Calcula los restantes elementos. Sol: A=180º-45º=30º

8.4.2. Teorema de los cosenos

En un triángulo cualquiera ABC de lados a,b,c se cumplen las siguientes igualdades



Primer caso: c es adyacente a dos ángulos agudos.

Consideremos la figura adjunta. Por el teorema de Pitágoras, la longitud c es calculada así:$a^2 = h^2 + u^2$,

Pero, la longitud h también se calcula así: $h^2 = b^2 - (a - u)^2$,

Sumando ambas ecuaciones y luego simplificando obtenemos:

$a^2 = b^2 - c^2 + 2cu$,(1)

Por la definición de coseno, se tiene:$\cos \alpha = \dfrac{c - u}{b}$

y por lo tanto:

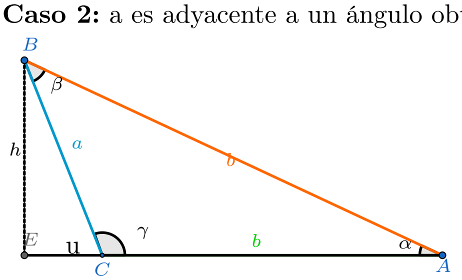
$u = c - b \cos \alpha$

Sustituimos el valor de u en la ecuación para a^2, concluyendo que:

$a^2 = b^2 - c^2 - 2c(c - bcos\alpha) \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

con lo que concluye la prueba del primer caso.

Caso 2: a es adyacente a un ángulo obtuso



Consideremos la figura adjunta. El teorema de Pitágoras establece nuevamente $a^2 = h^2 + u^2$ pero en este caso $h^2 = c^2 - (b + u)^2$.

Combinando ambas ecuaciones obtenemos $a^2 = u^2 + c^2 - b^2 - 2bu - u^2$ y de este modo:

$a^2 = c^2 - b^2 - 2bu,.$

De la definición de coseno, se tiene $cos\alpha\ = \frac{b+u}{c}$ y por tanto:

$u = c\ \cos\gamma - b\$,.$

Sustituimos en la expresión para$a^2 = c^2 - b^2 - 2b(c\cos\alpha\ - b)$, concluyendo nuevamente

$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\ \cos\alpha\,.$

Es importante notar, que si se considera a u como un segmento dirigido, entonces sólo hay un caso y las dos demostraciones se convierten en la misma.

Ejemplo El radio de una circunferencia mide 25 m. Calcula el ángulo que formarán las tangentes a dicha circunferencia, trazadas por los extremos de una cuerda de longitud 36 m. O=92º6'32" En el cuadrilátero AOBT, los ángulo A y B son rectos. O+T=180ºT=190º-O=107º53'27"

8 Resultados interesantes

El área de un triángulo es la mitad del producto de una base por la altura correspondiente.

$\acute{A}rea = \frac{1}{2} \times Base \times Altura$

Conociendo dos lados y el ángulo que forman ,el área de un triángulo es el semiproducto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

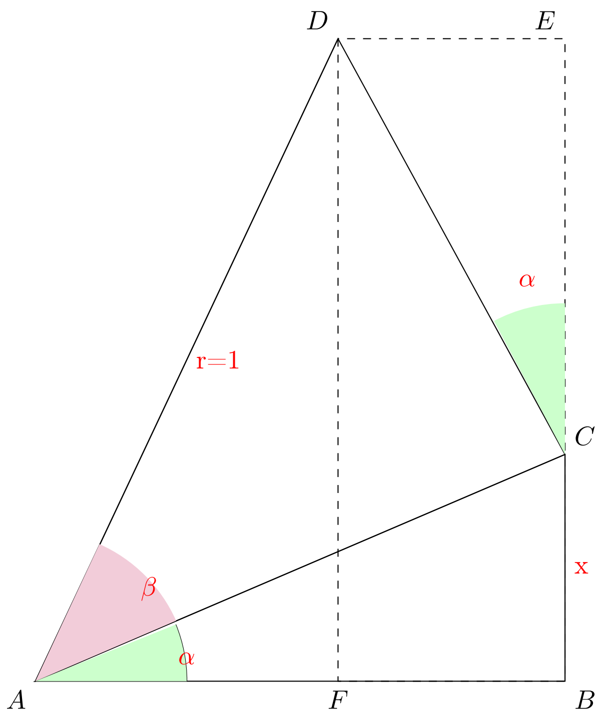
$\acute{A}rea = \frac{1}{2} lado1{\cdot}lado2 \cdot sin(\theta)$

El área de un triángulo es el cociente entre el producto de sus lados y cuatro veces el radio de su circunferencia circunscrita.

El área de un triángulo es igual al producto del radio de la circunferencia inscrita por su semiperímetro. S=r.p Fórmula de Herón: donde p es el semiperímetro

8 Razones trigonométricas de la ± de dos ángulos.

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\ \alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot sen\beta$$



Demostración:

Usamos dos triángulo rectángulos con ángulos α yβ .

Trazando triángulos semejantes podemos suponer que R = 1

BAC que tiene un ángulo α . CAD es β

La hipotenusa del triángulo CAD es AD = R = 1

Por consiguiente: $\frac{CD}{AD} = \frac{CD}{1} = CD = sen\beta$; $\frac{AC}{AD} = \frac{AC}{1} = AC = cos\beta$

El triángulo AFD, rectángulo, se verifica:$sen(\alpha + \beta) = DF = BE$

Por otra parte: $BE = BC + CE$

En el triángulo CED: $CE = CD \cdot cos\alpha = sen\beta \cdot cos\alpha$

Observamos en el dibujo que los triángulos ABC y CED son semejantes, por tener sus ángulos iguales.

En el triángulo rectángulo ABC: $BC = AC \cdot sen\alpha = cos\beta \cdot sen\alpha$

Luego, hemos obtenido: $sen(\alpha+\beta) = DF = BE = BC+CE = sen\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta$ Con esto demostramos la fórmula del seno de una suma.

Para la fórmula del coseno, procedemos de la misma manera usando el segmento

$AB = AF + FB$

El triángulo AFD, rectángulo, se verifica:$cos(\alpha + \beta) = DF = AB - FB$

En el triángulo ABC: $AB = AC \cdot cos\alpha = cos\beta \cdot cos\alpha$
En el triángulo CED: $DE = DC \cdot sen\alpha = sen\beta \cdot sen\alpha$
Luego $AF = \boldsymbol{AB{-}}FB = cos\beta \cdot cos\alpha - sen\beta \cdot sen\alpha$

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\beta \cdot \sin\alpha$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

8 Razones trigonométricas del ángulo doble.

Haciendo $\beta = \alpha$ en la fórmuladel ángulo doble
$sen(\alpha + \alpha) = sen(2\alpha) = sen\alpha \cdot cos\alpha + cos\alpha \cdot sen\alpha = 2sen\alpha cos\alpha$
$\cos(\alpha + \alpha) = cos(2\alpha) = cos\alpha \cdot cos\alpha - sen\alpha \cdot sen\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$

$$sen\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

8 Razones trigonomértricas del ángulo mitad.

Usando adecuadamente las fórmulas del ángulo doble.
α será el ángulo mitad de 2α .Luego llamando α a 2α y $\alpha/2$ a α
$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} - (1 - cos^2\frac{\alpha}{2}) = 2cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

Despejando

$1 + \cos\alpha = 2cos^2\alpha \Rightarrow cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

8 Fórmulas de transformación de suma producto.

$$sen\alpha + sen\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$sen\alpha - sen\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2sen(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot sen(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

Demostremos alguna de estas fórmula y veamos de donde salen. Usando als fórmulas de sen de una suma de ángulos

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cdot cos\beta + cos\alpha\cdot sen\beta$$

$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cdot cos\beta - cos\alpha\cdot sen\beta$$

Sumando igualdades

$sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cdot cos\beta + \cancel{cos\alpha\cdot sen\beta} + sen\alpha\cdot cos\beta - \cancel{cos\alpha\cdot sen\beta}=2sen\alpha cos\beta$

$\Rightarrow sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)=2sen\alpha cos\beta$

Transformemos:

$\alpha+\beta=a \qquad \alpha-\beta=b$

Entonces, sumando y restando ambas igualdades: $\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=a \\ \\ \alpha-\beta=b \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{ll} 2\alpha & =a+b \\ \\ 2\beta & =a-b \end{array} \Rightarrow$

$\left\{\begin{array}{lll} \alpha & = & \frac{a+b}{2} \\ \\ \beta & = & \frac{a-b}{2} \end{array}\right.$ Y sustituyendo obtenemos la fórmula:

$$sen(a)+sen(b)=2sen\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2}$$

Podemos hacer los mismo, usando la misma técnica para hallar las otras fórmulas.

8 Fórmulas de transformaciones de productos suma.

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

Veamos como se obtiene la fórmula:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

Usamos para ello

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\sin\alpha$$

Restando las igualdades obtenemos:

$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\sin\beta\cdot\sin\alpha-\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\sin\beta\cdot\sin\alpha{=}{-}2sen\alpha sen\beta$

Despajando

$\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{-2}=sen\alpha sen\beta\Rightarrow sen\alpha sen\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{2}+\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2}$

Las otras tres fórmulas se obtienen de manera análoga.