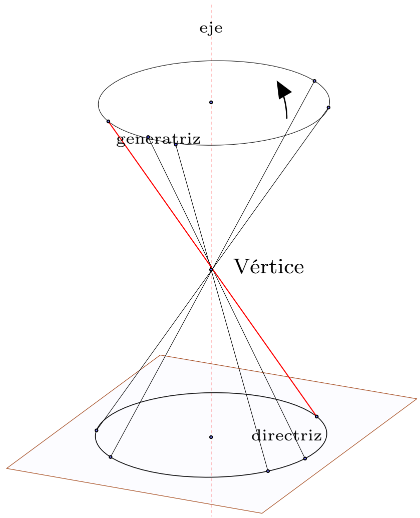
Las curvas cónicas

Geometría

1º Bachillerato

2023

1 Introducción



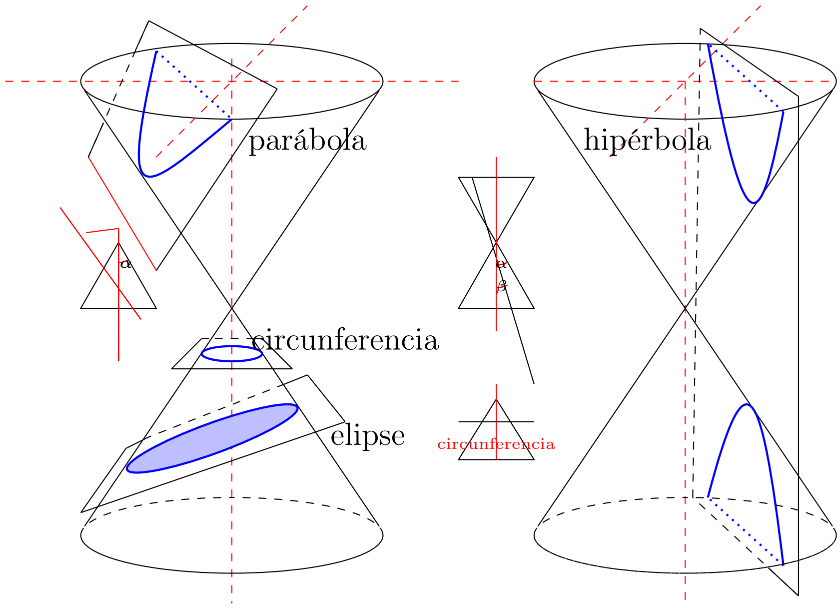
Apolonio de Perge o Apolonio de Perga (Perge, c. 262 - Alejandría, c. 190 a. C.) fue un geómetra griego famoso por su obra «Sobre las secciones cónicas». Fue Apolonio quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola, a las figuras que conocemos.

También se le atribuye la hipótesis de las órbitas excéntricas o teoría de los epiciclos para intentar explicar el movimiento aparente de los planetas y de la velocidad variable de la Luna. Sus extensos trabajos sobre geometría tratan de las secciones cónicas y de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas. Recopiló su obra en ocho libros y fue conocido con el sobrenombre de El Gran Geómetra.

1.1 Superficie Cónica

Se llama **superficie cónica de revolución** a la superficie engendrada por una línea recta que gira alrededor de un eje manteniendo un punto fijo sobre dicho eje

1.2 Curvas cónicas



Las curvas cónicas se obtienen al intersecar una superficie cónica con un plano. La posición de ese plano posibilita la obtención de diferentes curvas cónicas.

2 Circunferencia

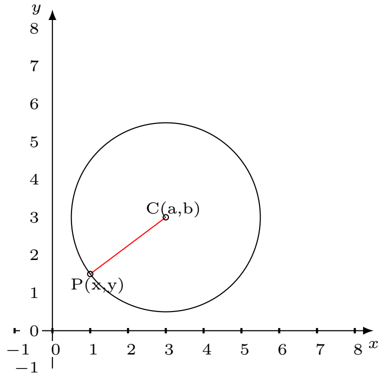
Se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro C. El radio de la circunferencia es la distancia de un punto cualquiera de dicha circunferencia al centro

Condición de lugar geométrico :

$$d(P, C) = r$$

Ecuación de la circunferencia :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (1)$$



Cuadro 1: circunferencia

2.1 Ecuación Completa de una Circunferencia

Si desarrollamos la ecuación anterior

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + a^2 - 2ax + y^2 + b^2 - 2by \quad = r^2 \qquad (2)$$

Si realizamos los siguientes cambios

$$\begin{aligned} A &= -2a \\ B &= -2b \\ C &= a^2 + b^2 - r^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Obtenemos otra forma de escribir la ecuación de la cfa:

$$x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0 \qquad (4)$$

Donde el centro es:

Centro=$(\frac{A}{2}, \frac{B}{2})$

y el radio cumple la relación:

$$r = \sqrt{(\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2 - C}$$

2.1.1 Ecuación reducida de la circunferencia

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas la ecuación queda reducida a la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplo

Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $(3,4)$ y r=2.

Solución:

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2;$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4; \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 + 16 - 8y = 0$

$4x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

Ejemplo

Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, hallar el centro y el radio.

Solución:

$a = \frac{-A}{2} = \frac{-(-2)}{2} = 1; b = \frac{-B}{2} = \frac{-4}{2} = -2;$

$r^2 = a^2 + b^2 - C = 4 + 16 - 4 = 16 => r = 4$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,0), B(2,3), C(1,3)$.

Solución:

Si sustituimos x e y en la ecuación por las coordenadas de los puntos se obtiene el sistema:

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$$\begin{cases} 4 + 2A + C & = & 0 \\ 4 + 9 + 2A + 3B + C & = & 0 \\ 1 + 9 + A + 3B + C & = & 0 \end{cases} \text{SOL:} A = -3; B = -3; C = 2$$

$x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la circunferencia de radio 3, con centro en el punto de coordenadas $(-1, 4)$.

Solución:

Sustituyendo en (2) $a = -1, b = 4$ y $r = 3$, resulta: $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 3^2$ o bien $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la circunferencia centrada en $C(1, -6)$, sabiendo que el punto $P(2, 3)$ pertenece a la gráfica de la circunferencia.

Solución:

Sabemos que si la circunferencia tiene centro en $C(1, -6)$ su ecuación es $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 = r^2$

Si el punto P pertenece a la circunferencia, sus coordenadas deben verificar la ecuación, entonces $(2 - 1)^2 + (3 + 6)^2 = r^2$

De donde, haciendo las operaciones $r^2 = 82$. Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es $(x - 1)^2 + (x + 6)^2 = 82$.

Los elementos de la circunferecia son el centro $C(1, -6)$ y el radio $r = \sqrt{82}$

2.2 Condición para que un polinomio de grado 2 en x, y sea una circunferencia

Para que una expresión del tipo: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ sea una circunferencia debe cumplir que:

1. Los coeficientes de x^2 e y^2 sean iguales a la unidad(Si ambos tuvieran un mismo coeficiente distinto de 1, podríamos dividir por él todos los términos de la ecuación).

2. No tenga término en xy.

3. $(\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2 - C > 0$

Ejemplo

Indicar si la ecuación: $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$**, corresponde a una circunferencia, y en caso afirmativo, calcular el centro y el radio.**

Solución:

1. Como los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos a la unidad, dividimos por 4: $x^2 + 2y^2 - x - 2y - \frac{11}{4} = 0$

2. No tiene término en xy.

3. $(\frac{-1}{2})^2 + (\frac{-2}{2})^2 - (\frac{-11}{4}) > 0$

Es una circunferencia, ya que se cumplen las tres condiciones.

$-2 = -2b => b = 1;$

$-1 = -2a => a = \frac{1}{2}$

$r = \sqrt{(\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2 - C} = \sqrt{\frac{11}{2} + 1 + \frac{1}{4}} = 2$

Entonces $C = (\frac{1}{2}, 1); r = 2$

Ejemplo

Dada la ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 90 = 0$ **, ¿corresponde a la ecuación de una circunferencia?, y en ese caso ¿cuál es su centro y radio? ¿Qué artificio algebraico puedes usar para que aparezca la suma de dos binomios al cuadrado en el primer miembro?**

Solución:
Agrupa los términos que contengan la misma variable, escribiendo la ecuación dada en la forma:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 6x) - 90 = 0$$

completa cuadrados en la variable x, sumando y restando el número 1 a la expresión $(x^2 - 2x)$, (nota que 1 es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x).
Procedemos de la misma forma con la expresión $(y^2 + 6y)$, sumando y restando el número 9 (9 es el cuadrado de la mitad del coeficiente de y).
La ecuación original es equivalente a:

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 - 90 = 0$$

Agrupando términos se llega a la ecuación:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 100$$

que corresponde es una circunferencia de radio 10 y centro $(1, -3)$.

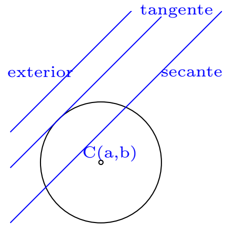
2.3 Posición relativa de una recta y una circunferencia

Para hallar la posición relativa de una recta y una circunferencia podemos comparar la distancia del centro de la cfa a la recta. Si $d = d(C, recta)$ y r=radio de la cfa

1. Si $d > r$ La recta es exterior
2. Si $d = r$La recta es tangente
3. Si $d < r$ La recta es secante

Para hallar los puntos comunes a una cónica y una recta resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de ambas. En general se obtiene un ecuación de segundo grado, que tendrá dependiendo del signo del discrimínante, , las siguientes soluciones:

- Si $\triangle > 0$ Dos soluciones: la recta y la cónica son secantes.
- Si $\triangle = 0$ Una Solución: la recta y la cónica son tangentes.
- Si $\triangle < 0$ Ninguna Solución: la recta y la cónica son exteriores.



Ejemplo

Calcula la posición relativa de la circunferencia $x^2+y^2-2x-3=0$ y la recta $3x+y=5$.

Solución:

Centro $-2=-2a => a=1$;$b=0$;$C=(1,0)$;$r^2=1^2+0-(-3)=4 => r=2$

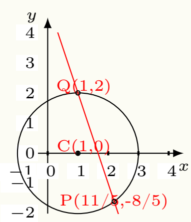
Calculamos la distancia el centro a la recta $d(C,r)=\frac{|3\cdot 1+0-5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}<2$ =>Como la distancia es mas corta que el radio :La recta es secante

Otra forma. Solucionamosel sistema siguiente $\begin{cases} x^2+y^2-2x-3=0 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

$y=5-3x => x^2+(5-3x)^2-2x-3=0;\Rightarrow x^2+25+9x^2-30x-2x-3=0;$

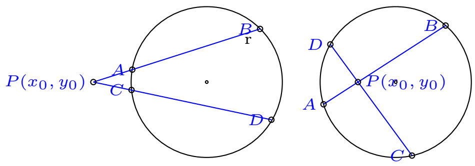
$10x^2-32x-22=0 \Rightarrow 5x^2-16x-11=0 \Rightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 5\cdot 11}}{10}=x=\frac{11}{5};x=1.$

Entonces ambos objetos se cortan(son secantes) en $P(\frac{11}{5},-\frac{8}{5})$ y $Q(1,2)$



2.4 Potencia de un punto respecto a una circunferencia

La Potencia de un Punto con respecto a una circunferencia, es el producto de sus distancias a cualquier par de puntos en la circunferencia que sean colineales con él.



PA*PB=PC*PD

Este valor es constante y no depende de la inclinación de la recta, ni de los puntos de corte con la circunferencia. La potencia de un punto respecto de una circunferencia depende de la posición del punto.

Como caso particular, tenemos cuando una de las rectas que pasan por P es tangente a la circunferencia. Considerando la figura de abajo, tenemos lo siguiente:

$$PT \cdot PT = PA \cdot PB \Rightarrow PT^2 = PA \cdot PB$$

Analíticamente la potencia de un punto P respecto a una circunferencia de radio r es el valor

$$pot_C(P) = d^2 - r^2$$

donde d es la distancia de P al centro del círculo.

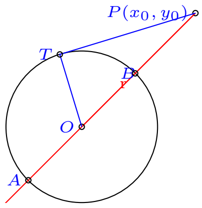
La definición algebraica permite adicionalmente el cálculo de la potencia de un punto mediante el uso de coordenadas.

La potencia del punto $P = (x_0, y_0)$ **respecto a una circunferencia centrada en el origen**, con radio arbitrario r es

$$Pot_C(x_0, y_0) = \left[\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2}\right]^2 - r^2 = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

Como caso particular, tenemos cuando una de las rectas que pasan por P es tangente a la circunferencia. Considerando la figura de abajo, tenemos lo siguiente:

$$PT \cdot PT = PA \cdot PB \Rightarrow PT^2 = PA \cdot PB$$



La potencia del punto $P = (x_0, y_0)$ **respecto a una circunferencia centrada en** $C(a, b)$, con radio arbitrario r es

$$Pot_C(x_0, y_0) = \left[\sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}\right]^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$$

Si en la fórmula anterior desarrollamos los productos notables:$x_0^2 - 2ax_0 + a^2 + y_0^2 - 2y_0b + b^2 - r^2$

Reordenamos términos de la siguiente manera:$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2y_0b + a^2 + b^2 - r^2$

Y realizamos los siguientes cambios:$A = -2a; B = -2b; C = a^2 + b^2 - r^2$

Nos queda la fórmula de la potencia de un punto respecto de una circunferencia conocidas las coordenadas del punto y la ecuación de la circunferencia:

$$Pot_C(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C$$

- Si $Pot_C(P) > 0$ entonces $P(x_0, y_0)$ es exterior a la circunferencia.
- Si $Pot_C(P) < 0$ entonces $P(x_0, y_0)$ es interior a la circunferencia.
- Si $Pot_C(P) = 0$ entonces $P(x_0, y_0)$ está en la circunferencia.

Ejemplo

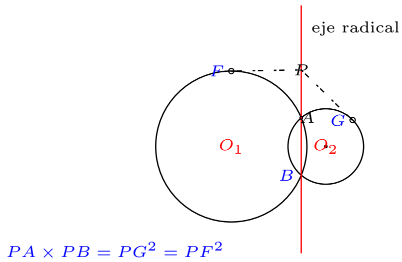
Dada la circunferencia $C : x^2 + y^2 - 4x - 2 = 0$ y el punto $P(1, 2)$, la potencia del punto con respecto de la circunferencia es $Pot_C(P) = 1^2 + 2^2 - 4 \cdot 1 - 2 = -1 < 0$.

El punto P es interior a la circunferencia.

2.5 Eje radical de dos circunferencias.

El Eje radical de dos circunferencias es lugar geométrico de los puntos del plano cuya potencia respecto a dos círculos fijos (no concéntricos) es la misma. Es decir, aquellos puntos P tales que donde d_1, d_2 son las distancias desde P a los centros del primer y segundo círculo, mientras que r_1, r_2 son los radios de los mismos.

Este lugar geométrico es una línea recta, denominada **eje radical** de las dos circunferencias, perpendicular a la línea que une los centros de ambos. Los detalles varían dependiendo de la posición relativa de los círculos (si se cortan, si son ajenos o si uno contiene a otro). El caso más sencillo, aquí ilustrado, es el que ambos círculos se cortan.



Denominando por A, B a los puntos de corte, se observa que para cualquier punto de la línea AB se cumple que la potencia respecto a cualquiera de los dos círculos es la misma: $PA \cdot PB$.

Como consecuencia adicional se obtiene como consecuencia que dicha recta también es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se puede trazar tangentes de la misma longitud hacia cada uno de los círculos.

Esto es porque la potencia del punto P también es igual a PF^2 y PG^2, por lo que $PF = PG$.

Si las circunferencias son exteriores podemos trazar una tangente común y el punto medio será del eje radical. Trazando la perpendicular a la línea que une los centros por este punto obtendremos el eje radical.

3 ELIPSE

Definiciones:

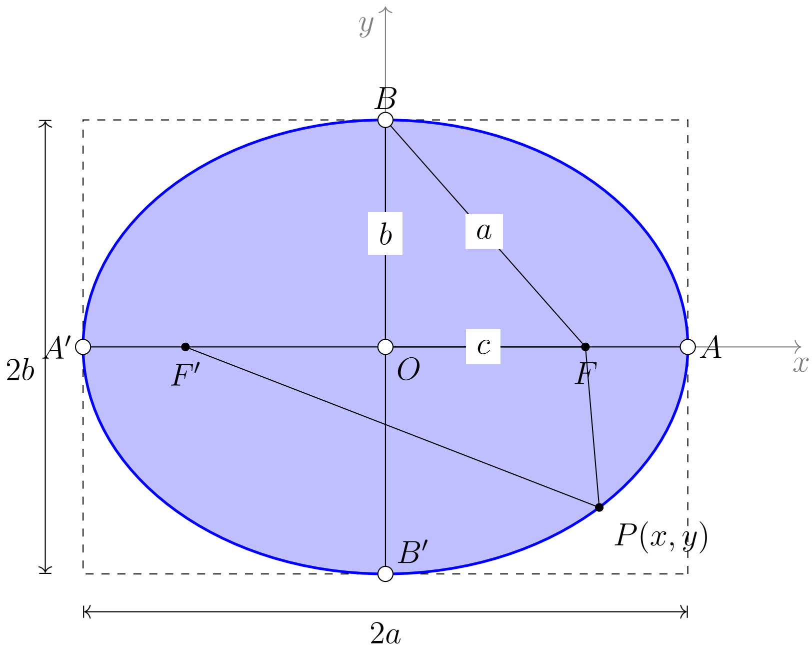
- Sean F y F' dos puntos de un plano. Se define la **ELIPSE** de focos F y F' como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la *suma de sus distancias a los focos* es **constante** e igual a $2a$ (a $>$ 0).y $(a > c)$

- Las rectas: La que pasa por los focos F y F' y la recta mediatriz del segmento se llaman **Ejes de simetría de la elipse**.

- El punto de intersección O de los dos ejes de simetría, se llama **Centro de la elipse**.

- Los puntos A', A, B y B' se llaman **Vértices de la elipse**.

- Si el segmento a es mayor que el segmento b, ambos segmentos se llaman respectivamente **Eje mayor** y **Eje menor** de la elipse.



3.1 Observaciones:

- Cualquier par de puntos del plano pueden servir como focos de una elipse. Por simplicidad, solo se considerarán inicialmente aquellos casos en los cuales los focos están en el mismo eje (eje x, eje y) y son simétricos uno del otro con respecto al origen .
- Nótese también que como $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FB'} = a$, se sigue que $\overrightarrow{B'O} = \overrightarrow{OB} = b = \sqrt{a^2 - c^2}$(teorema de Pitágoras).

3.2 Ecuaciones Analíticas de la Elipse

3.2.1 Caso 1. Elipse con focos. F'(-c, 0) y F(c, 0) (c>0)

Eje mayor: Longitud 2a (2a $>$ 0) ;Eje menor: Longitud 2b (2b $>$ 0)

TEOREMA: La ecuación de la elipse con focos en los puntos $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$, eje mayor 2a, y eje menor 2b, viene dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demostración Si $p(x, y)$ es un punto que pertenece a la elipse considerada, se tiene de acuerdo a la definición que $PF + PF' = 2a$, equivalentemente,

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

(fórmula de distancia entre dos puntos)

Transponiendo el primer radical al segundo lado y elevando ambos miembros al cuadrado, se obtiene:

$\left(\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right)^2 \Rightarrow$

$\cancel{x^2} + \cancel{c^2} - 2xc + \cancel{y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} + \cancel{c^2} + 2xc + \cancel{y^2} - 4a\sqrt{x^2 + c^2 + 2xc + y^2} \Rightarrow$

$-4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{x^2 + c^2 + 2xc + y^2} \Rightarrow$

Simplificando la última igualdad se llega a:

$xc + a^2 = a\sqrt{x^2 + c^2 + 2xc + y^2} \Rightarrow$

Al elevar nuevamente ambos miembros al cuadrado en la última ecuación, se obtiene:

$x^2c^2 + a^4 + \cancel{2xca^2} = a^2x^2 + a^2c^2 + \cancel{a^22xc} + a^2y^2 \Rightarrow$

La cual se reduce a:

$a^4 - a^2c^2 = x^2a^2 - x^2c^2 - a^2y^2 \Rightarrow a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2 + a^2y^2$

Recordando además que $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2$

$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$

al dividir ambos miembros de la última igualdad por a^2b^2, se obtiene finalmente

$\frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}} = \frac{x^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}} + \frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2};$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que corresponde a la ecuación pedida.

3.2.2 Caso 2 Elipses con focos F'(0, -c) y F(0, c) ; c > 0

Eje mayor: Longitud 2a (a > 0) Eje menor: Longitud 2b (b > 0)

TEOREMA:

La ecuación de la elipse con focos en los puntos F'$(0, -c)$ y $F(0, c)$, eje mayor $2a$, y, eje menor $2b$, (a>c) ,viene dada por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

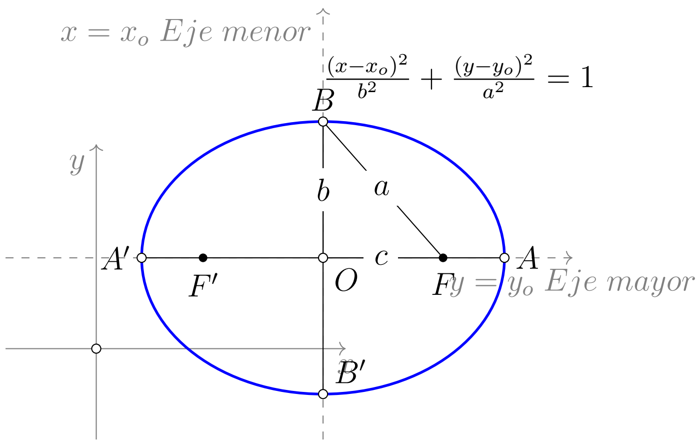
Demostración: Es similar a la anterior, se deja por lo tanto como ejercicio.

NOTA:Nótese que si en las ecuaciones caso1 y caso2 de la elipse, se hace $a = b$, las ecuaciones se transforman en la ecuación de una circunferencia de centro en el origen y radio a.

3.2.3 Caso 3. (Caso General).

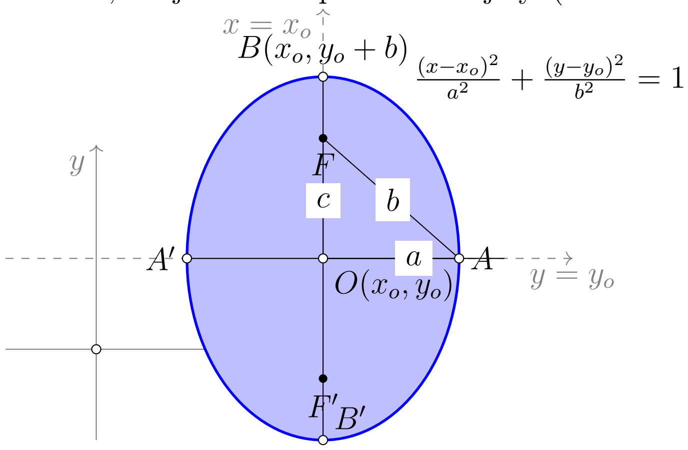
Si en vez de considerar el centro de la elipse en el punto $(0, 0)$, como se hizo en los dos casos anteriores, se considera el punto $C(h, k)$, la ecuación de la elipse correspondiente, se transforma utilizando las ecuaciones de traslación en:

Si $a > b$, el eje focal es paralelo al eje OX. (sobre la recta $y = y_0$)



x_0, y_0 : Coordenadas x e y del centro de la elipse a : Semieje de abcisas b : Semieje de ordenadas. En nuestro caso debe cumplirse que $a \geq b$.

Si $b > a$, el eje focal es paralelo al eje y. (sobre la recta $x = x_o$)



3.3 Excentricidad de la elipse

Se llama excentricidad de la elipse al valor

$$e = \frac{c}{a}$$

Al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor.

Propiedad

Es evidente que

$$0 \leq e = \frac{c}{a} \leq 1$$

Notas

Si $c = 0$ Entonces $a = b$ La elipse es una circunferencia, ya que la distancia entre focos es cero$\Rightarrow$Solo hay un foco que es el centro del círculo
Si $c = 1$Entonces c=a. La elipse se degenera en un segmento ya que $b = 0$

Ejemplo

Hallar los elementos característicos y la ecuación reducida de la elipse de focos: F'(-3,0) y F(3, 0), y su eje mayor mide 10.
Solución :
Semieje mayor $2a = 10 \Rightarrow a = 5$
Semidistancia focal $FF' = 2c = 6 \Rightarrow c = 3$
Semieje menor $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} \Rightarrow b = 4$
Ecuación reducida

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

En su forma general, la ecuación es $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$
Excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

Ejemplo

A partir de la siguiente ecuación de una elipse,) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ determina las coordenadas de los focos, vértices y su excentricidad.
Solución :
Como lo explicita el enunciado, la ecuación de la elipse a tratar es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ En la misma se observa que , $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$
Como $a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5; b^2 = 16 \Rightarrow b = \sqrt{16} = 4$
$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9} = 3$
Las coordenadas genéricas de los focos de una elipse con eje focal sobre el eje x son $F1(c, 0)$ y $F2(-c, 0)$, con lo cual:
$F1 = (3, 0)$ y $F2(-3, 0)$

Los vértices tienen coordenadas de la forma (a, 0) , (−a, 0), con lo cual, según la información obtenida a partir de la ecuación de la elipse:
A(5,0) y A'(−5,0)
Los vértices del eje menor son $B'(0,-4)$ y $B(0,4)$
Concluimos que el eje mayor está sobre el eje x y el eje menor sobre el eje y.
Finalmente, la excentricidad la calculamos como: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

3.4 Ecuación general de una elipse

Cualquier ecuación del tipo $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$ es la ecuación general de una elipse cuando A y B son no nulos y del mismo signo.

Vamos a ver un método para llegar a la ecuación reducida.

Ejemplo

Dada la ecuación $2x^2 + 3y^2 - 8x + 4y = 0$, hallar la ecuación reducida y los elementos de la elipse.
Solución :
Como los coeficientes de x^2 e y^2 son del mismo signo tenemos una elipse.
Completamos los cuadrados :
$A(x - x_0)^2 + B(y - y_o)^2 + F = 0$
$2x^2 + 3y^2 - 8x + 4y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2 \cdot (2 \cdot 2x) + 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^2 + 3y^2 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3}y + 3 \cdot \frac{4}{9} - 3 \cdot \frac{4}{9} = 0$
$2(x^2 - 2)^2 + 3(y + \frac{2}{3})^2 - 8 - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 2)^2 + 3(y + \frac{2}{3})^2 - 8 - \frac{4}{3} = 0$
$2(x^2 - 2)^2 + 3(y + \frac{2}{3})^2 = \frac{28}{3} \Rightarrow \frac{2(x^2-2)^2}{6} + \frac{3(y+\frac{2}{3})^2}{6} = \frac{\frac{28}{3}}{6}$
$\frac{(x^2-2)^2}{3} + \frac{(y+\frac{2}{3})^2}{2} = \frac{28}{18}$ Dividiendo por $\frac{28}{18}$
$\frac{\frac{(x^2-2)^2}{3}}{\frac{28}{18}} + \frac{\frac{(y+\frac{2}{3})^2}{2}}{\frac{28}{18}} = 1 \Rightarrow \frac{(x^2-2)^2}{\frac{84}{18}} + \frac{(y+\frac{2}{3})^2}{\frac{56}{18}} = 1$
Así $a = \sqrt{\frac{84}{18}} = \frac{\sqrt{42}}{3}; b = \sqrt{\frac{28}{9}} = \frac{\sqrt{28}}{3}; c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{42}{9} - \frac{28}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$

Ejemplo

Hallar la ecuación reducida de la elipse que verifica:
a) pasa por (25, 0) y la distancia semifocal es 7.
b) pasa por (4, 1) y por (0, 3).

Solución :

a) La ecuación reducida de una elipse es

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

siendo c la distancia semifocal, a el semieje mayor, b el semieje menor y b $b^2 = a^2 - c^2$

El punto (25, 0) de la elipse es el punto de corte con el eje de abscisas, por tanto, $a = 25$. Al ser la distancia semifocal c = 7, se tiene que$b^2 = a^2 - c^2 = 25^2 - 7^2 = 576$

Por tanto, la ecuación de la elipse es

$$1 = \frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576}$$

b)El punto (0, 3) de la elipse es el punto de corte con el eje de ordenadas, por tanto, b = 3. Así la ecuación de la elipse es $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9}$. y despejando a^2 se tiene, $a^2 = 18$.Entonces $1 = \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9}$

4 HIPÉRBOLA

4.1 Definiciones

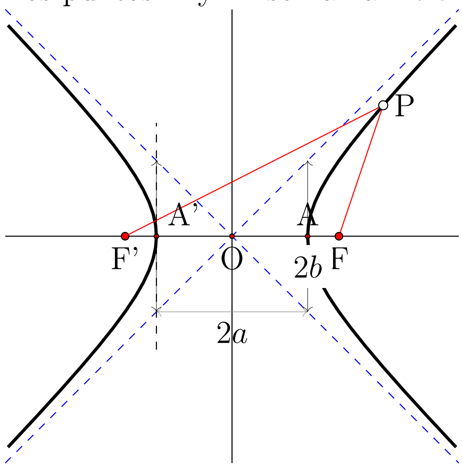
Sean F y F' dos puntos de un plano (F F').

Se define la **hipérbola** de focos F y F' como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la **diferencia de sus distancia a los focos** es constante e igual a 2a. (a > 0).

La recta que pasa por los focos F y F' y la recta mediatriz del segmento F'F se llaman **Ejes de simetría de la hipérbola**.

El punto de intersección O de dos ejes de simetría, se llama **centro** de la hipérbola.

Los puntos A y A' se llaman **Vértices** de la hipérbola.



4.1.1 OBSERVACIONES:

Como en el caso de la elipse, cualquier par de puntos del plano pueden servir como focos de una hipérbola. Por simplicidad, solo se considerarán inicialmente, aquellos casos en los cuales los focos están en el mismo eje (eje x ó eje y) y son simétricos uno del otro con respecto al origen

Si se obtiene la rama derecha de la hipérbola; mientras que si se obtiene la otra rama

Nota que $2a < 2c$, ya que la diferencia de los lados de un triángulo siempre es menor que el tercer lado. Además, se toma.

4.2 Ecuaciones Analíticas de la Hipérbola

4.2.1 Caso 1. Hipérbola con focos F'(-c, 0) y F(c, 0) ; c > 0.

Teorema: La hipérbola centrada en el origen y focos en F'(-c, 0) y F(c, 0) viene dada por: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **Demostración:**

Si P(x, y) es un punto que pertenece a la hipérbola considerada, se tiene de acuerdo a la definición que:

$$\overrightarrow{F'P} - \overrightarrow{FP} = 2a \quad ó \;\; \overrightarrow{FP} - \overrightarrow{F'P} = 2a$$

De donde,

$$\overrightarrow{F'P} = 2a + \overrightarrow{FP} \quad ó \;\; \overrightarrow{FP} = 2a + \overrightarrow{F'P}$$

Es decir,

$$\pm\overrightarrow{F'P} = 2a \pm \overrightarrow{FP}$$

Equivalentemente, usando la fórmula de distancia, se puede escribir:

$$\pm\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado en la última igualdad y simplificando se obtiene:

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando nuevamente ambos miembros al cuadrado en la última igualdad y después de simplificar y factorizar se puede escribir:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Recordando además que $c^2 - a^2 = b^2$(observación iii.)

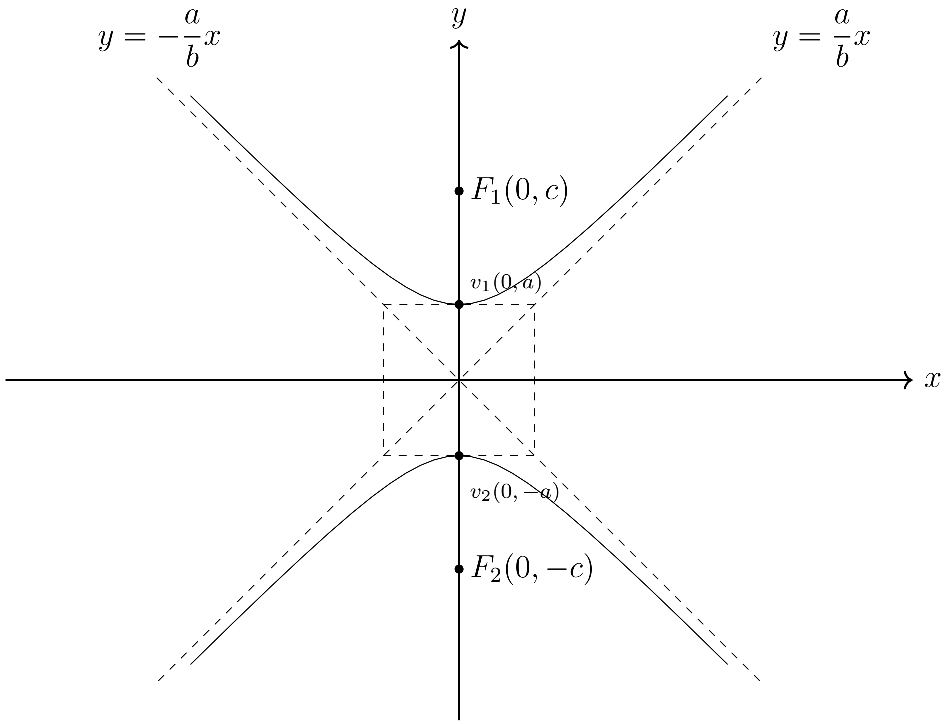
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

y al dividir ambos miembros de la última igualdad por a^2b^2, se obtiene finalmente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4.2.2 Caso 2. Hipérbola con focos en F'(0, -c) y F(0, c) ; c > 0.

Teorema: La hipérbola centrada en el origen focos en F'(0, -c) y F(0, c) viene dada por: $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ La demostración es similar a la anterior, se deja por lo tanto como ejercicio.



4.2.3 Caso 3. (Caso General)

Si en vez de considerar el centro de la hipérbola en el punto (0, 0), como se hizo en los dos casos anteriores, se considera el punto $C(x_o, y_o)$, las ecuaciones de la hipérbola correspondiente, se transformarán utilizando las ecuaciones de traslación (sección 6.1.2.) en:

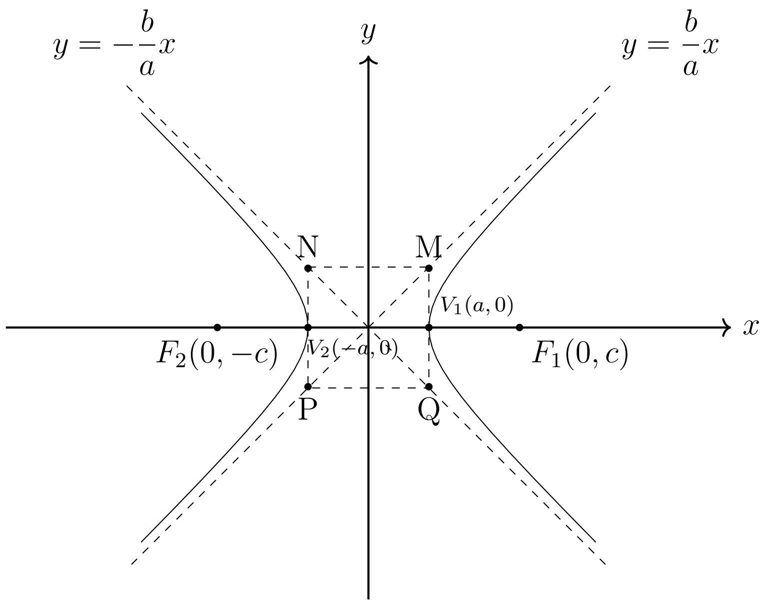
$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o^2)}{b^2} = 1$$

ó bien

$$\frac{(x - x_o)^2}{b^2} - \frac{(y - y_o^2)}{a^2} = 1$$

según sea el eje focal una recta paralela al eje x o al eje y respectivamente.

4.2.4 Observaciones:



- En la figura anterior se ha trazado la hipérbola centrada en el origen y focos en los puntos $F1(c,0)$ y$F2(-c,0)$.
    - Los puntos V_1 y V_2 son los vértices de la hipérbola y sus coordenadas son $V1(a,0)$ y $V2(-a,0)$.
    - Los puntos M, N, P y Q tienen coordenadas: $M(a,b), N(-a,b), P(-a,-b)$ y $Q(a,-b)$.
    - El rectángulo MNPQ recibe el nombre de rectángulo auxiliar de la hipérbola.
- La gráfica de la hipérbola es simétrica con respecto al eje x y con respecto al eje y.
- Las rectas que pasan, la primera por M y P y la segunda por N y Q, se llaman **asíntotas oblicuas** de la hipérbola y sus ecuaciones vienen dadas respectivamente por:$y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$

- Para obtener las ecuaciones de las los asíntotas de la hipérbola hacemos lo siguiente:
- En la ecuación de la hipérbola, sustituir el 1 (uno) del segundo miembro por un 0 (cero).
- Así, en el caso particular de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Hacemos: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ y factorizando:$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$ =0
- Estas son las ecuaciones de las asíntotas. $\begin{array}{c} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}x \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow \quad y = -\frac{b}{a}x \end{array}$

- En el caso particular, cuando $a = b$, las ecuaciones de la hipérbola se transforman en $x^{2-y^2} = 1$ ó $y^2 - x^2 = 1$.En ambos, la hipérbola se llama: **Hipérbola Equilátera** y tienen como asíntotas las rectas $y = x$ e $y = -x$

Ejemplo

Representa gráficamente y determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices y la excentricidad de la siguiente hipérbola: $4x^2 - 3y^2 - 8x - 8 = 0$

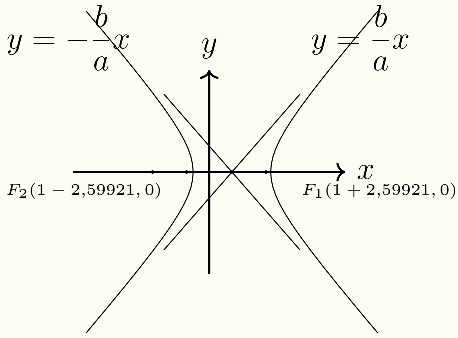
Solución:

Como en el caso de la cfa o elipse completamos cuadrados

$4x^2 - 3y^2 - 8x - 8 = 0 \Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1) - 4 - 3y^2 - 8 = 0 \Rightarrow 4(x-1)^2 - 3y^2 = 12 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$,$b^2 = 4 \Rightarrow b = \sqrt{4} = 2$ y por tanto $c = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$

Entonces $C = (1,0)$; $A = (1+\sqrt{3},0)$; A' $= (-1-\sqrt{3},0)$; $F = (1+\sqrt{7},0)$; F'$(-1-\sqrt{7},0)$ y excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$



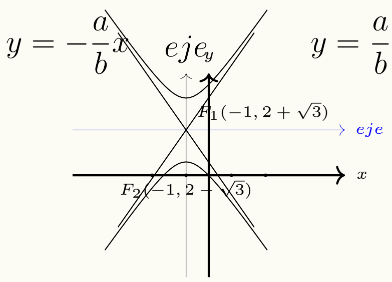
Ejemplo

Representa gráficamente y determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices y la excentricidad de la siguiente hipérbola: $y^2 - 2x^2 - 4x - 4y = 0$

Solución:

Como en el caso de la cfa o elipse completamos cuadrados

$y^2 - 2x^2 - 4x - 4y = 0 \Rightarrow (y^2 - 4y + 4) - 2(x^2 + 2x + 1) + 2 = 0 \Rightarrow$
$(y-2)^2 - 2(x+1)^2 = 2 \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{2} - \frac{(x+1)^2}{1} = 1$
$a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$,$b^2 = 1 \Rightarrow b = \sqrt{1} = 1$ y por tanto $c = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$
Entonces $C = (1, 0)$; $A = (-1, 2+\sqrt{2})$; $A' = (-1, 2-\sqrt{2})$; $F = (-1, 2+\sqrt{3})$; $F'(-1, 2-\sqrt{3})$ y excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$



5 LA PARABÓLA

5.1 Definiciones

Sea d una recta dada del plano y F un punto del plano que no está en la recta dada.

Se define la **parábola** como el lugar geométrico de los puntos P del plano cuya distancia al punto F es igual a la distancia a la recta d.

• La recta dada d se llama DIRECTRIZ y el punto F se llama FOCO

Frecuentemente se hace referencia a la parábola de directriz d y de foco F

• **Foco:** Es el punto fijo F.

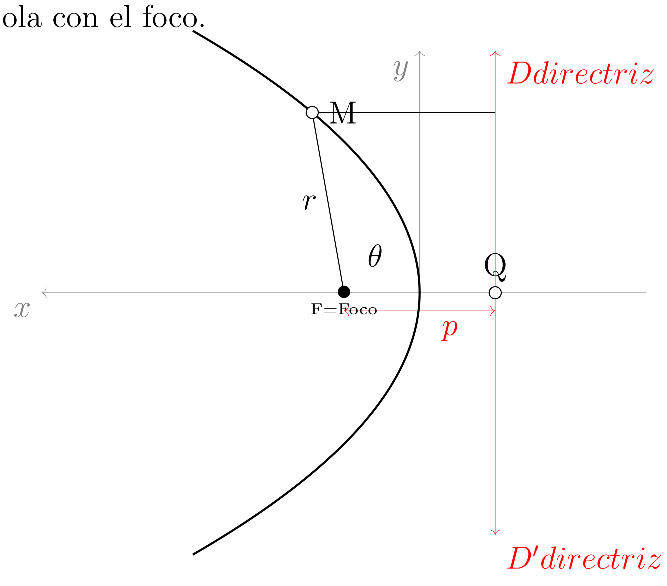
• **Directriz:** Es la recta fija d.

• **Parámetro**:Distancia del foco a la directriz, se designa por la letra p.

• **Eje**: Es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.

• **Vértice**: Es el punto de intersección de la parábola con su eje.

• **Radio vector**:Es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco.



5.1.1 Observaciones

Sea A el punto medio del segmento QF . Como AF=AQ, entonces el punto A pertenece a la parábola.

A es llamado VERTICE de la parábola.

5.2 Ecuaciones de la Parábola

Consideramos parábolas con el vértice $A(0,0)$ en el origen de coordenadas y cuyos focos estarán localizados sobre los ejes x o y

Sea $P(x,y)$ un punto de la parábola entonces, $PD = PF$.

Pero, $PD = x + \frac{p}{2}$ y $PF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Luego,

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la última igualdad, y desarrollando los binomios, se obtiene:

$$x^2 + \frac{p^2}{4} + px = x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2$$

, y simplificando queda finalmente,

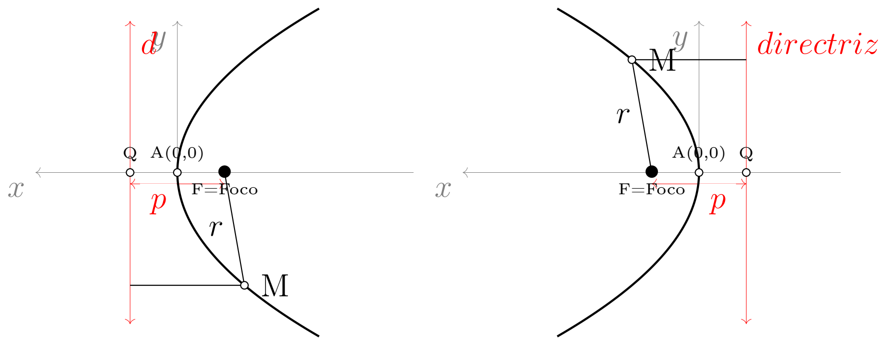
$$\boxed{2px = y^2}$$

5.3 TEOREMA 1 (Ecuaciones de la Parábola)

i . La ecuación de la parábola que tiene su foco en $F(\frac{p}{2}, 0)$ y por directriz la recta $x = \frac{-p}{2}$ viene dada por :

$$\boxed{y^2 = 2px}(3)$$

Recíprocamente si un punto P del plano, satisface la ecuación $y^2 = 2px$ entonces P está en la parábola

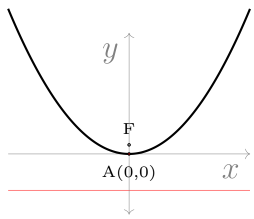


ii La ecuación de la parábola que tiene su foco en $F(0, \frac{p}{2})$ y por directriz la recta es:

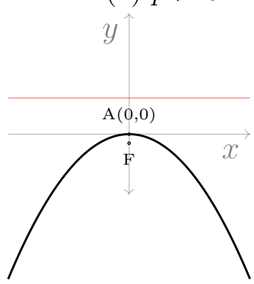
$$\boxed{x^2 = 2py}$$

iii Recíprocamente, si un punto P del plano, satisface $x^2 = 2py$ entonces P está en la parábola

Observaciones:



(a) $p > 0$



(b) $p < 0$

• En la figura aparecen las gráficas de dos parábolas abiertas hacia arriba (en el caso de p>0) y hacia abajo (p<0), respectivamente y cuyos focos están localizados en el punto $F(\frac{p}{2}, 0)$ y cuya directriz es la recta de ecuación $y = \frac{-p}{2}$.

• Además, todos sus puntos son simétricos con respecto al eje y: de aquí que las ecuaciones que representan sus lugares geométricos, presentan únicamente a la variable x elevada en una potencia par

• Igualmente, las gráficas de la corresponden a las gráficas de parábolas abiertas hacia la derecha (p > 0) e izquierda (p < 0) respectivamente, con focos en el punto F(p/2, 0) y cuya directriz es la recta de ecuación x = -p/2. Además todos sus puntos son simétricos con respecto al eje x, de aquí que las ecuaciones que representan sus lugares geométricos, poseen únicamente a la variable y elevada a su potencia par

6 Traslación de Ejes de cónicas

La ecuación de la circunferencia con centro en $C(2,3)$ y radio 2 era:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4 \Rightarrow x^2+y^2-4x+6y+9=0$$

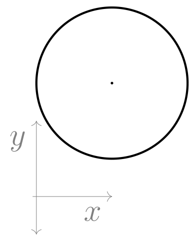
Sin embargo, si se encuentra la ecuación con centro en $C(0,0)$ y radio 2. Se obtiene

$$x^2+y^2=4$$

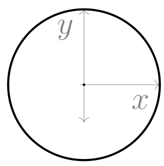
Es decir ,a veces podemos cambiar la ecuación sin cambiar la forma de la gráfica

- Si en el plano cartesiano $x-y$ se eligen nuevos ejes coordenados paralelos a los ejes x e y, se dice entonces que ha habido una **Traslación de ejes**
- Al fin de analizar los cambios que se presenten en las coordenadas de los puntos del plano al introducir un nuevo sistema de coordenadas x' e y' paralelo a los ejes x e y, se toma un punto fijo $O'(h,k)$ que se llama: ORIGEN del nuevo sistema.

  Sea ahora, un punto P(x, y) del plano, cuyas coordenadas están referidas al sistema con origen O(O, O)

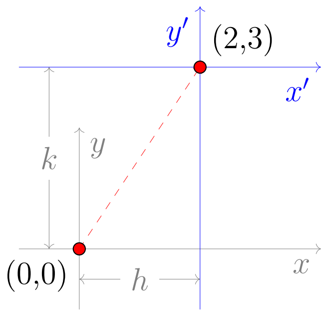


(a) $x^2+y^2-4x+6y-9=0$



(b) $x^2+y^2=4$

Entonces las coordenadas de $P(x', y')$ referidas al sistema $x' - y'$ vienen dadas por las relaciones: $x = x' + h$,$y = y' + k$ llamadas: ECUACIONES DE TRASLACIÓN DE EJES



Observación: La traslación de ejes modifica la ecuación de una curva y algunas veces la simplifica, pero no altera la forma de la curva.

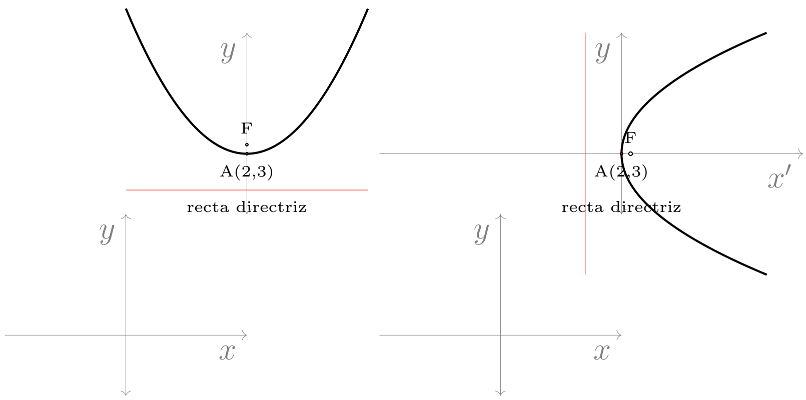
Teorema (Ecuaciones de la parábola. Forma general)

i. La ecuación de la parábola con vértice en el punto $V(h, k)$, que tiene su foco en y por directriz la recta: $y = k - \frac{p}{2}$ viene dada por:

$$(x - h)^2 = 2p(y - k)$$

La ecuación de la parábola con vértice en el punto $V(h, k)$, que tiene su foco en $F(h + \frac{p}{2}, k)$ y por directriz la recta: $x = h - \frac{p}{2}$ viene dada por:

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$



Observación: Las ecuaciones después de simplificarlas, pueden expresarse en la forma:

$$x^2 - 2hx - 2py + (2pk + h^2) = 0$$

$$y^2 - 2ky - 2px + (2pk + k^2) = 0$$

En estas ecuaciones puede notarse que una de las variables aparece al cuadrado y la otra lineal.

La parábola siempre se abre en la dirección del eje cuya variable aparece lineal.

Así por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 2hx - 2py + (2pk + h^2) = 0$$

representa una parábola que se abre hacia el semieje y positivo (si $p > 0$) o hacia el semieje y negativo (si $p < 0$).

Igualmente, la ecuación

$$x^2 - 2hx - 2py + (2pk + h^2) = 0$$

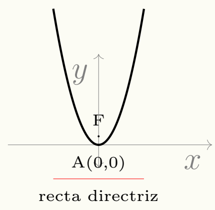
representa una parábola abierta hacia la derecha (si $p > 0$) o hacia la izquierda (si $p < 0$).

Ejemplo

Dada la parábola $x^2 = 3y$, calcular su vértice, su foco y la recta directriz.

Solución:

$2p = 3 \Rightarrow p = \frac{3}{4} = 0{,}75$.Vértice A$(0,0)$. Foco $F(0, 0{,}75)$. Recta directriz $y = -0{,}75$

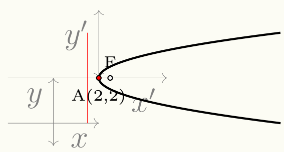


Ejemplo

Dada la parábola $(y-2)^2 = 2(x-2)$, calcular su vértice, su foco y la recta directriz.

Solución:

$2p = 2 \Rightarrow p = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{p}{2} = 0{,}5$.Vértice A$(2,2)$. Foco $F(0, 2{,}5)$. Recta directriz $x = 1{,}5$



7 Problemas resueltos

Ejemplo

Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $(7,-3)$ **y que es tangente a la recta** $3x-4y+5=0$.

Solución:

El radio, r, de la circunferencia es igual a la distancia del centro a la recta dada:

$d(C,r)=\frac{|3\cdot 7-4\cdot(-3)+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|21+12+5|}{\sqrt{25}}=\frac{38}{5}$

La ecuación será: $(x-7)^2+(y+3)^2=(\frac{38}{5})^2 \Rightarrow x^2+49-14x+y^2+9+6y=\frac{1444}{25} \Rightarrow 25x^2+25y^2-250x+150y-1386=0$

Ejemplo

a) Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:$2x^2+2y^2-12x-8y=24$

b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 7, que es concéntrica a la del apartado anterior.

Solución:

$2x^2+2y^2-12x-8y=24 \Rightarrow 2x^2+2y^2-12x-8y=24$

Divide ambos lados de la ecuación por 2 . $x^2+y^2-6x-4y=12$

Completamos el cuadrado de x^2-6x .

$(x-3)^2+y^2-4y=12+9$

Completa el cuadrado de y^2-4y sumando 4 a ambos lados.

$(x-3)^2+(y-2)^2=12+9+4$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=25$$

El centro del círculo se ubica en (3,2) y radio es 5.

La circunferencia concentrica sería $(x-3)^2+(y-2)^2=49$

Ejemplo

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia al punto A(1, 0), es el triple de su distancia a la recta $x = 2$. Identifica la figura que obtienes.

Solución:

Si P(x, y) es un punto del lugar geométrico, tenemos que: $dist(P, A) = 3dist(P, x = 2)$, es decir :$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 3|x-2|$.

Elevamos al cuadrado y operamos : $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9(x^2 + 4 - 4x)$.

$8x^2 - y^2 - 34x + 35 = 0$.Es una hipérbola.

Ejemplo

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del plano cuyo cociente de distancias a los puntos $M(6, 0)$ y $N(–2, 0)$ es 3 (es decir, $\frac{|PM|}{|PN|} = 3$)?

Solución:

$X = (x, y)$ punto del lugar geométrico.

El lugar geométrico de los puntos X cuyo cociente de distancias a los puntos $M(6, 0)$ y $N(-2, 0)$ es 3

$$\frac{\sqrt{(x-6)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = 3$$

Vamos a cuadrar ambos lados de la ecuación para eliminar los denominadores:

$((x-6)^2 + y^2) = 3^2((x+2)^2 + y^2)$

Esto simplifica a:

$(x-6)^2 + y^2 = 9 \cdot [(x+2)^2 + y^2]$

Expandimos los términos cuadráticos y simplificamos:

$(x^2 - 12x + 36) + y^2 = 9(x^2 + 4x + 4 + y^2) \Rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2$

$8x^2 + 48x + 8y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x = 0$

Es una circunferencia de centro (–3, 0) y radio $r = \sqrt{9} = 3$.

Ejemplo

Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(-5, 12)$ y radio 13. Comprueba que pasa por el punto (0, 0).

Solución:

$(x+5)^2+(y-12)^2=169 \rightarrow x^{\,2}+y^2+10x-24y=0$

Si sustituimos $x=0, y=0$ en la ecuación, esta se verifica. Por tanto, la circunferencia pasa por (0, 0).

Ejemplo

Halla la ecuación de la parábola de foco $F(-1,0)$ y directriz $r : x=1$.

Solución:

Si $P\ (x,y)$ es un punto de la parábola, entonces: $dist(P,F)=dist(P,r)$

$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=|x-1|$

Elevamos al cuadrado: $x^{\,2}+2x+1+y^{\,2}=x^{\,2}-2x+1$ Simplificamos: $y^{\,2}=-\,4x$

Ejemplo

Una hipérbola tiene sus focos en los puntos F1 (5, 0) y F2 (–5, 0) y su constante es k = 6. Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

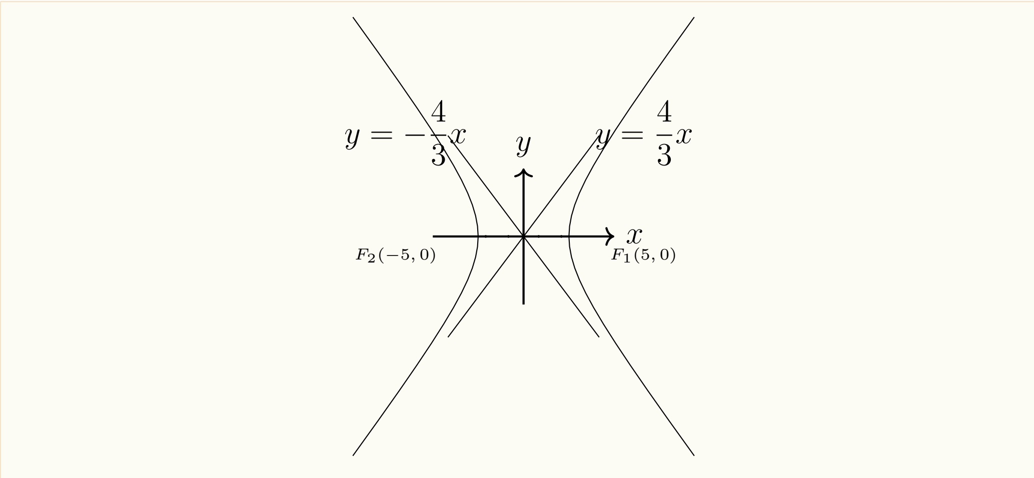
Solución:

Semieje: $k=2a=6 \rightarrow a=3$. Semidistancia focal: $F_1F_2=10 \rightarrow c=5$.

Cálculo de b: $b^2=c^2-a^2 \rightarrow b=\sqrt{25-9}=\sqrt{16} \rightarrow b=4$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}\approx 1,67$.Asíntotas: $y=\frac{4}{3}x; y=-\frac{4}{3}x$

Ecuación reducida $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$



$y = -\frac{4}{3}x$
$y = \frac{4}{3}x$
y
x
$F_2(-5,0)$
$F_1(5,0)$