

1. Ángulos de un triángulo. En un triángulo se conocen dos de sus ángulos. Determina el valor del tercero:

a) $A = 36^{\circ} 0' 12''$; $B = 48^{\circ} 36' 54''$.

b) $A = \frac{\pi}{3}$ rad; $B = \frac{3\pi}{8}$ rad.

Teorema de los senos y cosenos

2. Calcula a y b en el triángulo ABC en el que: $\hat{A} = 55^{\circ}$, $B = 40^{\circ}$, $c = 15$ m.
3. Halla el ángulo C y el lado b en el triángulo ABC en el que: $A = 50^{\circ}$, $a = 23$ m, $c = 18$ m.
4. Resuelve los siguientes triángulos:
- a) $\hat{A} = 35^{\circ}$ $C = 42^{\circ}$ $b = 17$ m
- b) $B = 105^{\circ}$ $b = 30$ m $a = 18$ m
5. Dos amigos situados en dos puntos, A y B, que distan 500 m, ven la torre de una iglesia, C, bajo los ángulos $BAC = 40^{\circ}$ y $ABC = 55^{\circ}$. ¿Qué distancia hay entre cada uno de ellos y la iglesia?
6. Calcula a en el triángulo ABC, en el que: $\hat{A} = 48^{\circ}$, $b = 27,2$ m, $c = 15,3$ m.
7. Halla los ángulos del triángulo ABC en el triángulo ABC, donde $A = 48^{\circ}$ $b = 27,2$ $c = 15,3$
8. Resuelve los siguientes triángulos:
- a) $b = 32$ cm $a = 17$ cm $C = 40^{\circ}$
- b) $a = 85$ cm $c = 57$ cm $B = 65^{\circ}$
- c) $a = 23$ cm $b = 14$ cm $c = 34$ cm
9. Desde la pua de mi casa, A, veo el cine, C, que está a 120 m, y el kiosko, K, que está a 85 m, bajo un ángulo $CAK = 40^{\circ}$. ¿Qué distancia hay entre el cine y el kiosko?

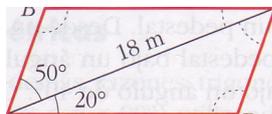
Resolución de triángulos cualesquiera

10. Resuelve los siguientes triángulos:
- a) $a = 100$ m $B = 47^{\circ}$ $C = 63^{\circ}$
- b) $b = 17$ m $A = 70^{\circ}$ $C = 35^{\circ}$
- c) $a = 70$ m $b = 55$ m $C = 73^{\circ}$
- d) $a = 122$ m $c = 200$ m $B = 120^{\circ}$

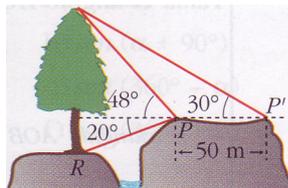
e) $a = 100 \text{ m}$ $b = 185 \text{ m}$ $c = 150 \text{ m}$

f) $a = 15 \text{ m}$ $b = 9 \text{ m}$ $A = 130^\circ$

11. Una estatua de 2,5 m de alto está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y la estatua, bajo un ángulo de 40° . Calcula la altura del pedestal.
12. Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A ya forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?
13. Halla el lado del octógono inscrito y del octógono circunscrito en una circunferencia de radio 5 cm.
14. En una circunferencia de radio 6cm y centro O trazamos una cuerda AB a 3 cm del centro. Halla el ángulo AOB.
15. Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65° . ¿A qué distancia de A se encuentra la emisora?
16. En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?
17. Calcula el área y las longitudes de los lados y de la otra diagonal:

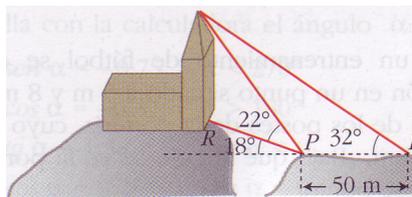


18. Dos barcos parten de un punto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127° . El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde? (Nudo = milla / hora; milla = 1 850 m).
19. En un rectángulo ABCD de lados 8 cm y 12 cm, se traza desde B una perpendicular a la diagonal AC, y desde D, otra perpendicular a la misma diagonal. Sean M y N los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento MN.

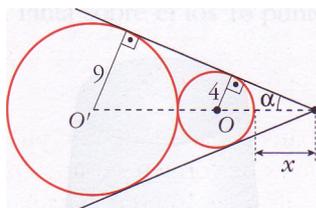


20. En el triángulo ABC, halla C. En el triángulo BMC, halla MC Ten en cuenta que: $MN = AC - 2 MC$ [Warning: Draw object ignored]

21. Halla la altura del árbol QR de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.
22. Calcula la altura de QR, cuyo pie es inaccesible y más alto que el punto donde se encuentra el observador, con los datos] de la Figura.



23. En la pirámide de Keops, de base cuadrada, el lado de la base mide 230 m y el ángulo que forma una cara con la base es de 52° . Calcula:
- La altura de la pirámide.
 - La altura de una cara.
 - La longitud de una arista.
 - El ángulo que forma la arista con la base del triángulo.
 - El ángulo superior de cada cara.
 - El volumen de la pirámide.
24. Dos vías de tren de 1,4 m de ancho se cruzan formando un rombo. Si un ángulo de corte es de 40° , ¿cuánto valdrá el lado DEl rombo?
25. En un círculo de 15 cm de radio, halla el área comprendida entre una cuerda de 20 cm de longitud y el [diámetro paralelo a ella.
26. Dos circunferencias son tangentes exteriormente y sus radios miden 9 m y 4 m. Halla el ángulo, 2α , que forman sus tangentes comunes.



- a) Nota Los radios forman con las tangentes dos triángulos rectángulos.
Como $OP = 4 + x$, se tiene:

En los ejercicios siguientes no puede usarse la calculadora a menos que se indique

27. Hallar razonadamente las razones trigonométricas del ángulo de 2655°

28. Resuelve el sistema $\begin{cases} x + y = 120 \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \end{cases}$
29. Resuelve el sistema $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \sqrt{3} \\ \operatorname{cos} x + \operatorname{cos} y = 1 \end{cases}$
30. Demuestra la siguiente igualdad: $\frac{\operatorname{sec} x - \operatorname{cos} x}{\operatorname{csc} x - \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg}^3 x$
31. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos} 2x = 1$.
32. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = \sqrt{2}$.
33. Resuelve la ecuación $\operatorname{tg} 2x + 3 = 4 \operatorname{tg} x$
34. Calcula el seno, coseno y tangente de un ángulo del tercer cuadrante del que se sabe que su cosecante es igual a -2.
35. Resuelve las ecuaciones siguientes:
- a) $4 \operatorname{arctg} (x^2 - 3x - 3) = \pi$
 1) $4 \operatorname{arctg} (x^2 - 3x - 3) = 3\pi$
36. Halla las razones trigonométricas de los ángulos de 105° , 15° , 75° , 315° y $157^\circ 30'$.
37. Si $\operatorname{cotg} \alpha = 4/3$. Hallar $\operatorname{cos} (2\alpha)$ y $\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}$
38. Si $\operatorname{tag} \alpha = \frac{3}{4}$ y el ángulo está en el tercer cuadrante. Hallar las siguientes razones
- a) $\operatorname{tg}(90 - \alpha)$ $\operatorname{Tg}(180 - \alpha)$ $\operatorname{tg}(270 - \alpha)$ $\operatorname{tg}(-\alpha)$
 b) $\operatorname{Tg}(90 + \alpha)$ $\operatorname{tg}(180 + \alpha)$ $\operatorname{Tg}(270 + \alpha)$ $\operatorname{Tg}(720 + \alpha)$
39. Si $\operatorname{sen} \alpha = 1/5$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Halla $\operatorname{sen} (2\alpha)$, $\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}$ y $\operatorname{tg}(\alpha + 30^\circ)$
40. Si $\operatorname{tag} \alpha = \frac{3}{4}$ hallar $\operatorname{tg}(\alpha + 30)$ y $\operatorname{tg}(45 + \alpha)$
41. Expresar el $\operatorname{sen} (3\alpha)$ en función del seno de α
42. Sabiendo que $\operatorname{sen} 10^\circ = 0,173$. Calcular las razones del ángulo de 20°
43. Deducir las fórmulas que permiten expresar $\operatorname{sen} (x + \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{cos} (x + \frac{\pi}{2})$ y $\operatorname{tg} (x + \frac{\pi}{2})$, en función de $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$, y $\operatorname{tg} x$.
44. La tangente de un ángulo, x , del segundo cuadrante es $-4/5$. Halla las razones trigonométricas de los ángulos $2x$ y $x/2$.
45. Deducir una fórmula que permita expresar la $\operatorname{tg}(x+y+z)$ en función de $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{tg} z$.

46. A partir de la fórmula anterior demuestra que si x, y, z son los **ángulos de un triángulo** cualquiera, entonces se cumple que $tgx+tgy+tgz = tgx tgy tgz$.

47. Demuestra que si x, y, z son los ángulos de un triángulo, entonces $tg(x+y)+tgz = 0$.

48. Demuestra la fórmula $\cos x \cos y = 1/2 (\cos(x+y) + \cos(x-y))$.

49. Deduce de la fórmula anterior el valor de $\cos 105^\circ \cos 15^\circ$.

50. Simplifica las siguientes expresiones:

$$a) \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x}{\cos + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}$$

$$b) \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} b \operatorname{cosec} a - \operatorname{cosec} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b \operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} b}$$

51. Demuestra que para cualquiera tres ángulo a, b, c

$$a) \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(b-c) + \operatorname{sen} b (\operatorname{sen}(c-a) + \operatorname{sen} c \operatorname{sen}(a-b)) = 0$$

52. Demuestra las siguientes identidades:

$$a) \operatorname{sen}(a+b) \operatorname{sen}(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a$$

$$b) tgx + \operatorname{cotg} x = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$c) 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$d) \sec(a-b) = \frac{\operatorname{seca} \operatorname{sec} b \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}{\operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b + \operatorname{seca} \operatorname{sec} b}$$

$$e) \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{(a+b) + (a-b)} = tg b$$

$$f) \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 4 \operatorname{cotg} 2x \operatorname{cosec} 2x$$

$$g) \frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

$$h) \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\operatorname{sen}(a-b)} = \frac{\operatorname{tga} \cdot \operatorname{cotg} b + 1}{\operatorname{tga} \operatorname{cotg} b - 1}$$

$$i) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + a \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = 2 \operatorname{tg} 2a$$

53. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$a) \operatorname{sen}^4 x - 2 \cos^4 x + 1 = 0$$

$$b) 4 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \cos x = 3$$

$$c) \operatorname{sen} 2x = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$d) 4 \operatorname{sen} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$$

$$e) 8 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right) = 1 + \sec x$$

$$f) \operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x -$$

$$g) \cos 2x - \cos 6x = \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$$

- h) $\operatorname{sen} x + \cos x = \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x)$
 i) $(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2 = \operatorname{sen} 2x$

54. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas:

- a)
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \& \begin{cases} 2\operatorname{sen} x = 1 - \cos y \\ 2\cos x = 1 + \cos y \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) - \cos x \cos y = 0 \\ \operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$$

55. Demostrar que $\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) + \operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$.

56. Calcula $\operatorname{arcsen}(0'5)$, $\operatorname{arcsen}(-1)$, $\operatorname{arcsen}(-\sqrt{3})$, $\operatorname{arccos}(0'5)$, $\operatorname{arccos}(-0'5)$, $\operatorname{arccos}(2)$, $\operatorname{arctg}(-1)$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

57. Calcula razonadamente:

- a) $\operatorname{arcsen}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
 b) $\operatorname{arccos}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$
 c) $\operatorname{arccos}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$
 d) $\cos\left(2 \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$
 e) $\cos(\operatorname{arctg}(-4))$
 f) $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2}))$
 g) $\cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{arccos}(-0'2)\right)$

58. Demostrar que $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$. Deducir de la fórmula anterior el valor de la expresión siguiente: $\operatorname{arctg}(0'5) + \operatorname{arccotg}(3)$.

59. Simplifica al máximo

- a) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} - \sec\alpha$
 b) $\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} : \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$$

60. Demostrar que $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

61. *Hallar el valor de A en las expresiones:*

a) $A = \frac{\cos 3\alpha - \cos \alpha}{\alpha \cos \alpha}$ $A = \frac{40^\circ + 20^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 20^\circ}$

62. Siendo $\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$ y $\left(\frac{a-b}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

a) *Hallar $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$*

b) *$\operatorname{Cos} a + \operatorname{cos} b$ a, b pertenecen al primer cuadrante*