S3r4 | 2025

MATEMÁTICAS : Bachillerato I

Funciones :Continuidad

Apuntes

by Sera

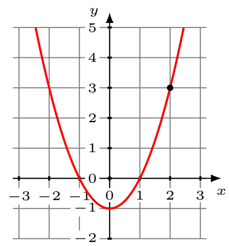
1 LíMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

El concepto de **límite** en Matemáticas tiene el sentido de **"lugar"** hacia el que se dirige una función cuando el valor de la variable independiente tiende hacia un determinado punto o en el $\pm\infty$

Veamos un ejemplo: Consideremos la función dada por la gráfica de la figura y fijémonos en el punto $x = 2$ situado en el eje de abscisas:

¿Qué ocurre cuando nos acercamos al punto 2 moviéndonos sobre el eje x?

Tomemos algunos valores como $2{,}1, 2{,}01, 2{,}001$.



Vemos en la figura que en este caso las imágenes de dichos puntos sobre la curva, $f(2{,}1)$, $f(2{,}01)$, $f(2{,}001)$ se acercan a su vez a un valor situado en el eje y, el valor $y = 3$.

La tabla de valores refuerza esa percepción gráfica.

	Hacia 2 por la izquierda(—–>)				2	(<—–)Hacia 2 por la derecha			
x	1.9	1.99	1.999	1.9999		2.0001	2.001	2.1	2.1
$f(x)$	**2.61**	**2.9601**	**2.996001**	**2.99960001**		**3.00040001**	**3.004001**	**3.0401**	**3.41**

Si nos acercamos a 2 por la otra parte, es decir, con valores como $1{,}9, 1{,}99, 1{,}999$ en este caso las imágenes $f(1{,}9), f(1{,}99), f(1{,}999)$ se acercan también al mismo valor, y $=3$.

Concluimos que el límite de la función $f(x)$ cuando nos acercamos a $x = 2$ es 3, lo cuál expresamos con

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Intuitivamente: El límite de una función en un punto x_0 es el valor L en el eje OY al que se acerca la función, $f(x)$, cuando la x se acerca, en el eje OX a dicho punto.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Sin embargo la expresión matemática rigurosa de límite es algo más compleja:

2 Definición límite de una función en un punto

Dada una función $f(x)$ y un punto $x = x_0$, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a x_0 es L, y se expresa como:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

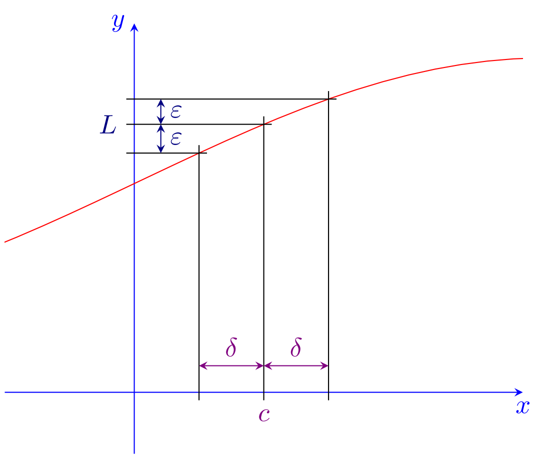
Si $\forall$ valor $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

"El límite de f de x cuando x tiende a x_0 es igual a L si y sólo si para todo número real ε mayor que cero existe un número real δ mayor que cero tal que si la distancia entre x y x_0 es menor que δ, entonces la distancia entre la imagen de x y L es menor que ε unidades"

Lo que viene a expresar esta formulación matemática es que si x está "suficientemente cerca" de x_0, entonces su imagen $f(x)$ también está muy próxima a L.

La expresión $|x - x_0| < \delta$ significa que la distancia entre x y x_0 es menor que δ

La expresión $|f(x) - L| < \varepsilon$ significa que la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ε



Tomando valores arbitrarios de ε, podemos elegir un δ **para cada uno de estos**, de modo que $f(x)$ y L se acerquen a medida x se acerca a x_0. Esta es una formulación estricta del concepto de límite de una función real en un punto de acumulación (o punto límite) del dominio de la función y se debe al matemático francés Luis Cauchy.

Esta notación es tremendamente poderosa, pues nos dice que si el límite existe, entonces se puede estar tan cerca de él como se desee.

Si no se logra estar lo suficientemente cerca, entonces la elección del δ no era adecuada.

Ejemplo.

Supongamos que se quiere demostrar que $\lim_{x \to 2}(3x-5) = 1$. El cálculo de este límite surge por simple sustitución, esto se debe a que la función afín es continua.

Utilicemos entonces la definición, debemos demostrar que para cualquier ε dado podemos hallar un δ para el cual se cumple

(*)$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(3x-5)-1| < \varepsilon$

Tomando $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$ es posible probar esto. Es válido ya que nos permite obtener un valor para cualquier ε dado, que es precisamente lo que enuncia la definición.

Tomando como hipótesis $0 < |x-2| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

Veamos que $|(3x-5)-1| = |3x-6| = 3|x-2|$, luego por hipótesis

$3|x-2| < 3\frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$ y queda demostrado (*).

Nótese que bien podríamos haber elegido $\delta = \frac{1}{6}\varepsilon$ o $\delta = \dfrac{1}{15}\varepsilon$, por ejemplo. En tanto $\delta \leq \dfrac{1}{3}\varepsilon$, siempre podremos demostrar (*).

En la práctica en muchas ocasiones es necesario calcular los llamados límites laterales, que como recordaremos se definen de la siguiente forma:

3 Definición límite lateral de una función en un punto

Se define el límite lateral por la derecha de a de la función $f(x)$, y se expresa como:

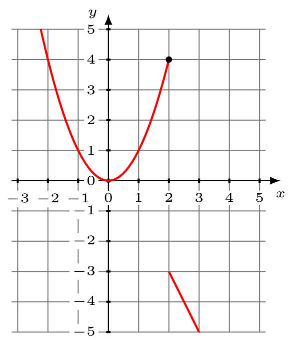
$\lim_{x \to x_{0+}} f(x)$ *al valor al que se acerca* $f(x)$ *cuando* x *se acerca a* x_0 *y toma valores mayores que* x_0.

De igual modo, el límite lateral por la izquierda de a de la función $f(x)$ se expresa como:

$\lim_{x \to x_{0-}} f(x)$ *y se define como el límite al que se acerca* $f(x)$ *cuando* x *se acerca a* x_0 *y toma valores menores que* x_0.

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ \\ -2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -3 \Longrightarrow$ No existe $\lim_{x\to 2} f(x)$

3.1 Propiedad:

Para que una función $f(x)$ tenga límite en $x = x_0$ es necesario y suficiente que existan ambos límites laterales y coincidan, es decir:

$$\lim_{x\to x_{0^-}} f(x) = \lim_{x\to x_{0^-}} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Ejemplo:

Ejemplo 1

Aplicando la definición de límite, probar que: $\lim_{x\to 1} \frac{x+3}{2} = 2$

Solución

$\lim_{x\to 1} \frac{x+3}{2} = 2$ si $\forall\varepsilon > 0\ \exists\partial > 0$ tal que si $|x-1| < \partial \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$

Si $|\frac{x+3}{2} - 2| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{x+3-4}{2}| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{x-1}{2}| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < 2\varepsilon$

Luego basta tomar $\delta = 2\varepsilon$ para que si $|x-1| < \partial \Rightarrow |\frac{x+3}{2} - 2| < \varepsilon$

Ejemplo 2

- Aplicando la definición de límite, probar que: $\lim_{x\to 1} (3x+1) = 4$

Solución:

$\lim_{x\to 1}(3x+1) = 4 si \forall\varepsilon > 0\ \exists\partial > 0$ tal que si$|x-1| < \partial \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$

$0 < |x-1| < \delta$ entonces $|(3x+1) - 4| < \varepsilon$

Puesto que la elección de δ depende de ε, es necesario establecer una relación entre los valores absolutos $|(3x+1) - 4|$ y $|x-1|$

$|3x-3| = |3x-3| = 3|x-1|$

De tal manera, para cada $\varepsilon > 0$ dado, se puede tomar $\delta = \varepsilon/3$. Esto es porque

$0 < |x-1| < \delta$ entonces $3|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \varepsilon/3 \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Implica que $3|x-1| < 3(\frac{\varepsilon}{3}) = \varepsilon$

Ejemplo 3

Demostrar que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2-x-1}{x-1} = 3$

Análisis preliminar.

Sea ε un número positivo cualquiera dado. Se debe hallar un δ tal que:

Si $0 < |x-1| < \delta$, entonces $\left|\frac{2x^2-x-1}{x-1} - 3\right| < \varepsilon$ (1)

Para ello, considere inicialmente la desigualdad de la derecha de (1).

$\left|\frac{2x^2-x-1}{x-1} - 3\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(2x+1)(x-1)}{x-1} - 3\right| < \varepsilon$ (factorizando)

$|(2x+1) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x-2| < \varepsilon$ (simplificando, puesto que $x - 1 \neq 0$)

$\Leftrightarrow 2\,|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $x \neq 1(2)$

Comparando la desigualdad del lado izquierdo de (1) con la desigualdad (2), se puede escoger $\partial = \frac{\varepsilon}{2}$ (cualquier valor menor funciona).

Prueba formal:

Dado $\varepsilon > 0$,existe $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, tal que,

$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \delta \wedge x \neq 1 \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge x \neq 1$

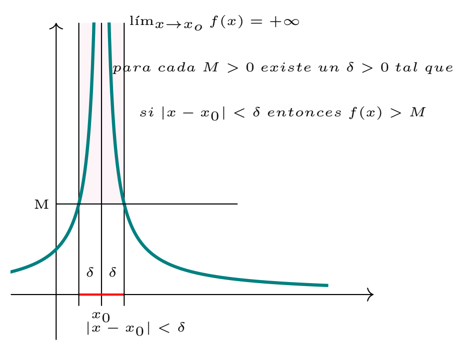
$\Rightarrow |2x-2| < \varepsilon \wedge x \neq 1 \Rightarrow |(2x+1)-3| < \varepsilon \wedge x \neq 1 \Rightarrow \left|\frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)} - 3\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{2x^2-x-1}{(x-1)} - 3\right| < \varepsilon$

4 Límite infinito en un punto x_0 (Asíntotas verticales)

Dada cierta función f, diremos que tiende a infinito cuando crezca indefinidamente a medida que nos acercamos a cierto punto x_0 en el dominio. Esto equivale a afirmar que f no está acotada, para valores del dominio *«suficientemente cercanos»* a x_0. Esto se denota así

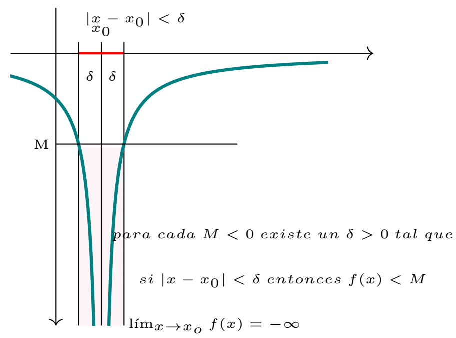
Se dice que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si para cada M real existe $\delta > 0$ / si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$



O bien:

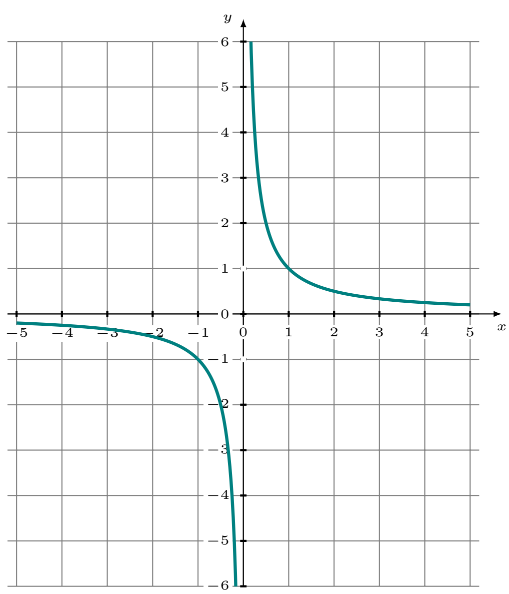
Dada cierta función f, diremos que tiende a $-\infty$ cuando decrezca indefinidamente, a medida que nos acercamos a cierto punto x_0 en el dominio. Esto equivale a afirmar que $f(x)$ no está acotada inferiormente, para valores del dominio «suficientemente cercanos» a x_0.

Se dice que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si para cada M real existe $\delta > 0$ / si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M$



Ejemplo

Como ejemplo, tomemos la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cuya gráfica en el plano es una hipérbola equilátera centrada en el origen de coordenadas. Tomando x muy cercano a cero, la función $f(x)$ toma valores muy grandes, por eso se dice que $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a cero por la derecha (tiene una **asíntota vertical** en $x = 0$).



Límite lateral derecho:
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 \;/\; 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > M$

Tomemos $\delta = \dfrac{1}{M}$, en este caso la demostración es inmediata ya que

$$0 < x - 0 < \frac{1}{M} \Rightarrow x < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x} > M$$

Límite lateral izquierdo:
$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 \;/\; 0 < 0 - x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} < -M$

Tomemos $\delta = \dfrac{-1}{M}$, en este caso la demostración es inmediata ya que

$$0 < 0 - x < \frac{1}{M} \Rightarrow x > \frac{-1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x} < -M$$

Notas:

- El hecho de que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ no implica que sea posible la división por cero. Según la definición de este límite, $0 < |x| < \delta \Rightarrow x \neq 0$, con lo cual, $\dfrac{1}{0} \neq \infty$. En definitiva, $\nexists \dfrac{1}{0}$ /es decir, esta expresión es indefinida.
- Puede haber infinitas asíntotas verticales como en el caso de la función $f(x) = tag(x)$ o $f(x) = sec(x)$
- Para calcular las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = \frac{(x-3)\cdot(x+2)}{x(x-2)}$, buscamos, en primer el dominio $D = R - \{0, 2\}$. El lugar donde habrá posiblemente :
  - Asíntotas verticales en $x_0 = 0$ y $x_0 = 2$
  - $\underset{x\to 0}{lim} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = \frac{-6}{0} = \pm\infty$].Luego $x = 0$ es una Asíntota vertical
  - $\underset{x\to 2}{lim} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = \frac{-4}{0} = \pm\infty$].Luego $x = 2$ es una Asíntota vertical.

5 Límites finitos en el infinito(Asíntotas horizontales)

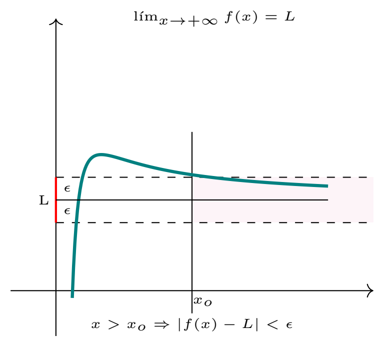
La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de $y = f(x)$ si sucede que

$$\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = L$$

Más formal: Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es L si para cualquier entorno de centro L y radio ε, tan pequeño como se quiera, se puede encontrar un número real x_0, , a partir del l cual las imágenes de $x > x_o$ pertenecen a dicho entorno:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \ = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists x_o \in \mathbb{R}\ ,\ Si\ \ x > x_o \Rightarrow |f(x)\ - L| < \varepsilon$$

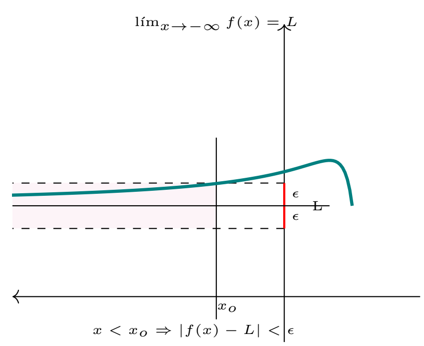
En este caso la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica



Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a -∞ es L si para cualquier entorno de centro L y radio ε, tan pequeño como se quiera, se puede encontrar un número real x_o, tan pequeño como sea necesario, a partir del cual las imágenes de $x < x_o$ pertenecen a dicho entorno:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \ = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists x_o \in R\ ,\ Si\ \ x < x_o \Rightarrow |f(x)\ - L| < \varepsilon$$

En este caso la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica:



Nota: Como máximo puede haber hasta dos asíntotas horizontales :Una en el infinito y otra en el -infinito

- **Ejemplo.**

Para calcular las asíntotas horizontales de $f(x) \ = \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = \frac{(x-3)\cdot(x+2)}{x(x-2)}$, buscamos, en primer lugar, la asíntota horizontal derecha:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = [\frac{\infty}{\infty}] IND.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1$ Por tanto, como es un valor concreto, $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Ahora, la izquierda:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = [\frac{\infty}{\infty}]$ IND

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1$ Por tanto, como es un valor concreto, $y = 1$ es una asíntota horizontal.

- **Ejemplo:** Demuestra que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{x} = 1$

Como $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{x} = 1 <=> \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$, demostraremos este ultimo limite.

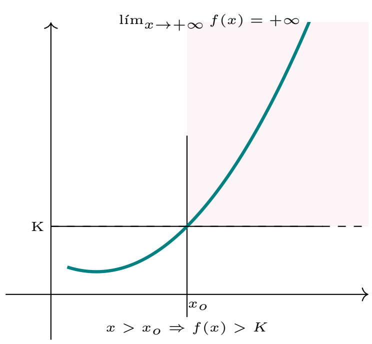
Sea $\epsilon > 0$. Hay que encontrar un número h tal que si x > h, entonces $|1+\frac{2}{x}-1| < \epsilon$, lo que es equivalente,$|1 + \frac{2}{x} - 1| < \epsilon$. Basta con tomar $h = \frac{2}{\epsilon}$, puesto que si $x > \frac{3}{\epsilon}$, entonces$|\frac{x+2}{x} - 1| = \frac{2}{x} < \epsilon$.

5.1 Ramas infinitas en el infinito.

El límite de una función cuando x tiende a infinito es infinito si podemos conseguir que $f(x)$ sea tan grande como queramos, sin más que dar a x valores suficientemente grandes. Formalmente:

- Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es ∞si para cualquier número real K se puede encontrar otro número real x_0 a partir del cual las imágenes de $x > h$ son mayores que k :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists x_o \in R\ ,\ Si\ \ x > x_o \Rightarrow f(x) > K$$



■**Ejemplo:** Demuestra que $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x = +\infty$

Dado $K > 0$, buscamos $x_o > 0$ tal que si $x > x_o$ entonces $2^x > K$.

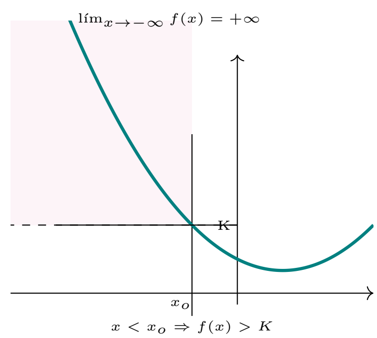
El número x_o buscado puede ser $x_o = K + 1$, dado que $2^{K+1} > K$.

Realmente bastard tomar $x_o = log_2 K$, con lo que si $x > log_2 M$, se cumple que $2^x > 2^{log_2 K} = K$.

Asi, si se toma $K = 10000$, basta con tomar $x_o = log_2 10000$, con lo que si $x > log_2 10000$, se cumple que $2^x > 2^{log_2 10000} = 10000$.

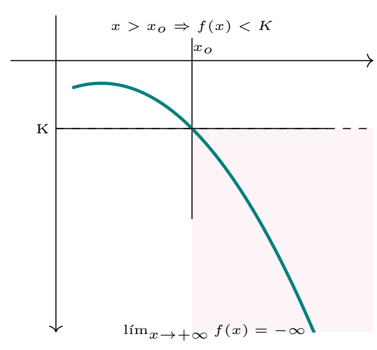
- Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a -∞ es ∞ si para cualquier número real K se puede encontrar otro número real x_o a partir del cual las imágenes de $x > x_o$ son mayores que k :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \ = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists x_o \in R \ , \ Si \ \ x < x_o \Rightarrow f(x) \ > K$$



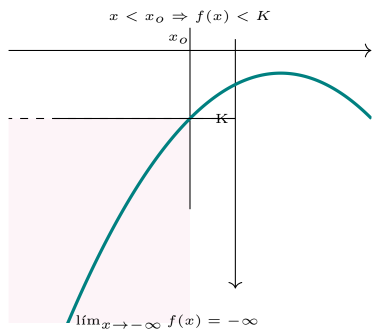
- Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es -∞ si para cualquier número real K se puede encontrar otro número real x_o a partir del cual las imágenes de $x > x_o$ son mayores que K :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \ = -\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists x_o \in R \ , \ Si \ \ x > x_o \Rightarrow f(x) \ < K$$



- Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a -∞ es ∞ si para cualquier número real K se puede encontrar otro número real x_o a partir del cual las imágenes de $x > x_o$ son mayores que K :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall K > 0, \exists x_o \in R \text{ , } Si \ \ x < x_o \Rightarrow f(x) < K$$



6 Asíntotas Oblicuas

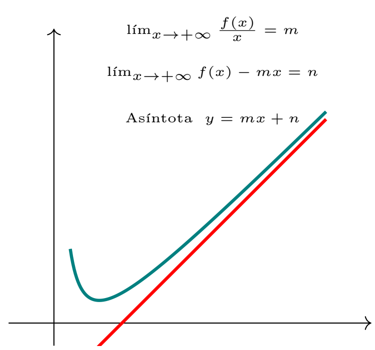
Intuitivamene hablando una recta es asíntota de una función $f(x)$ cuando x tiende a ∞ si ambas tienen *«el mismo comportamiento»* cuando x tiende a ∞

Formalmente :

Una recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ cuando existen y son finitos los límites:

$\lim\limits_{x\to} \frac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \text{mx} = n$

Las asíntotas horizontales son un caso particular de las oblicuas para el caso en que $m = 0$



Calcula las asíntotas oblicuas de $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Método 1 (dividiendo)

Si hacemos la división de los polinomios obtenemos que el cociente

es $C = x - 1$ y el resto $R = 1$

$f(x) = \frac{x^2}{x+1} = (x-1) + \frac{1}{x-1}$
Por tanto la asíntota es $y = x - 1$ (será siempre el cociente de la división)
Método 2 (con límites)

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2)}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1 \Rightarrow m = 1$

$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = n \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2-x}{x+1} = -1 \Rightarrow n = -1$

Por tanto la asíntota es $y = x - 1$ en el ∞

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2)}{x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1 \Rightarrow m = 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = n \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x^2-x}{x+1} = -1 \Rightarrow n = -1$

Por tanto la asíntota en el $-\infty$ es $y = x - 1$. Hay dos asíntotas oblicuas pero son la misma

7 Operaciones con límites

7.1 Límite de la suma

El límite de una suma es igual a la suma de los límites de cada término, siempre que estos límites sean finitos.

$\lim_{x\to a} f(x) = b$,y $\lim_{x\to a} g(x) = c \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x + g(x) = b + c$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x + g(x) = +\infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x + g(x) = \acute{} - \infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x + g(x) = +\infty$

Cuando $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ el $\lim_{x\to a} f(x) + g(x)$ no puede determinarse, se dice que es INDETERMINADO de la forma $+\infty - \infty$.

7.2 Límite del producto

$\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)\ g(x) = bc$

$\lim_{x\to a} f(x) = b$(b$\neq$0), $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)\ g(x) = \infty$

Si b $= 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)\ g(x) = \infty$ no puede determinarse. Se dice que es una INDETERMINACIÓN de la forma $0 \cdot \infty$

7.3 Límite del cociente

$\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$ (c distinto de 0) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$

Si $\lim_{x\to a} f(x) \ = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no puede determinarse. Se dice que es INDETERMINADO de la forma $\frac{0}{0}$.

Si $\lim_{x\to a} f(x) \ = \infty \ \lim_{x\to a} g(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no puede determinarse. Se dice que es INDETERMINADO de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

7.4 Límite exponencial

Caso 1: $\lim_{x\to a} f(x) \ = b, \ \lim_{x\to a} g(x) = c$ (c$\neq$0)$\Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \ = b^c$

Caso 2: $\lim_{x\to a} f(x) \ = b, \ \lim_{x\to a} g(x) = 0$ [$\Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \ = 1$

Caso 3: $\lim_{x\to a} f(x) \ = b$,(b>1) $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \ = +\infty$

Caso 4: $\lim_{x\to a} f(x) \ = b$,(b>1) $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \ = 0$

Si $\lim_{x\to a} f(x) \ = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0, \ \lim_{x\to a} f(x) \ = b$ no puede determinarse. Se dice que es INDETERMINADO de la forma 0^0

Si $\lim_{x\to a} f(x) \ = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0, \ \lim_{x\to a} f(x)\ g(x)$ no puede determinarse. Se dice que es INDETERMINADO de la forma ∞^0.

Si $\lim_{x\to a} f(x) \ = 1$ y $\lim_{x\to a} f(x) \ = \infty, \ \lim_{x\to a} f(x)$ no puede determinarse. Se dice que es INDETERMINADO de la forma 1^∞.

8 Operaciones con expresiones infinitas

$(+\infty) + l = +\infty$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + l = -\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$-(-\infty) = +\infty$

&

$(+\infty) \cdot (\pm l) = \pm\infty$

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) \cdot (\pm l) = -\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = \mp\infty$

$\frac{l}{\pm\infty} = 0$

$\frac{l}{0} = \pm\infty \quad \text{si} \quad l \neq 0$

$\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$

$\frac{0}{\pm\infty} = 0$

&

$(+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$

$(+\infty)^{(-\infty)} = 0$

$(+\infty)^{(+l)} = +\infty$

$(+\infty)^{(-l)} = 0$

$l > 1$

9 Indeterminaciones

Las propiedades generales permiten, junto con la definición, calcular límites indeterminados mediante transformaciones algebraicas.

Hay varios tipos de indeterminaciones, entre ellas las que se muestran en la tabla siguiente. Considerar ∞ como el límite que tiende a infinito y 0, 1 al límite de una función que tiende a 0 o 1, respectivamente.

Operación	Indeterminación
Sustracción	$\infty - \infty$
Multiplicación	$\infty \cdot 0$
División	$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$
Elevación a potencia	$1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

Ejemplo.

$\frac{0}{0}$ es una indeterminación, es decir, no es posible, a priori, saber cual es el valor de un límite que tiende a cero sobre otro que también tiende a cero ya que el resultado no siempre el mismo. Por ejemplo:

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{t^2} = \infty$, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2}{t} = 0$

Nótese que hubiera sido imposible «eliminar» las indeterminaciones en los ejemplos anteriores si no se hubiera supuesto $t \neq 0$, desigualdad que se deduce de la definición

9.1 INDETERMINACIÓN $\infty - \infty$

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo.-

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} - \frac{x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x+1}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

En otros casos, sobre todo en aquellos en que aparecen radicales, basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

Ejemplo.-

$\lim\limits_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[x - \sqrt{x^2+1}\right] \frac{\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]}{\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = 0$

Ejemplo

Multiplicamos y dividimos por el conjugado

$\underset{x\to\infty}{lim}\, 3x^2 - \sqrt{x^4+x} = \infty - \infty = \underset{x\to\infty}{lim}\, \frac{\left(3x^2-\sqrt{x^4+x}\right)\cdot\left(3x^2+\sqrt{x^4+x}\right)}{\left(3x^2+\sqrt{x^4+x}\right)} =$
$\underset{x\to\infty}{lim}\, \frac{9x^4-x^4-x}{3x^2+\sqrt{x^4+x}} = \infty$
Observe que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

9.2 INDETERMINACIÓN $0\cdot\infty$

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.
Ejemplo.-

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x^2}\right) = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

9.3 INDETERMINACIÓN $\frac{0}{0}$

Cuando solo aparecen funciones racionales, basta con descomponer factorialmente el numerador y el denominador y simplificar para evitar la indeterminación.
Ejemplo.-

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right) = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)} = \frac{3}{2}$$

En aquellos casos en que aparecen funciones irracionales (radicales), basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.
Ejemplo.-

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\,\frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\sqrt{1-x})}{1} = 1{+}1 = 2$$

Ejemplo .-
Calcular $\underset{x\to 4}{lim}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt{x}}} =$
$\underset{x\to 4}{lim}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt{x}}} = \frac{0}{0}$ IND.
Resolvemos multiplicando numerador y denominador por el conjugado de cada uno:
$\underset{x\to 4}{lim}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt{x}}} = \underset{x\to 4}{lim}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\,\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}} = \underset{x\to 4}{lim}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x}}\,\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+2} = \underset{x\to 4}{lim}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\,\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}} =$
$\underset{x\to 4}{lim}\frac{\sqrt{(x-4)^2(x+2\sqrt{x})}}{\sqrt{(x^2-4x)(\sqrt{x+2})}} = \underset{x\to 4}{lim}\frac{\sqrt{\cancel{(x-4)}(x-4)(x+2\sqrt{x})}}{\sqrt{\cancel{(x-4)}x(\sqrt{x+2})}} = 0$

9.4 Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

En la mayoría de los casos basta con dividir el numerador y denominador por la mayor potencia de x del denominador.

Ejemplo 1 .-

Calcular $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x}$

Indeterminaciones del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ que son cociente de polinomios y/o de raíces de polinomios. Para resolver estas indeterminaciones es preciso averiguar en cuál de los casos siguientes nos encontramos:

1. El numerador tiende a ∞ más rápidamente que el denominador, en cuyo caso el cociente tenderá a ∞. Además habrá que determinar el signo del límite, es decir, si tiende a $+\infty$ o a -∞
2. El denominador tiende a ∞ más rápidamente que el numerador, en cuyo caso el cociente tenderá a 0.
3. Numerador y denominador quedan «en tablas» (los dos son infinitos del mismo orden), en cuyo caso el límite será un número finito distinto de 0.
4. Una idea que se puede aplicar en estos casos es dividir numerador y denominador por el término que converge a infinito más rápidamente. Para ello se debe recordar que, cuando $x \to \infty$, x^n tiende a ∞ más rápidamente cuanto mayor es n.

Comenzamos por aplicar las reglas del cálculo de límites: $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x} = \frac{\infty}{\infty}$

Se trata de un límite indeterminado de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para aclarar la indeterminación, dividimos numerador y denominador por el término que tiende más rápidamente a infinito. En este caso, entre todas las potencias de x que aparecen la mayor es x^3.

Dividiendo numerador y denominador por x^3, se obtiene

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x} = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}} = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{4+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{x}{x^3}} = \frac{4}{2} = 2$$

ya que, los términos $1\frac{1}{x^2}$ y $\frac{1}{x^3}$ son del tipo $\frac{k}{\infty}$, luego convergen a cero cuando x tiende a ∞

Ejemplo 2

Calcular $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^3+1}+2x}$

Solución

De nuevo vemos que se trata de un límite de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Los términos que aparecen son :

En el numerador aparecen $\sqrt{x^4+1}$, cuyo comportamiento cuando $x \to \infty$ es como p $\sqrt{x^2} = x^{4/2} = x^2$, y x^2.

En el denominador aparecen $\sqrt{x^3+1}$, cuyo comportamiento es como $\sqrt{x^3} = x^{1/3}$, y $2x$.

Por tanto lo que tiende a infinito más rápidamente es x^2 (es la mayor potencia de x que aparece). Se puede, pues, aplicar la técnica de dividir numerador y denominador por x^2.Sin embargo, es más fácil tener en cuenta sólo los términos dominantes, como antes:

• cuando $x \to \infty$ el numerador se comporta como $x^2 + x^2 = 2x^2$.

• cuando $x \to \infty$ el denominador se comporta como $2x$.

En consecuencia se tiene $\underset{x\mapsto\infty}{lim} \frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^3+1}+2x} = \underset{x\mapsto\infty}{lim} \frac{2x^2}{2x} = \underset{x\mapsto\infty}{lim} x = +\infty$

Ejemplo 3

Calcular $\underset{x\mapsto\infty}{lim} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$

Solución

De nuevo vemos que se trata de un límite de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Los términos que aparecen son :

En el numerador aparecen $\sqrt{x^2+x}$, cuyo comportamiento cuando $x \to \infty$ es como $\sqrt{x^2} = x^{2/2} = x$.

• cuando $x \to \infty$ el numerador se comporta como x.

• cuando $x \to \infty$ el denominador se comporta como x.

En consecuencia se tiene $\underset{x\mapsto\infty}{lim} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \underset{x\mapsto\infty}{lim} \frac{x}{x} = \underset{x\mapsto\infty}{lim} 1 = 1$

Otra formade hacer será dividir numerador y denominador por el mismo valor, aquel que permita salir de la indeterminación

$\underset{x\mapsto\infty}{lim} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \underset{x\mapsto\infty}{lim} \frac{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}}{\frac{x}{x}} = \underset{x\mapsto\infty}{lim} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}{1} = \underset{x\mapsto\infty}{lim} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1} = \frac{\sqrt{1+0}}{1} = 1$

Ejemplo 4

Cálculo de límites de funciones irracionales cuando x tiende a $-\infty$

A veces este tipo de límites pueden conllevar alguna dificultad. Lo más efectivo es hacer una cambio de variable: Cambiamos x por $-x$ y $-\infty$ por $+\infty$ de forma que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

Ejemplo $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(-x)^2-9}}{-x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{-x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-x-1} = -1$

Ejemplo 5

Cálculo de límites de funciones racionales cuando x tiende a un número

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinómicas de cualquier grado, entonces: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$

Es decir, basta con sustituir x por x_0 para calcular el límite. Podemos obtener tres tipos de resultados:

- Caso 1) $\frac{a}{b}$ siendo $b \neq 0$ FIN
- Caso 2) $\frac{a}{0}$ siendo $a \neq 0$ LÍMITES LATERALES
- Caso 3) $\frac{0}{0}$ INDETERMINACIÓN

- En el caso 1 no habría ningún problema. Ya estaría el límite calculado. Veamos un ejemplo: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-1}{2x-1} = \frac{2^3-1}{2\cdot 2-1} = \frac{7}{3}$

- En el caso 2 debemos estudiar los límites laterales.

- En el caso 3 obtendríamos una INDETERMINACIÓN. Eso significa una especie de atasco, por lo que debemos tomar otro camino para calcular el límite.

Caso Indeterminación $\frac{0}{0}$

Cuando al calcular el límite de un cociente de polinomios obtenemos un resultado del tipo $\frac{0}{0}$, estamos ante una Indeterminación que se resuelve dividiendo numerador y denominador por $(x - x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}$$

Resolvemos la INDETERMINACIÓN haciendo

$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{x-x_0}}{\frac{g(x)}{x-x_0}}$$

O lo que es lo mismo factorizando los polinomios y simplificando.

Veamos un ejemplo:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{5x-5} = \frac{1^2-2\cdot 1-3}{5\cdot 1-5} = \frac{0}{0}$ Dividimos numerador y denominador por (x-1)

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{5x-5} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{x^2+2x-3}{x-1}}{\frac{5x-5}{x-1}}$

Si hacemos las divisiones del numerador y denominador (aplicando Ruffini si es necesario) obtenemos: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{x^2+2x-3}{x-1}}{\frac{5x-5}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}}{\frac{5(x-1)}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+3}{5} = \frac{4}{5}$

10 Indeterminación 1^{∞}

Ejemplo

Las indeterminaciones de tipo $\boxed{1^{\infty}}$ están basadas en el número e y se pueden resolver de muchas formas.

Una de ellas es aplicando la siguiente fórmula (donde A puede ser un número o un infinito)

$$\lim_{x\to A} f(x) \ = e^{\left[\lim\limits_{x\to A} g(x)\cdot (f(x)\ -1)\right]}$$

Veamos un ejemplo:

$\text{lím}_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{2x+1} = 1^{\infty}$

Aplicamos la fórmula

$lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{2x+1} = e^{\left[\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\cdot\left(\dfrac{x}{x+2}-1\right)\right]}$

Hacemos las operaciones aparte

$(2x+1)\cdot\left(\frac{x}{x+2}-1\right) = (2x+1)\cdot\frac{x-(x+2)}{x+2} = =(2x+1)\cdot\frac{-2}{x+2} = \frac{-4x-2}{x+2}$ Entonces tenemos:

$\text{lím}_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{2x+1} = e^{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x-2}{x+2}\right]} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$

11 Función continua en un punto y en un intervalo.

11.1 Continuidad en un punto

Diremos que la función $y = f(x)$ es continua en $x = a$. si se cumplen las siguientes condiciones:

- Existe $f(a)$, es decir, $f(x)$ está definida en $x = a$., o lo que es lo mismo $a \in D = Dominio(f)$.
- Existe el $\lim_{x \to a} f(x)$.
- Es decir el valor del límite, tanto por la derecha o por la izquierda de $x = a$. es finito y vale lo mismo
- Ambos valores coinciden, es decir $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si tenemos en cuenta la definición de límite, podemos obtener la siguiente definición equivalente:

$y = f(x)$ es **continua en** $x = a$. $\Leftrightarrow$para cada $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta \Rightarrow |(x) - f(a)| < \epsilon$

11.2 Continuidad por la derecha en un punto

Diremos que $y = f(x)$ es continua por la derecha en $x = a$. si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

11.3 Continuidad por la izquierda en un punto

Diremos que $y = f(x)$ es continua por la izquierda en $x = a$. si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

11.4 Continuidad en un intervalo abierto

Diremos que $y = f(x)$ es continua en el (a, b) si es continua en cada uno de los puntos del intervalo abierto (a, b).

11.5 Continuidad en un intervalo cerrado

Diremos que $y = f(x)$ es continua en el $[a, b]$ si:

- $y=f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a,b)g(a)≠0.
- $y=f(x)$ es continua por la derecha en $x=a$.
- $y=f(x)$ es continua por la izquierda en $x=b$.

11.6 Teorema

Si $y=f(x)$ es continua en $x=a$. ⇒existe el $\lim_{x\to a} f(x)$. (La demostración es inmediata)

Sin embargo, el teorema recíproco no es cierto en general.

Como ejemplo, comprobarlo para:

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

Existe el límite

$\underset{x\to 1}{lim} \frac{x^2-1}{x-1} = \underset{x\to 1}{lim} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \underset{x\to 1}{lim} x+1 = 2$ pero no existe $f(1)$

11.7 Teorema de la conservación del signo

Sea $y=f(x)$ una función continua en $x=a$. siendo $f(a)$ distinto de 0 existe un entorno de $x=a$. en el que los valores de $f(x)$ tienen el mismo signo que $f(a)$.

Demostración:

Supongamos que $f(a)>0$ (si fuese negativo, se razonaría de modo similar). Tomemos . $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$ Por la continuidad de y$=f(x)$ en $x=a$. se tiene que:

$\exists\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

Es decir: si $x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon) = (\frac{f(a)}{2}, \frac{3f(a)}{2})$

Por lo tanto: $f(x) > 0$. (Como se quería demostrar)

11.8 Teorema de la acotación de la función continua

Si $y=f(x)$ es continua en $x=a \Rightarrow y=f(x)$ está acotada en un cierto entorno de $x=a$.

Demostración:

Tomemos $\varepsilon = 1 > 0$. Por la continuidad de $y=f(x)$ en x $=$ a se tiene que:

$\exists\delta > 0$ tal que si $x \in (a-\delta, a+\delta)$ entonces $f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon) = (f(a)-1, f(a)+1)$

de modo que $(f(a){-}1, f(a){+}1)$ es un intervalo acotado, por lo tanto y$=f(x)$ está acotada en el entorno $(a-\partial, a+\partial)$ de $x=a$.

12 Operaciones con funciones continuas.

Sean $f(x)$ y g(x) dos funciones continuas en $x = a.$, se tiene entonces que:

$f(x) \ \pm g(x)$ es continua en $x = a.$

$f(x)\ g(x)$ es continua en $x = a.$.

$\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x = a.$ si $g(a) \neq 0$

$f(x)^{g(x)}$ es continua en $x = a.$ suponiendo que $f(a) > 0$ (para que tenga sentido la potencia).

12.1 Teorema:

Si $f(x)$ es continua en $x = a.$ y $g(x)$ es continua en $y = f(a)$ $(gof)(x)$ es continua en $x = a.$

Demostración:

Consideremos $x \xrightarrow{f} f(x) = y \xrightarrow{g} g(y)$ siendo $x \xrightarrow{f \circ g} g(y)$

Por g continua en $f(a) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ / si $|y - f(a)| < \delta$ entonces $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$

Por f continua en $a \Rightarrow$para el anterior δ $\exists \gamma > 0$ entonces $|f(x) - f(a)| < \gamma$

De lo dicho anteriormente resulta que:

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \gamma$ / $|x - a| < \gamma$ entonces $|f(x) - f(a)| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$

Ejemplo :

La función $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ ¿es continua en el punto $x = 3$?

Veamos si se cumplen las tres condiciones anteriores de continuidad:

1. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x+2}{x-2} = \frac{3+2}{3-2} = 5$

2. $f(3) = \frac{3+2}{3-2} = 5$

3. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

Por tanto, $f(x)$ es continua en el punto $x = 3$.

Ejemplo :

Dada la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x}$, estudiar la continuidad de dicha función en $x = 1$.

Veamos si se cumplen las condiciones necesarias:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{x \cdot (x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Veamos si $1 \in \mathit{Dominio} \Rightarrow f(1) = \frac{1^2-1}{1^2-1}$ $\Rightarrow$ no existe, pues se anula el denominador.

El limite y $f(1)$ no son iguales porque $f(1)$no existe y, en consecuencia, no se pueden comparar.

Por tanto, al no estar definida la función en el punto $x = 1$ no podemos hablar de la continuidad en dicho punto.

13 Discontinuidades.

Se dice que una función $y = f(x)$ es discontinua en $x = a$. si no es continua en dicho valor de x, es decir, no cumple alguna de las tres condiciones de continuidad.

13.1 TIPOS DE DISCONTINUIDADES

La discontinuidad de una función en un punto puede ser clasificada en:

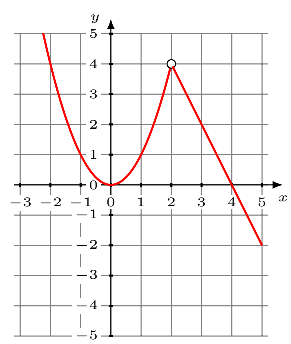
$$Función\left\{\begin{array}{l} continua \\ \\ discontinua\left\{\begin{array}{l} evitable \\ \\ esencial\left\{\begin{array}{l} de\ 1^{\underline{a}} especie\left\{\begin{array}{c} de\ salto\ finito \\ de\ salto\ infinito \\ asintótica \end{array}\right. \\ \\ de\ 2^{\underline{a}} especie \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. **Evitable:** Cuando existe el $\lim_{x\to a} f(x)$ pero no coincide con el valor de $f(a)$ por una de estas dos razones, son distintos los valores o no existe $f(a)$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to a^-} f(x) = c \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = c \\ f(a) = d \end{array}\right. \text{ o bien}\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to a^-} f(x) = c \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = c \\ f(a) \quad no\ existe \end{array}\right.$$

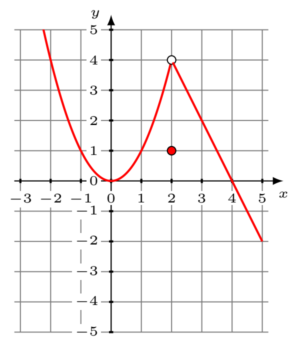
Ejemplo 1

$$f(x) = \left\{\begin{array}{cc} x^2 & si\ x < 2 \\ -2x+8 & \text{si } x > 2 \end{array}\right.$$



Ejemplo 2

$$f(x)\ =\begin{cases} x^2 & si\ x<2 \\ 1 & x=2 \\ -2x+8 & \text{si } x>2 \end{cases}$$



Si $y=f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x=a$, llamaremos verdadero valor de la función en $x=a$. al $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Dicho valor es el que convierte a la función en continua.

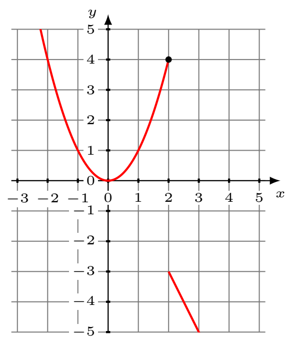
2. **De salto finito:** Cuando existe el límite por la derecha y por la izquierda (siendo ambos finitos) pero no coinciden.

$$\begin{cases} \underset{x\to a^-}{lim} f(x)=c \\ \underset{x\to a^+}{lim} f(x)=d \\ f(a)=d \end{cases} \text{o bien} \begin{cases} \underset{x\to a^-}{lim} f(x)=c \\ \underset{x\to a^+}{lim} f(x)=d \\ f(a)\quad no\ existe \end{cases} \text{o bien} \begin{cases} \underset{x\to a^-}{lim} f(x)=c \\ \underset{x\to a^+}{lim} f(x)=d \\ f(a)=c \end{cases} \text{o bien}$$

$$\begin{cases} \underset{x\to a^-}{lim} f(x)=c \\ \underset{x\to a^+}{lim} f(x)=d \\ f(a)=e \end{cases}$$

a) **Ejemplo**

$$f(x)\ =\begin{cases} x^2 & si\ x<2 \\ -2x+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$$



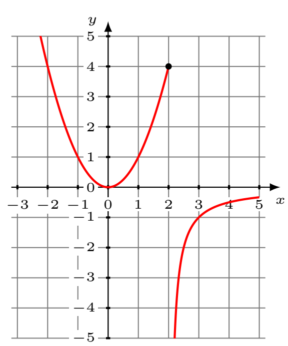
A este tipo de discontinuidad de primera especie se le llama salto finito, y el salto (Δy) viene dado por: $\Delta y = |\lim\limits_{x\to a^-} f(x) - \lim\limits_{x\to a^+} f(x)|$

3. **Salto infinito** Cuando alguno de los límites laterales no es finito.

$\left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = d \\ f(a) = d \end{array}\right.$ o bien $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = d \\ f(a) \quad \textit{no existe} \end{array}\right.$ o bien los mismos casos por la derecha de $x = a$

Ejemplo

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^2 & si\ x < 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{array}\right.$$



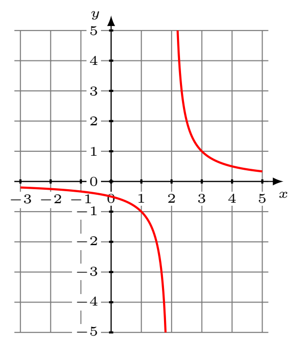
4. **Asintótica** Puede ser asintótica por la derecha, por la izquierda o por ambos lados.

$\left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = c \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = d \\ f(a) = d \end{array}\right.$ o bien $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = c \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = d \\ f(a) \quad \textit{no existe} \end{array}\right.$

o bien $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = d \\ f(a) = c \end{cases}$ o bien $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = d \\ f(a) = e \end{cases}$

Ejemplo

$$f(x) \; = \frac{1}{x-2}$$



5. **Esencial:** Cuando no existe alguno de los límites laterales (o ambos). Puede serlo por la derecha, por la izquierda o por ambos lados.

$$f(x) \; = cos\frac{1}{x}$$