Geometría Analítica

Teoría y ejemplos

Bachillerato 1º

2023

BY S3R4

1 ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO.

1.1 Sistemas de referencia

Un sistema de referencia para el plano consiste en una terna $R = \{O, u_1, u_2\}$ donde O es un punto cualquiera y $\{u_1, u_2\}$ es una base, no necesariamente ortonormal, aunque si $\{u_1, u_2\}$ es ortonormal (unitaria y ortogonal) todos los cálculos son más fáciles.

En este tema suponemos la base ortonormal, por tanto la referencia será $R = \{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$

Los vectores de la base son perpendiculares y unitarios. Se representan por las letras. $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ los vectores de la base

Las coordenadas de estos vectores de la base en la propia base son

$\overrightarrow{i} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} \longrightarrow \overrightarrow{i} = (1, 0)$

$\overrightarrow{j} = 0\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j} \longrightarrow \overrightarrow{j} = (0, 1)$

Las rectas OX, OY se llaman ejes de coordenadas o ejes coordenados cartesianos.

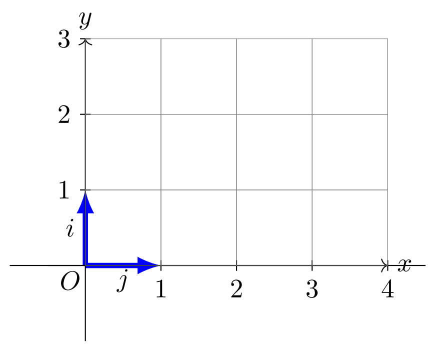


Figura 1: Sistema de referencia

La recta OX se llama **recta de abcisas** y la recta OY la **recta de ordenadas**

1.2 COORDENADAS DE UN PUNTO

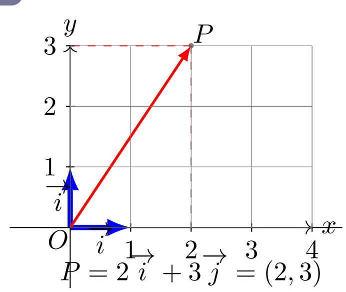


Figura 2: Coordenadas de P

Si fijamos una base ortonormal en O, tendremos un sistema de referencia respecto al cual fijar las coordenadas de los puntos del plano

Se llaman coordenadas del punto P a las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ respecta a la base

$$P(x, y) = \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

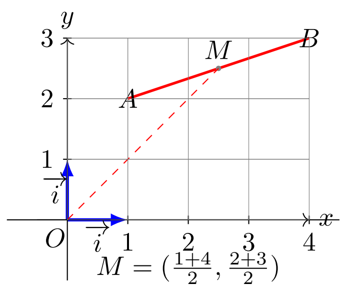
En la figura el punto P tiene asociado el vector OP y OP se escribe en la base $B = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ como

$$P(x,y) = \overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$$

Por tanto las coordenadas de es punto P son $P(2,3)$

1.3 COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.

Dado el segmento de extremos $A = (x_1, y_2)$ y $B(x_2, y_2)$. Las coordenadas del punto medio del segmento AB son $M = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$



1.3.1 SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A OTRO

A' es el simétrico de A respecto a P si P es el punto medio de AA'

1.3.2 CONDICIÓN PARA QUÉ TRES PUNTOS ESTÉN ALINEADOS

Los puntos $A = (x_1, y_2)$ y $B(x_2, y_2)$ $C = (x_3, y_3)$ están alineados siempre que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tengan la misma dirección. Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales.

$\overrightarrow{AC} = (x_3, y_3) - (x_1, y_1) = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$
$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$$\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}\ paralelos \Leftrightarrow (x_3 - x_1, y_3 - y_1) = k(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Leftrightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

Ejemplo

$A = (1,2)$ y $B(3,5)$ $C = (5,8)$ están alineados ya que $\frac{3}{2} = \frac{5-2}{3-1} = \frac{8-2}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, es decir

$$\overrightarrow{AB} = (3,5) - (1,2) = (2,3)$$

y

$$\overrightarrow{AC} = (5,8) - (1,2) = (4,6)$$

son paralelos o proporcionales

1.4 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Dados dos puntos A y B La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que los une:

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos de un plano cartesiano, entonces la distancia entre dichos puntos es calculable de la siguiente manera:

$$d(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo

$A = (1,2)$ y $B(3,5)$ .La distancias entre A y B es

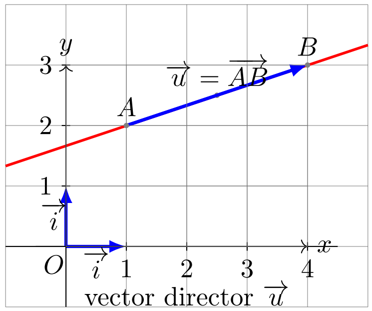
$$d(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

2 VECTOR DIRECTOR DE UNA RECTA

Un vector director es, como bien lo indica su nombre, un vector que da la dirección de una recta.

Cada recta tiene infinitos vectores de dirección. Todos ellos son proporcionales o paralelos.



2.1 DISTINTAS FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA.

Todo punto X(x,y) de la recta tiene mismas coordenadas que el vector OX.

El vector $\overrightarrow{OX}$ se puede expresar como suma del vector $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$, con A punto de la recta.

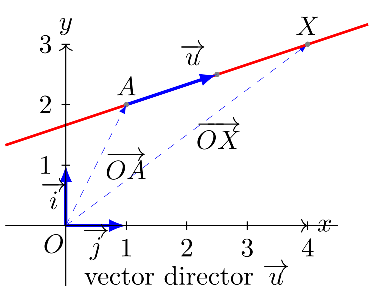
Pero $\overrightarrow{AX}$ es proporcional a $\overrightarrow{u}$ que es el vector director de la recta por tanto $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Veamos un ejemplo:

Para hallar la ecuación de una recta necesitamos un punto por el que la recta pase, $A = (x_0, y_0)$ y un vector contenido en ella que nos indique su dirección llamado vector director $\overrightarrow{u}$.

Por tanto

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{u}$$



2.1.1 Ecuación vectorial

Usando los vectores como hemos visto antes, podemos categorizar todos los puntos X de la recta mediante la ecuación:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{u}$$

Pasando a coordenadas:

$$\overrightarrow{OX} = (x, y) = (x_o, y_o) + \lambda(u_1, u_2)$$

o bien

$$(x, y) - (x_o, y_o) = \lambda(u_1, u_2)$$

Dando diferentes valores al parámetro λ obtenemos diferentes puntos de la recta.

2.1.2 Ecuación paramétrica de la recta:

La ecuación en paramétricas se obtiene separando las dos coordenadas:
recta

$$recta\ r \equiv \begin{cases} x = & x_o + \lambda u_1 \\ y = & y_o + \lambda u_2 \end{cases}$$

Ejemplo

Expresar la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 5)$ en forma vectorial y paramétrica. Obtener dos puntos más de la recta:
Solución:
Tomemos uno de los puntos como punto de la recta, por ejemplo$A : (1, 2)$
El vector director es el vector que forman los puntos A y $B \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, 3)$
La ecuación vectorial será

$$(x, y) - (2, 1) = \lambda(2, 3)$$

$$(x - 2, y - 1) = \lambda(2, 3)$$

La ecuación paramétrica será

$$r = \begin{cases} x = & 2 + \lambda 2 \\ y = & 1 + \lambda 3 \end{cases}$$

Puntos de la recta dando valores a λ

- $\lambda = 0 \longrightarrow (x, y) = (1, 2)$ que es A

- $\lambda = 1 \longrightarrow (x,y) = (3,5)$que es B
    - $\lambda = ,5 \longrightarrow (x,y) = (2,1) + 0{,}5 \cdot (2,3) = (3,2{,}5)$
- $\lambda = -1 \longrightarrow (x,y) = (2,1) + (-1) \cdot (2,3) = (0,-2)$

2.1.3 Ecuación continua de la recta

En las dos ecuaciones paramétricas de $r \equiv \begin{cases} x = & x_o + \lambda u_1 \\ y = & y_o + \lambda u_2 \end{cases}$ lo que vamos a hacer es eliminar la λ del sistema y relacionar "y" con "x" como si fuera una función.

El vector director es $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$

$\begin{matrix} x- & x_o = \lambda u_1 \\ y- & y_o = \lambda u_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{x-x_o}{u_1} & = \lambda \\ \frac{y-y_o}{u_2} & = \lambda \end{matrix}$. Así pues la ecuación será

$$\frac{x-x_o}{u_1} = \frac{y-y_o}{u_2}$$

Nota:

Si $u_1 = 0$ entonces es una recta paralela al eje $OY \longrightarrow r : x = x_0$

Si $u_2 = 0$ entones es una recta paralela al eje $OX \longrightarrow r : y = y_0$

2.1.4 Ecuación general o implicita de la recta

Para hallar esta ecuación a partir de la ecuación continua quitamos denominadores de la ecuación y ordenamos todos los términos en el mismo lado de la igualdad

$\frac{x-x_o}{u_1} = \frac{y-y_o}{u_2} \Rightarrow u_2 x - u_2 x_0 = u_1 y - u_1 y_0$

Pasando todo a un miembro de la expresión

$$u_2 x - u_1 y + (u_1 y_o - u_2 x_0) = 0$$

Llamando $A = u_2$,$B = u_1$; $C = u_1 y_o - u_2 x_0$ tendríamos la ecuación en su forma general:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Entonces,como vemos, la ecuación general de una recta está dada por la expresión $Ax + By + C = 0$ con $A, B, C \in \mathbb{R}$ y $B \neq 0$, donde $\dfrac{-A}{B} = \dfrac{u_2}{u_1}$ representa la pendiente de la recta y $\dfrac{-C}{B}$ señala la ordenada en el origen, datos suficientes para representar cualquier recta en el plano cartesiano.

Si $B = 0$ estamos ante una recta paralela al eje y

El vector director es $u = (u_1, u_2) = (B, -A)$.

Ejemplo

Halla la ecuación implicita de la recta que pasa por $A(2,4)$ y $B(0,-3)$
Hallamos el vector director $u = (0-2, -3-4) = (-2, -7)$ ó $u = (2,7)$ por ser proporcional. Se puede usar cualquiera de los dos.
Entonces la ecuación continua es $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2}$
Por lo que

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{-7}$$

Ahora quitamos denominadores

$$-7(x-2) = -2(y-4)$$

Por lo que

$$-7x + 14 = -2y + 8 \implies \boxed{-7x + 2y + 6 = 0} Ec\ implicita \quad o\ general$$

2.1.5 Ecuación explicita

Este tipo de ecuación se obtiene despejando la y de la ecuación general o de la continua, quedando una forma del tipo

$$y = mx + n$$

donde $m = pendiente = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2^{\underline{a}} coordenada\ vector \quad director}{1^{\underline{a}} coordenada\ vector \quad director}$

En efecto, si despejamos de $Ax + By + C = 0$ la variable y

$y = \frac{-Ax-C}{B} \implies y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$

Llamando $m = \frac{-A}{B}$ sabemos que $A = u_2$,$B = u_1$, entonces $m = \frac{u_2}{u_1}$ pendiente de la recta

Llamando $n = \frac{-C}{B}$, tendremos

$$\boxed{y = mx + n}$$

El valor de n se llama ordenada en el origen pues el valor de y cuando $x = 0$. Así la recta r pasará por el punto $(0, n)$.

Ejemplo

Halla la ecuación explicita de la recta que pasa por $A(2,4)$ y $B(0,-3)$
Hallamos el vector director $u = (0-2, -3-4) = (-2,-7)$ ó $u = (2,7)$ por ser proporcional. Se puede usar cualquiera de los dos.
Entonces la ecuación continua es $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2}$
Por lo que

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{-7}$$

Ahora quitamos denominadores

$$-7(x-2) = -2(y-4)$$

Por lo que

$$-7x + 14 = -2y + 8 \implies \boxed{-7x + 2y + 6 = 0}$$

Despejando y tenemos la ecuación explicita

$$y = \frac{7}{2}x - \frac{6}{2}$$

La pendiente es $m = \frac{7}{2}$ y la ordenada en el origen es $n = \frac{-6}{2}$

2.1.6 Euación punto-pendiente

Se llama así porque se obtiene fácilmente a partir de conocer un punto de la recta $P(x_o, y_o)$ y la pendiente m del vector de dirección o de las direcciones paralelas.

$m = \frac{u_2}{u_1}$ donde $u = (u_1, u_2)$ es el vector director de la recta.

La ecuación en esta forma dado $P = (x_0, y_0)$,, y una pendiente m es :

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

donde m es la pendiente =tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas.

Este tipo de ecuación puede deducirse facilmente a partir de $\frac{x-x_o}{u_1} = \frac{y-y_o}{u_2}$.

Si quitamos el denominador u_2 de la parte derecha de la ecuación continua tendré

$\frac{x-x_o}{u_1} = \frac{y-y_o}{u_2} \Longrightarrow u_2(\frac{x-x_o}{u_1}) = y-y_o \Rightarrow$

$$\frac{u_2}{u_1}(x-x_o) = y-y_o \Rightarrow \boxed{y-y_o = \frac{u_2}{u_1}(x-x_o) \Rightarrow}$$

Llamando $m = \frac{u_2}{u_1}$(pendiente del vector de dirección o de larecta)

$$\boxed{y-y_0 = m(x-x_0)}$$

Ejemplo

La ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (3, -5)$ y que tiene una pendiente de $m = 6$ es:

$y-y_0 = m(x-x_0)$

$y-3 = 6(x-(-5))$; $y-3 = 6(x+5)$; $y-3 = 6x+30$

$y-6x-3-30 = 0$

$y-6x-33 = 0$ (Ec .Implicita)

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (2, -4)$ y que tiene una pendiente de $m = -\frac{1}{3}$:

Al sustituir los datos en la ecuación, resulta lo siguiente:

$$y-y_o = m(x-x_o)$$

$y-(-4) = \frac{-1}{3}(x-2) \Longrightarrow 3(y+4) = -1(x-2) \Longrightarrow 3y+12 = -x+2 \Longrightarrow$

$x+3y+12 = 2$

$$x+3y+10 = 0 (Ec.\ Implicita)$$

2.1.7 Ecuación segmentaria

Si se plantea como problema encontrar la ecuación de una recta, conocidos a y b (la abscisa y ordenada al origen), se conocen dos puntos de la recta los cuales son los siguientes:B$(a, 0)$,A$(0, b)$

El vector director será $\overrightarrow{u} = (a, 0) - (0, b) = (a, -b)$

Con estos puntos se puede encontrar dicha ecuación, pero primero se debe calcular la pendiente:

El vector director será $\overrightarrow{u} = (a, 0) - (0, b) = (a, -b)$, $m = \left(\dfrac{0-b}{a-0}\right) = \dfrac{-b}{a}$

Después se sustituye en la ecuación punto-pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, usando cualquiera de los dos puntos, en este caso $(a, 0)$:

$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

y dividiendo toda la ecuación entre el término independiente ab:

$$\frac{\cancel{b}x}{a\cancel{b}} + \frac{\cancel{a}y}{\cancel{a}b} = \frac{\cancel{ab}}{\cancel{ab}}$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Se obtiene la ecuación de la recta en su forma segmentaria. Esta ecuación se suele utilizar para obtener la ecuación de una recta de la que se conocen sus intersecciones con los ejes y cuando, a partir de la ecuación de una recta, se desean conocer los puntos donde dicha recta interseca a los ejes.

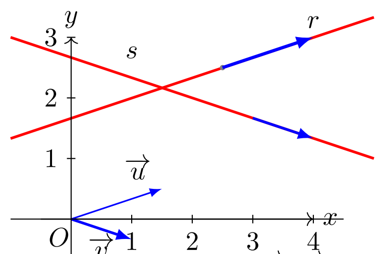
3 Posiciones relativas de dos rectas.

En este apartado veremos las posiciones relativas entre dos rectas. Podemos estudiar estas posiciones con varios métodos

3.1 1^{er} Método: Atendiendo a los vectores directores

Dadas dos rectas r y s de ecuaciones generales $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$, se pueden presentar las siguientes posiciones:

•**Secantes: se cortan en un punto**



vectores director $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Como $u = (u_1, u_2) = (B, -A)$. y $v = (v_1, v_2) = (B', -A')$. son los vectores de las dos rectas y estos vectores **NO son proporcionales** se cumple la condición suficiente y necesaria para que se corten

$$\frac{A}{B} \neq \frac{A'}{B'} \Longleftrightarrow rectas\ se\quad cortan\quad en\quad un\, punto$$

El punto de corte será la solución del sistema compatible determinado

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Estudia las posiciones relativas del siguiente par de rectas:

$$\begin{cases} r \equiv 2x + 3y - 1 = 0 \\ s \equiv -12x + 8y - 5 = 0 \end{cases}$$

Solución

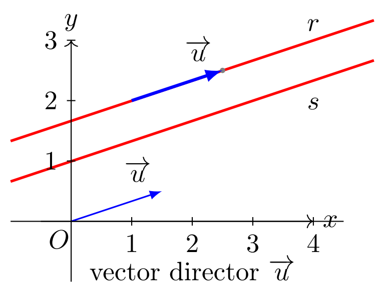
$\begin{matrix} A=2; B=3; C=-1 \\ A'=-12; B=8; C=-5 \end{matrix}$. Los vectores directores son $u=(3,2)$ y $v=(8,-12)$

Como $\frac{2}{-8} \neq \frac{3}{12}\frac{-1}{-5}$ Las rectas son secantes, se cortan en la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ -12x+8y-5=0 \end{cases} \xrightarrow{f_2+6f_1\to f_2} \begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ 26y-11=0 \end{cases} \quad y=\frac{11}{26} \to x=\frac{-7}{52}$$

Se cortan en $P(\frac{11}{26}, \frac{-7}{52})$

•Paralelas: si no tienen ningún punto en común (misma pendiente, $=$ vector director)



Como $u=(u_1,u_2)=(B,-A)$. y $v=(v_1,v_2)=(B',-A')$.son los vectores de las dos rectas y estos vectores son proporcionales se cumple que $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$ pero como no son la misma

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}\neq\frac{C}{C'}$$

Esta es la condición de paralelismo de dos recta basadas en ecuaciones generales

Ejemplo

Las rectas determinadas por $r: x+2y-5=0$ **y** $s: 3x+6y-10=0$ **son paralelas**

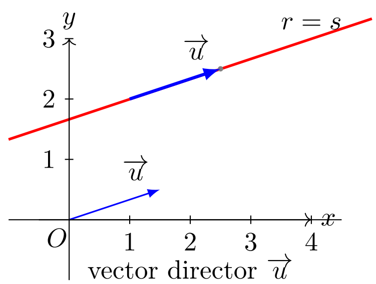
En efecto, ningún punto de r es de la recta s ya que ningún punto de r soluciona la ecuación de s

$A=1; B=2; C=-5$ y $A'=3; B'=6; C=-10$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}\neq\frac{-5}{-10}$$

No hay solución del sistema $\begin{cases} 1x+2y-5=0 \\ 2x+6y-10=0 \end{cases}$. Para comprobarlo intentamos solucionarlo $\begin{cases} 1x+2y-5=0 \\ 2x+6y-10=0 \end{cases} \Rightarrow \xrightarrow{f_2-2f_1\to f_2} \begin{matrix} 1x+2y-5=0 \\ 0x+0y+20=0 \end{matrix} \Rightarrow 20=0$ que resulta un sistema incompatible

•Coincidente: son la misma recta (misma pendiente, = vector director y dos puntos en común).



Como $u=(u_1,u_2)=(B,-A)$. y $v=(v_1,v_2)=(B',-A')$.son los vectores de las dos rectas y estos vectores son proporcionales se cumple que $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$ pero como además son la misma recta debe cumplirse que las ecuaciones representan los mismos puntos, así que

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}=\frac{C}{C'}$$

Esta es la condición de coincidencia de dos recta basadas en ecuaciones generales

Ejemplo

Las rectas determinadas por r:x+2y-5=0 y s:3x+6y-15=0 son la misma

En efecto, los puntos de r son los de s ya que cada punto de r soluciona la ecuación de s

$A=1;B=2;C=-5$ y $A'=3;B'=6;C=-15$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{-5}{-15}$$

Podemos tambien estudiar la posición relativa de las rectas atendiendo al número de soluciones del sistema que representas las dos rectas $r \equiv Ax + By + C = 0$; $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

1.Si el sistema es Imcompatible $\Longleftrightarrow$ Las dos rectas son paralelas

2.Sistema compatible determinado$\Longleftrightarrow$ Las dos rectas r y s son secantes (se cortan en un punto que es la solución del sistema)

3.Sistema compatible indeterminado$\Longleftrightarrow$Las dos rectas son coincidentes, son la misma recta y habrá infinitas soluciones del sistema(todos los puntos de esa recta).

Ejemplo

Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:
$a)\begin{cases} r \equiv 2x + 3y - 1 = 0 \\ s \equiv 4x + 6y - 5 = 0 \end{cases}$ $b)\begin{cases} r \equiv 1x - 2y + 3 = 0 \\ s \equiv -2x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$ $c)\begin{cases} r \equiv 2x + 3y - 1 = 0 \\ s \equiv 4x + 5y - 4 = 0 \end{cases}$

Solución

a) $\begin{matrix} A = 2; B = 3; C = -1 \\ A' = 4; B = 6; C = -5 \end{matrix}$ .Como $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{-1}{-5}$ Las rectas son paralelas

b) $\begin{matrix} A = 1; B = -2; C = 3 \\ A' = -2; B = 4; C = -6 \end{matrix}$ .Como $\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6}$ Las rectas son coincidentes

c) $\begin{matrix} A = 2; B = 3; C = -1 \\ A' = 4; B = 5; C = -4 \end{matrix}$ .Como $\frac{2}{4} \neq \frac{3}{5}$ Las rectas son secantes, se cortan en la solución del sistema

$c)\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 4x + 5y - 4 = 0 \end{cases} \overset{f_2 - 2f_1 \to f_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ -y - 2 = 0 \end{cases} \quad y = 2 \to x = \frac{-5}{2}$

3.2 Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares, y esto es lo mismo que decir que que su producto escalar es cero.

Así pues si $r \equiv Ax + By + C = 0; y$ $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$ son dos rectas sabremos si son perpendiculares atendiendo al producto escalar de sus vectores directores

$\overrightarrow{u} = (B, -A)$ y $\overrightarrow{v} = (B', -A')$

$$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0}$$

$\Leftrightarrow (B, -A) \cdot (B', -A') = 0 \Leftrightarrow BB' + AA' = 0 \Longleftrightarrow BB' = -AA' \Leftrightarrow \frac{B'}{A'} = -\frac{A}{B} \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Donde m_1 y $m_2$son respectivamente las pendientes de r y s

Dadas dos rectas r nr $r \equiv y = m_r x + n_r$ y $s \equiv y = m_s x + n_s$

Las dos rectas r y s son perpendiculares :

$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0} \Leftrightarrow (B, -A) \cdot (B', -A') = 0 \Leftrightarrow BB' + AA' = 0 \Longleftrightarrow BB' = -AA' \Leftrightarrow \frac{B'}{A'} = -\frac{A}{B} \Leftrightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}$

Y serán paralelas $\Leftrightarrow m_r = m_s$(igual pendiente)

Nota: Dos rectas paralelas tienen misma pendiente ,es decir, los vectores directores son proporcionales o lo ques es lo mismo tienen misma dirección.

Ejemplo

Estudia las posiciones relativas del siguiente par de rectas:

$\begin{cases} r \equiv 2x + 3y - 1 = 0 \\ s \equiv -12x + 8y - 5 = 0 \end{cases}$

Solución

$\begin{matrix} A = 2; B = 3; C = -1 \\ A' = -12; B = 8; C = -5 \end{matrix}$ .Como $\frac{2}{-8} \neq \frac{3}{12}$ Las rectas son secantes, se cortan en la solución del sistema

$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ -12x + 8y - 5 = 0 \end{cases} \overset{f_2 + 6f_1 \to f_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 26y - 11 = 0 \end{cases} y = \frac{11}{26} \to x = \frac{-7}{52}$

Se cortan en $P(\frac{11}{26}, \frac{-7}{52})$ y además como $u_1 = (3, 2)$ y $u_2 = (8, -12)$ y $u_1 \cdot u_2 = 3 \cdot 8 + 2 \cdot (-12) = 0$ se cortan perpencicularmente $m_r = \frac{2}{3}$; $m_s = \frac{-12}{8}$

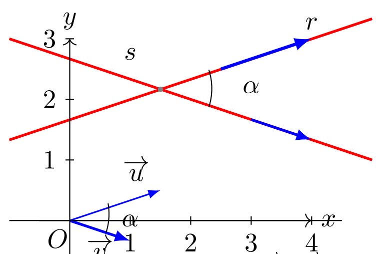
$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

4 Problemas métricos

4.1 Ángulo de dos rectas.

Se llama **ángulo de dos rectas** al menor de los ángulos que forman éstas. Se pueden obtener a partir de:

1. Sus vectores directores



vectores director $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Si $u = (u_1, u_2)$ vector director de la recta r y $v = (v_1, v_2)$=vector director de la recta s, entonces el ángulo α que forman las rectas se puede obtener a partir de la fórmula

$$cos\alpha = \frac{|u \cdot v|}{|u||v|} = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2{}^2}}$$

2 Sus pendientes

Dadas las rectas r y s, sea $\alpha = áng(r, s) \Longrightarrow$

$$tg \quad \alpha = \frac{|m_r - m_s|}{1 + m_r \cdot m_s}$$

Ejemplo

Las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$ y $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2}$ se cortan en un punto A, que es vértice de un triángulo obtusángulo en A. Determina el ángulo A de ese triángulo:

Solución

$u = (2, 3) \Rightarrow A = 2; B = 3$
$v = (1, -2) \Rightarrow A' = 1; B = -2;$
.Como $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}$ Las rectas son secantes, se cortan en la solución del sistema

El ángulo que forman, lo hallamos a partir de los vectores

$$cos\alpha = \frac{|u \cdot v|}{|u||v|} = \frac{|(2,3)(1,-2)|}{\sqrt{2^2+3^2} \cdot \sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + (-6)|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = 0{,}496$$

$\Longrightarrow \alpha = arcos(0{,}496) = 60°15'$
Entonces el ángulo obtuso $A = 180 - \alpha = 180° - 60°15' = 119°45'$

4.2 Distancia entre dos puntos.

Sean los puntos $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$.

Se define distancia entre A y B como $d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$ (el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$)

$$d(A,B) = |AB| = \sqrt{(x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Ejemplo

Hallar la distancia entre A(1,6) y B(-2,5).
Solución
$\overrightarrow{AB} = (-2,5) - (1,6) = (-3,-1)$. La distancia entre A y B

$$d(A,B) = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

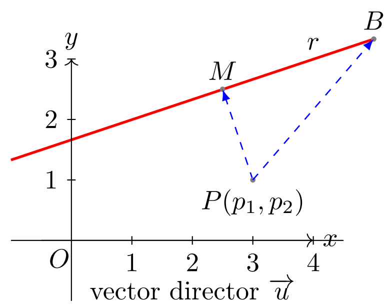
4.3 Distancia de un punto a una recta

La distancia mínima se ubica en la proyección ortogonal del punto P sobre r, es decir, el punto M de la recta r tal que (PM) sea perpendicular a ella.Dichadistancia es la mínima ya que si se toma otro punto cualquiera B de D, entonces en el triángulo rectángulo PMB, la hipotenusa PB es más larga que el cateto PM.

La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta trazada desde el punto.

Sea $P = (p_1, p_2)$ punto exterior a la recta r de ecuación $Ax + By + C = 0$.

$$d(P,r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Ejemplo

Calcula la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta r de ecuación $3x + 4y + 2 = 0$.

Solución:

$$d(P,r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Demostración de la anterior fórmula de distancia $|\overrightarrow{PM}|$

La recta y el punto cuya distancia se quiere medir son definidos por su ecuación cartesiana y sus coordenadas respectivamente: $r : A \cdot x + B \cdot y + C = 0$; y $M = (x_m, y_m)$ y la distancia que queremos es

El vector director de la recta es $\overrightarrow{u} = (-B, A)$ y un vector prpencilular a r será $\vec{v} = (A, B)$.$[\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$]

Si usamos ahora que

$|\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{MP}||\overrightarrow{v}| \cdot cos0^o \rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{MP}||\bar{v}| \cdot 1 \Longrightarrow |\overrightarrow{MP}| = \dfrac{|\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}$

Es decir $d(p,r) = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{|(p_1 - x_m, p_2 - y_m)(A,B)|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ap_1 - A \cdot x_m + Bp_2 - B \cdot y_m|}{\sqrt{A^2+B^2}} =$ $= \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 - A \cdot x_m - B \cdot y_m|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Pero como $M \in r$,las coordenadas de M cumplen la ecuación de r ,por tanto $Ax_m + By_m + C = 0 \Rightarrow C = -Ax_m - By_m$

Entonces $d(p,r) == \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 - A \cdot x_m - B \cdot y_m|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

También podemos hallar la distancia entre P y r usando la distancia entre puntos. La manera sería la siguiente:

- Si tenemos r y P, construimos una recta perpendicular a s pasando por P. (usamos el vector $\perp$ a vector $\overrightarrow{u}$
- Hallamos el punto M que es el corte de esas dos rectas r y s $M = r \cap s$
- La distancia pedida será la distancia entre P y M ,$d(P, r) = d(P, M)$

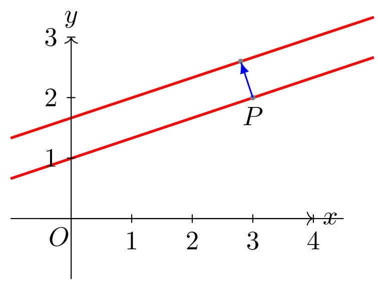
Ejemplo

Calcula la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta r de ecuación $r \equiv 3x + 4y + 2 = 0$.
Solución:
Si $r \equiv 3x + 4y + 2 = 0$. $\overrightarrow{u} = (-4, 3)$
Hallamos la recta s que es $\perp$ a r pasando por P .El vector director de esa recta s es $\overrightarrow{v} = (3, 4)$
La recta será $-4x + 3y + C' = 0$. Para hallar C' sustituyo por P, ya que la recta debe pasar por P.
Entonces $-4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + C' = 0 \implies C' = -11$.La recta s será $s \equiv -4x + 3y + 11 = 0$.
Hallamos la solución del sistema $\begin{cases} r \equiv 3x + 4y + 2 = 0 \\ s \equiv -4x + 3y + 11 = 0 \end{cases}$.
La solución es $M = (\frac{38}{25}, \frac{-41}{25})$
La distancia $d(P, r) = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{(2 - (\frac{38}{25}))^2 + (-1 - \frac{-41}{25})^2} = \sqrt{\frac{144+256}{625}} = \sqrt{\frac{400}{625}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

4.4 Distancia entre rectas

Se define distancia entre rectas paralelas como la mínima distancia entre los puntos de r y los de s.Esta mínima distancia se produce entre un punnto cualquiera de una rectay su proyección ortogonal sobre la otra.

Para hallar la distancia entre dos en rectas paralelas, se toma un punto cualquiera,$P(p_1, p_2,)$ de una de ellas y calculamos su distancia a la otra recta.



Podemos hallar una fórmula propia para este caso basándonos en la formula de la distancia entre punto y recta.

Sea $P = (p_1, p_2)$ un punto de la recta s. Si las rectas r y s son paralelas siempre podemos lograr que sus ecuaciones generales sean de la forma:

$\begin{array}{l} r : A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \\ s : A \cdot x + B \cdot y + C' = 0 \end{array}$,es decir solo se diferencian en el término independiente ya que son paralelas comparten vector $\vec{u} = (-B, A)$

Como $P \in s$ entonces $d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, pero $Ap_1 + Bp_2 + C' = 0 \Rightarrow Ap_1 + Bp_2 = -C'$ con lo que

$$d(r, s) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo

Calcula la distancia entre las rectas $r \equiv 3x + 4y + 2 = 0$ **y** $s \equiv 3x + 4y + 5 = 0$

Solución:

1ª Forma

Hallamos un punto de s dando valor $x = 0 \Rightarrow y = \frac{-5}{4} \Rightarrow P(0, \frac{-5}{4})$

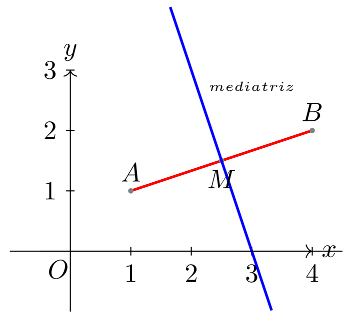
Entonces $d(r, s) = d(P, r) = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot (-\frac{5}{4}) + 2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

2ª Forma

$d(r, s) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

4.5 Mediatriz de un segmento.Ecuación de la mediatriz

Se define mediatriz de un segmento como el lugar geométrico — la recta — de los puntos que equidistan de los exrtemos del segmento. Según esta definición es la línea recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio.



Para hallar su ecuación establecemos la propiedad del lugar geométrico:

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son los extremos del segmento $d(P, A) = d(PB)$

$d(P, A) = d(PB) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \Rightarrow$

$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \Rightarrow \cancel{x^2} - 2xx_1 + {x_1}^2 + \cancel{y^2} - 2yy_1 + {y_1}^2 = \cancel{x^2} - 2xx_2 + {x_2}^2 + \cancel{y^2} - 2yy_2 + {y_2}^2 \Rightarrow$

$$(-2x_1 + 2x_2)x + (-2y_1 + 2y_2)y + (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2) = 0$$

que es la ecuación de una recta.

Ejemplo

Calcula la mediatriz del segmento determinado por A(1,1) y B(4,2)

Solución:

$d(P, A) = d(PB) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} \Rightarrow$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 \Rightarrow \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{x^2} - 2 \cdot x \cdot 4 + 16 + \cancel{y^2} - 2y \cdot 2 + 2^2$

$$(-2 \cdot 1 + 2 \cdot 4)x + (-2 \cdot 1 + 2 \cdot 2)y + (1 - 16 + 1 - 4) = 0$$

$$6x + 2y - 18 = 0$$

Otra forma de hallar la mediatriz sería hallara el punto medio (M) del segmento AB y hallar la ecuación de la recta que pasa por P y M. (Calculamos la pendiente de la recta que pasa por A y B, luego la recta es perpendicular $m' = \frac{-1}{m}$

Ejemplo

Calcula la mediatriz del segmento determinado por A(1,1) y B(4,2)

Solución:

Hallamos el punto medio $M = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,1)+(4,2)}{2} = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

$\overrightarrow{AB} = (4,2) - (1,1) = (3,1)$ .La pendiente de la recta AB es $m = \frac{1}{3}$. Por tanto, la pendiente de la recta perpendicular sería $m' = -3 \Rightarrow$Un vector de esa recta será $\overrightarrow{v} = (1, -3)$.

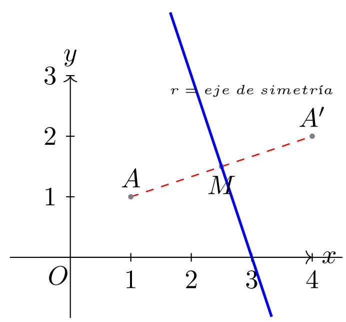
Así la ecuación continua sería $\frac{x-\frac{5}{2}}{1} = \frac{y-\frac{3}{2}}{-3}$.

La ecuación general será $\frac{x-\frac{5}{2}}{1} = \frac{y-\frac{3}{2}}{-3} \Rightarrow -3x + \frac{15}{2} = y - \frac{3}{2} \Rightarrow -6x - 2y + 18 = 0 \Rightarrow 6x + 2y - 18 = 0$.

Que es,obviamente, el mismo resultado del ejemplo anterior.

4.6 Punto simétrico respecto de una recta

Dado un punto, A, y una recta, r, se denomina punto simétrico de A respecto de la recta r a un punto, A', cuya distancia a r es la misma que la de A a r y que, además, se encuentra situado en la perpendicular a r que pasa por A. A la recta r se la denomina eje de simetría.



Ejemplo

Calcula el punto simétrico de $P(1, -2)$ respecto a la recta $3x + y - 9 = 0$

Solución:

Hallamos la recta (s) perpendicular a r pasando por $P(1, -2)$

El vector de esa recta es $\overrightarrow{v} = (3, 1)$. La recta es $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1}$ en forma continua y en forma general será $s \equiv x - 3y - 7 = 0$

Hallamos el punto de corte de las dos rectas $\begin{matrix} r: 3x + y - 9 = 0 \\ s: x - 3y - 7 = 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $M(\frac{17}{5}, \frac{-6}{5})$

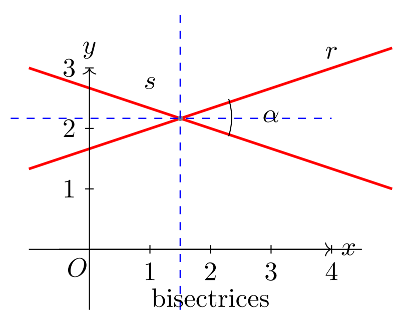
El punto A' al ser el simétrico de A satisface que M es el punto medio de AA', por lo tanto

M$=\frac{A+A'}{2} \Rightarrow M(\frac{17}{5}, \frac{-6}{5}) = \frac{(1,-2)+(x,y)}{2} \Rightarrow A'(x,y) = (\frac{34}{5}, \frac{-12}{5}) - (1,-2) =$ $\boxed{A' = (\frac{39}{5}, \frac{-2}{5})}$

4.7 Bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos, P (x, y), que equidistan de los lados del ángulo.

Si el ángulo α está formado por las rectas r y s, entonces: $d(P,r) = d(Ps)$



Ejemplo

Calcula las bisectrices del ángulo formado por rectas $r \equiv 3x + 4y + 2 = 0$ **y** $s \equiv 8x + 6y + 5 = 0$

Solución:

Según la definición los puntos de la mediatriz $P(x,y)$ serán tales que $d(P,r) = d(Ps)$.

Es decir

$$d(P,r) = \frac{|3x + 4y + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|8 \cdot x + 6y + 5|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = d(P,s)$$

$\frac{|3x+4y+2|}{5} = \frac{|8x+6y+5|}{10} \Rightarrow 10(3x + 4y + 2) = \pm 5(8x + 6y + 5)$

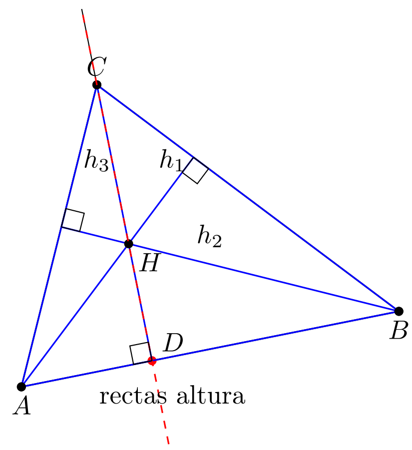
$$\Rightarrow 30x + 40y + 20 = \pm(40x + 30y + 25)$$

Habrá dos bisectrices que son perpendiculares entre sí.
$30x + 40y + 20 = 40x + 30y + 25 \Rightarrow \boxed{-10x + 10y - 5 = 0}$
$30x + 40y + 20 = -40x - 30y - 25 \Rightarrow \boxed{70x + 70y - 45 = 0}$

5 Rectas notables de un triángulo

5.1 Altura

La altura de un triángulo es la recta perpendicular a un lado (o a su prolongación) por el vértice opuesto.



Ejemplo

Sea un triángulo con vértices A(5, 7), B(2, 3) y C(6, 4), encuentra el ortocentro

Solución:

Tenemos las siguientes coordenadas:

$A(x_1, y_1) = (5, 7)$,$B(x_2, y_2) = (2, 3)$,$(x_3, y_3) = (6, 4)$

Pendiente de AC:$m_{AC} = \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} = \frac{4-7}{6-5} = -3$.

La pendiente de una línea perpendicular es igual a $\frac{-1}{m}$, en donde, m es la pendiente de la línea original

La pendiente de la altura sobre lado AC será $m_1' = \frac{1}{3}$

La ecuación de la altura sobre el lado AC desde B es $y - 3 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow h_1 \equiv -x + 3y = 7$

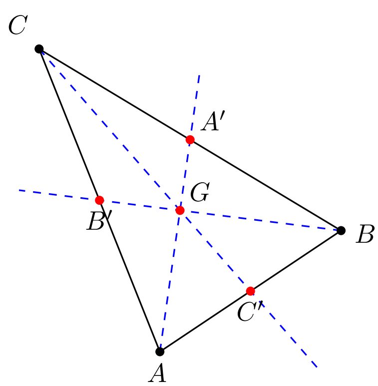
Pendiente del lado BA $m_{BA} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$ .La pendiente de la altura sobre lado BA será $m_2' = -\frac{3}{4}$.

La altura sobre el lado BA desde C es $y-4 = -\frac{3}{4}(x-6) \Rightarrow h_2 \equiv 3x+4y = 34$

El ortocentro es la solución del sistema $\begin{cases} h_1 : -x + 3y - 7 = 0 \\ h_2 : 3x + 4y - 34 = 0 \end{cases} \Rightarrow O = \left(\frac{74}{18}, \frac{55}{13}\right)$

5.2 Mediana

La mediana es el segmento que va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto.



rectas medianas

5.3 Baricentro o centroide

El baricentro de un triángulo es el punto de intersección de las tres medianas del triángulo.

El baricentro representa al centro geométrico del triángulo. El centroide de un triángulo siempre se ubica dentro del triángulo.

El baricentro de un triángulo equilátero se ubica en la misma posición que su incentro, ortocentro y circuncentro.

El baricentro centroide divide a las medianas en una proporción de 2:1

El centroide de un triángulo puede ser encontrado algebraicamente si es que conocemos las coordenadas de los vértices del triángulo. Podemos seguir el proceso usando el siguiente triángulo.

Para hallar el baricentro $C(x, y)$ de un triángulo con coordenadas de vértices $A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$,$C(x_3, y_3)$ usamos la siguiente fórmula:

$$C(x,y) = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$$

Ejemplo

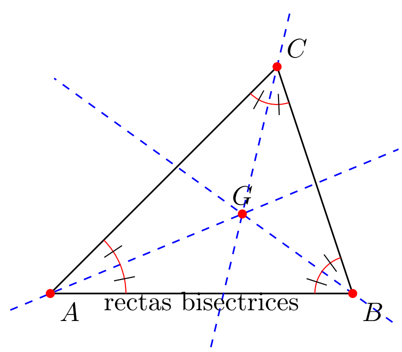
Para un triángulo de vértices: A(5,-4); B(6,4); C(9,1). Hallar las coordenadas del baricentro o centro de gravedad

Solución:

$$C(x,y) = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}) = (\frac{5+6+9}{3}, \frac{-4+4+1}{3}) = (\frac{20}{3}, \frac{1}{3})$$

5.4 Bisectriz

La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que divide al ángulo en dos partes iguales. También es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.



5.5 Incentro de un triángulo

El incentro de un triángulo es el lugar donde corta las tres bisectrices internas del mismo.

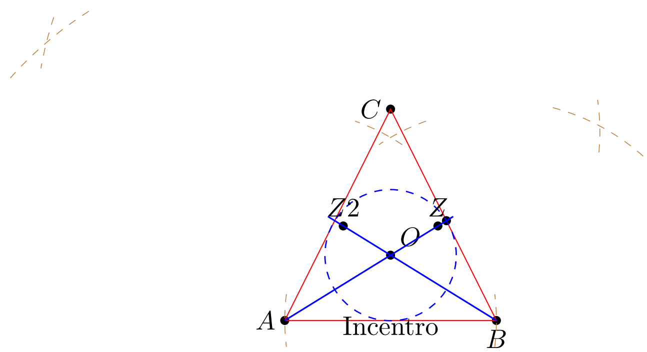
Se cumple que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Pasos para calcular el incentro:

1. Calcular las rectas de los lados del triángulo

2. Calcular las bisectrices internas de dos vértices.

3. Calcular el punto de corte de estas dos bisectrices (resolver el sistema)



Podemos calcular las coordenadas del incentro usando una fórmula con las coordenadas de los vértices y las longitudes de los lados del triángulo.

Podemos calcular el incentro usando la siguiente fórmula:$(x_I, y_I) = \frac{a(x_1,y_1)+b(x_2,y_2)+c(x_c,y_3)}{a+b+c} = \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

en donde, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ son las coordenadas de los tres vértices del triángulo y a, b, c son las longitudes de los lados opuestos a cada vértice.

El radio de la circunferencia inscrita (llamado también inradio) se halla mediante la fórmula:$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ Donde el semiperímetro es: $s = \frac{a+b+c}{2}$

El inradio está relacionado con el área del triángulo al que está inscrita su circunferencia mediante la relación:$r = \frac{area}{s}$

De tal manera que el área del triángulo es: $A = s \cdot r$

Ejemplo

Para un triángulo de vértices: A(5,-4); B(6,4); C(9,1). Hallar las coordenadas del Incentro (I).

Solución:

Primero se deben hallar la medida los lados del triángulo empleando la fórmula de la distancia

$a = |BC|\sqrt{(9-6)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$b = |AC| = \sqrt{(9-5)^2 + (1-(4))^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

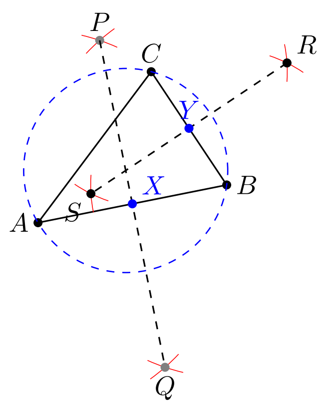
$c = |AB| = \sqrt{(6-5)^2 + (4-(-4))^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

Conocidas las coordenadas se utiliza la fórmula del Incentro:

$$(x_I, y_I) = \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right) = \left(\frac{5\sqrt{18}+5\cdot 6+9\sqrt{65}}{\sqrt{18}+5+\sqrt{65}}, \frac{-4\sqrt{18}+5\cdot 4+1\cdot\sqrt{65}}{\sqrt{18}+5+\sqrt{65}}\right)$$

5.6 Mediatrices

La madiatriz es una recta perpendicular a un lado del triángulo, que pasa por el punto medio de dicho lado. Recuerda que todo triángulo tiene tres mediatrices, una relativa a cada lado y que estas se interceptan en un punto denominado circuncentro.



5.6.1 Circuncentro de un triángulo

El **circuncentro** de un triángulo es el punto que se obtiene de la intersección de las 3 mediatrices. Se cumple que es el centro de la circunferencia que circunscribe el triángulo, ya que el punto donde se cortan las mediatrices equidista de los tres vértices.

El circuncentro de todos los triángulos agudos siempre se ubica dentro del triángulo.

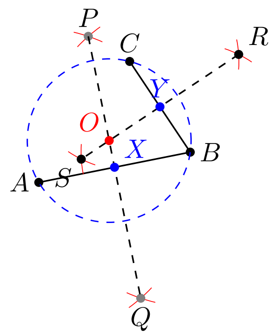
El circuncentro de todos los triángulos obtusos siempre se ubica fuera del triángulo.

El circuncentro de todos los triángulos rectángulos se ubica en la hipotenusa del triángulo rectángulo. Además, la hipotenusa del triángulo rectángulo corresponde al diámetro del círculo circunscrito.

El cálculo del circuncentro se realiza en dos pasos:

1. Calcular las mediatrices de dos de los tres lados. (ver más arriba)

2. Calcular la intersección de estas dos mediatrices.



Ejemplo

Dado el triángulo de vértices A(-3, 1), B(-1, 5) y C(5, - 3), calcula la mediatriz del lado AB y la del lado AC. Halla las coordenadas del circuncentro (Punto de intersección de las tres mediatrices).

Solución:

Tenemos las siguientes coordenadas:

Hallamos el punto medio de AB $M_1 = \frac{A+B}{2} = \frac{(-3,1)+(-1,5)}{2} = (-2,3)$

Pendiente de AB:$m_{AB} = \frac{5-1}{-1-(-3)} = \frac{4}{2} = 2$.

La pendiente de una línea perpendicular es igual a $\frac{-1}{m}$, en donde, m es la pendiente de la línea original

La pendiente de la mediatriz sobre lado AB será $m'_1 = -\frac{1}{2}$

La ecuación de la mediatriz sobre el lado AB es $y - 3 = -\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow med_1 \equiv x + 2y - 4 = 0$

Hallamos el punto medio de $AC = M_2 = \frac{A+C}{2} = \frac{(-3,1)+(5,-3)}{2} = (1,-1)$

Pendiente del lado AC $m_{AC} = \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} = \frac{-3-1}{5-(-3)} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$ .La pendiente de la mediatriz del lado AC será $m'_2 = 2$.

La mediatriz del lado AC es $y + 1 = 2(x-1) \Rightarrow med_2 \equiv 2x - y - 3 = 0$

El circuncentro es la solución del sistema

$$\begin{array}{l} med_1 : x + 2y - 4 = 0 \\ med_2 : 2x - y - 3 = 0 \end{array} \Rightarrow Ci = (2,1)$$

6 Área de un triángulo

De todos es bien conocido la fórmula del área de n triángulo $A = \frac{base \cdot altura}{2}$.

Si el triángulo es equilátero tiene los tres lados iguales. Su área, como en todo triángulo, será un medio de la base (a) por su altura. En el triángulo equilátero viene definida por la siguiente fórmula:$A = \frac{\sqrt{3} \cdot lado^2}{4}$.

Si a,b,c son las longitudes de los lados, podemos usar la siguiente fórmula llamada fórmula de Herón $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ o bien usar cualquiera de las fórmulas siguientes basadas en trigonometría

$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\hat{C}$

$A = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot sen\hat{A}$

$A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot sen\hat{B}$

Ejemplo

Dado el triángulo de vértices A(-1, 2), B(5,-1) y C(3, 4), calcula el área.

Solución:

Hallamos el vector directos de la recta AB $\overrightarrow{AB} = (5,-1) - (-1,2) = (6,-3)$

Pendiente de AB:$m_{AB} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$.

La ecuación del lado AB es $y - (2) = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow lado\ c \equiv x + 2y - 3 = 0$

Hallamos la longitud del lado c $= |AB| = \sqrt{6^2 + (3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$

La distancia de la altura del triángulo es la distancia del punto C (3,4) a la recta AB $\equiv x + 2y = 0$

$d(C, rectaAB) = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$

$Área = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} 3\cancel{\sqrt{5}} \cdot \frac{8}{\cancel{\sqrt{5}}} = \frac{24}{2} = 12$

7 Problemas tipo

1. Hallar la distancia del origen O(0,0) a los puntos A=(5,12) y B=(-3,4).

   a) Hallar la diferentes ecuaciones de la recta AB.

   b) Clacular el ángulo AOB

   c) Hallar als medianas y mediatrices

2. Hallar todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el punto P=(1,3) y tiene por vector director v = (2,−1) .

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P=(5,0) y Q=(3,-1).

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa po P=(5,0) y es perpendicular a $x + y - 5 = 0$

5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P=(1,2) y es paralela a la recta s de ecuación x-y+5=0.

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P=(2,3) y es perpendicular a la recta 2x- 3y+1=0.

7. Determinar el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

   a) $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$ $s \equiv \frac{x-2}{2} = y + 4$

   b) $r \Rightarrow 2x - 3y + 3 = 0$;$s \Rightarrow 3x + 2y - 1 = 0$

8. Determinar el valor de m para que las siguientes rectas $r \Rightarrow 2x+my-5 = 0$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}$ Sean

   a) Paralelas.

   b) Perpendiculares

   c) Formen un ángulo de 45°.

9. - Una recta de ecuación $x - 2y + 5 = 0$ es mediatriz del segmento AB , cuyo extremo $A = (1, 4)$. Hallar las coordenadas del extremo B.

10. La recta 3x-5y+15=0 corta a los ejes de coordenadas en dos puntos. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento formado por dichos puntos de cortes.

11. Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto P=(-2,5) forma un ángulo de 45° con la recta $x - y = 0$.

12. Hallar las ecuaciones de la recta que pasando por el punto P=(2,1) distan 3 unidades del punto Q=(2,-4).

13. Dada la recta $s \Rightarrow x - 2y - 4 = 0$ y el punto $P = (1, 1)$, hallar el punto simétrico de P respecto la recta s.

14. Hallar los puntos de la recta $x - y = 0$ que disten 2 unidades del punto P=(2,0).

15. Hallar el ortocentro, incentro, baricentro del triángulo ABC A(-1, 2), B(5,-1) y C(3, 4)