MATEMATICAS (MAT I, MAS I)

1º Bachillerato

Progresiones Aritméticas y Geométricas

Departamento de Matemáticas

Ies Dionisio Aguado

1 Progresiones aritméticas

1.1 Definición Sucesión

Una sucesión de números reales es un conjunto ordenado de infinitos números reales $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...$

Cada uno de los números reales se llama **término de la sucesión**.

Ejemplo:

El conjunto de números pares 2,4,6,8,... es una sucesión de números reales. Al término:

$a_n = 2n$ se le llama **término general**.

Consideremos la sucesión de término general $a_n = 3n + 1$

$a_n = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22...$

Cada término de la sucesión es igual que el anterior más 3. Se dice que la sucesión a_n es una progresión aritmética y que la diferencia de la progresión es d = 3

1.2 Definición:Progresión aritmética

Es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado diferencia que se representa por d.

En la progresión anterior $a_1 = 5, a_2 = 8$ y $d = 8 - 5 = 3$.

En ocasiones nos referimos a la progresión formada por los n primeros términos de la progresión; en este caso se trata de una progresión aritmética limitada.

Son progresiones aritméticas:

- Los múltiplos de 2 o números pares: 2, 4, 6, 8, 10... La diferencia es d = 2.
- Los múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15... La diferencia es d = 3.
- Los múltiplos de a: a, 2a, 3a, 4a, 5a... La diferencia es d = a.

1.3 Término general.

- Veamos la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...$ Según la definición, cada término es igual al anterior más la diferencia.

  $a_2 = a_1 + d$

  $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

  $a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

  $a_5 = a_4 + d = a_3 + d + d = a_2 + d + d + d = a_1 + 4d$

  Generalizando este proceso se obtiene el término general:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Ejemplos:

El término general de la progresión aritmética 5, 8, 11, 14... es:

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$

El término general de una progresión aritmética en la que $a_1 = 13$ y $d = 2$ es:

$a_n = 13 + (n-1) \cdot 2 = 13 + 2n - 2 = 2n + 11$

Vamos a hallar el primer término de una progresión aritmética sabiendo que $a_1 1 = 35$ y $d = 4$.

Para ello escribimos $a_{11} = a_1 + (11-1) \cdot 4$, es decir, $35 = a_1 + 40$, de donde $a_1 = 35 - 40 = -5$

Se puede conseguir otra expresión para el término general en función de otro término cualquiera, en lugar del primer término.

Como $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ y $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$, despejando a_1 en ambas expresiones e igualando resulta:

$a_n = a_k + (n-k) \cdot d$

1.4 Interpolación de términos.

Supongamos que queremos intercalar entre 2 y 14 tres números a, b y c de manera que 2, a, b, c, 14 estén en progresión aritmética.

Tenemos que $a_1 = 2$, $a_5 = 14$ y $n = 5$. Aplicando la expresión del término general de una progresión aritmética, se tiene que:

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 14 = 2 + 4d \Rightarrow ; d = 3$$

Por tanto, la progresión aritmética es: 2, 5, 8, 11, 14.

Este problema, que consiste en intercalar varios términos entre dos dados, se denomina **interpolación**. Los términos que hemos hallado se llaman **medios aritméticos**.

1.5 Suma de n términos consecutivos.

Consideremos la progresión formada por los seis primeros múltiplos de 5:

$a_n = 5, 10, 15, 20, 25, 30.$

Observemos que la suma de los extremos es:

$a_1 + a_6 = 5 + 30 = 35$

y que los términos equidistantes suman lo mismo que los términos extremos:

$a_2 + a_5 = 10 + 25 = 35$

$a_3 + a_4 = 15 + 20 = 35$

En general, en una progresión aritmética se verifica:

$a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = ... = a_1 + a_n$

En una progresión aritmética limitada, la suma de los términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos.

Vamos a utilizar este resultado para calcular la fórmula de la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética.

Ejercicio resuelto.-

¿Cuál es la suma de los seis términos de la progresión 5, 10, 15, 20, 25, 30?

Una forma de hallar la suma de los términos de esta progresión es escribir la suma dos veces invirtiendo los términos en una de ellas.

$S_6 = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30$
$S_6 = 30 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5$
$2S_6 = 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35$
$2S_6 = 6 \cdot 35 = 6 \cdot (5 + 30)$
$S_6 = \frac{[6 \cdot (5+30)]}{2} = 105$

Entonces.....¿Cuál es la suma de los términos de la progresión $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$?

Si llamamos S_n a la suma de los n términos y escribamos la suma dos veces, invirtiendo los sumandos en una de ellas.

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$
$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$

Sumando las dos igualdades resulta:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

Como hay n paréntesis y el valor de cada uno es $(a_1 + a_n)$ se tiene:

$2Sn = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) = (a_1 + a_n) \cdot n$

de donde:

$$S = \frac{(a_1+a_n)*n}{2}$$

2 Progresiones geométricas

Una progresión geométrica o sucesión geométrica está constituida por una secuencia de elementos en la que cada uno de ellos se obtiene multiplicando el anterior por una constante denominada razón o factor de la progresión.

Se suele reservar el término progresión cuando la secuencia tiene una cantidad finita de términos mientras que se usa sucesión cuando hay una cantidad infinita de términos, si bien, esta separación no es estricta.

Así, 5, 15, 45, 135, 405,... es una progresión geométrica con razón igual a 3, porque:

$15 = 5 \times 3$ $45 = 15 \times 3$ $135 = 45 \times 3$ $405 = 135 \times 3$ y así sucesivamente

Ejemplos de progresiones geométricas

La progresión 1, 2, 4, 8, 16, 32 es una progresión geométrica cuya razón vale 2, al igual que 5, 10, 20, 40. La razón no necesariamente tiene que ser un número entero.

Así, 12, 3, 0.75, 0.1875 es una progresión geométrica con razón 1/4. La razón tampoco tiene porqué ser positiva.

De este modo la progresión 3, -6, 12, -24 tiene razón -2. Este tipo de progresiones es un ejemplo de progresión alternante porque los signos alternan entre positivo y negativo. Cuando la razón es igual a 1 se obtiene una progresión constante: 7, 7, 7, 7

Un caso especial es cuando la razón es igual a cero, por ejemplo: 4, 0, 0, 0. Existen ciertas referencias que no consideran este caso como progresión y piden explícitamente que $r \neq 0$ en la definición.

Fórmulas pertinentes a progresiones geométricas Si $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ son los términos de una progresión geométrica con razón entonces se cumple la regla recursiva

$$a_{n+1} = a_n r$$

La razón de una progresión geométrica puede entonces obtenerse dividiendo cualquier término por su inmediato anterior:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Todos los términos de la progresión quedan determinados así por el primer término y la razón. Efectuando la sustitución en cada paso, la progresión se convierte en

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, ...$$

de donde se infiere la fórmula para el término n-ésimo:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Ejemplo. La secuencia 3, 6, 12, 24, 48, 96 es una progresión geométrica cuya razón es 2 ya que

$a = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12}..$

Dado que $a_1 = 3$, podemos calcular directamente cualquier entrada. Por ejemplo:

$a_6 = a_1 r^5 = 3.2^5 = 3.32 = 96$

2.1 Suma de términos de una progresión geométrica

Suma de los primeros n términos de una progresión geométrica Se denomina como Sn a la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica:

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$

Si se quiere obtener una fórmula para calcular de una manera rápida dicha suma, se multiplica ambos miembros de la igualdad por la razón de la progresión r.

$S_n r = (a_1+a_2+a_3+......+a_{n-1}+a_n)r = a_1 r+a_2 r+a_3 r+......+a_{n-1}r+a_n r$

Si se tiene en cuenta que al multiplicar un término de una progresión geométrica por la razón se obtiene el término siguiente de esa progresión,
$S_n r = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_n r$
Si se procede a restar de esta igualdad la primera:
$S_n r = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_n r$
$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n - 1 + a_n$
____
$S_n r - S_n = -a_1 + a_n r$
o lo que es lo mismo, $S_n(r-1) = a_n r - a_1$
Si se despeja S_n,

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$$

De esta manera se obtiene la suma de los n términos de una progresión geométrica cuando se conoce el primer y el último término de la misma. Si se quiere simplificar la fórmula, se puede expresar el término general de la progresión a_n como
$a_n = a_1 r^{n-1}$
Así, al substituirlo en la fórmula_1 anterior se tiene lo siguiente:

$S_n = \frac{a_1 r^{n-1} r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

Con lo que se obtiene la siguiente igualdad:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$$

Con esta fórmula se puede obtener la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica con sólo saber el primer término a sumar y la razón de la progresión.

2.2 Suma de términos infinitos de una progresión geométrica

Si el valor absoluto de la razón es menor que la unidad $|r| < 1$, la suma de los infinitos términos decrecientes de la progresión geométrica converge hacia un valor finito.

En efecto, si | r | $<$ 1, r^{∞} tiende hacia 0, de modo que:

$S_{\infty} = a_1 \frac{r^{\infty}-1}{r-1} = a_1 \frac{0-1}{r-1}$

En definitiva, la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón inferior a la unidad se obtiene utilizando la siguiente fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

Ejercicios

1. - Hallar los términos generales de las sucesiones:
   (a) 1, 3, 5, 7, 9, ...
   (b) 1, 4, 9, 16, 25, ...
   (c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$
   (d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
   (e) $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{8}, \frac{16}{11}, \ldots$

2. .- De las siguientes sucesiones indica cuáles son progresiones aritméticas y , en su caso , calcula su diferencia :
   (a) -8, -6, -4, -2, 0, 2, ...
   (b) 3, 6, 12, 24, ...
   (c) 1/2, 5/6, 7/6, 3/2, ...
   (d) 4, 0, -4, 0, -4, -6 –9, -5, -1, 3, 7, ...
   (e) 2, 5, 9, 16, ...
   (f) 2/5, 1, 8/5, 11/5, ...
   (g) 2, 5/2, 3, 7/2, ...
   (h) 24, 20, 16, 12, ..

3. Siendo $a_1 = \frac{1}{3}$ y d = 2 escribe los seis primeros términos de la progresión aritmética.

4. Calcula el término que ocupa el lugar 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es 10 y la diferencia es 4.

5. Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 5, la diferencia es 8 y el término n-simo es 93, halla el número de términos.

6. Halla el primer término de una progresión aritmética y la diferencia sabiendo que $a_3 = 20$ y $a_{15} = 140$.

7. Dados $a_3 = 4$ y d = 2 calcula a_1 , a_6, y a_n.

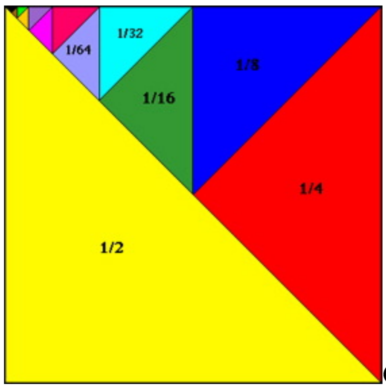
8. El producto de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 840 y la diferencia es 4 . Calcula dichos términos ¿Cuántos términos hay que sumar para obtener como resultado 19.600?

9. La suma de tres números en progresión aritmética es 24 y su producto 440. Halla dichos números.

10. Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética y suman 24 m. ¿Cuánto mide cada lado ?

11. Averigua los ángulos de un cuadrilátero sabiendo que están en progresión aritmética y que el menor mide 54°.

12. Consuelo quiere ponerse en forma practicando la natación. Como está muy desentrenada comienza haciendo el primer día un largo de piscina, dos largos el segundo día, tres largos el tercer día etc.. ¿Cuántos largos de piscina habría hecho después de un mes de entrenamiento ?

13. 

Observa la figura y contesta a las siguientes preguntas: Coloca los números que aparecen en el dibujo en orden estrictamente decreciente.

    (a) ¿Qué tipo de sucesión se nos presenta?
    (b) ¿Puedes encontrar alguna ley de formación?
    (c) ¿Qué representa la figura?
    (d) ¿Cuál es el área del cuadrado? En consecuencia, ¿qué podrías decir de nuestra sucesión?

14. Aurora quiere rellenar sus muñecas rusas de arena o de otra sustancia que les de consistencia para que así tengan más estabilidad, ya que por separado son muy frágiles y le gusta tenerlas alineadas. Si el volumen de la muñeca más grande es $\sqrt{13}cm^3$, y el volumen del resto obedece la siguiente ley de recurrencia $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$. ¿Qué cantidad de arena necesitará para llenar todas las muñecas? Ayúdate de una tabla y de la calculadora (utiliza la tecla ANS o la memoria para la recurrencia), y ¡no te olvides de las unidades!

15. Prueba cuales de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y cuales no. Calcula la razón de la que si lo sean.

    (a) $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, ...$
    (b) 3, 12, 60, ...
    (c) 54, 36, 24, 16, ...

16. Hallar el término décimo de la progresión: 2, 4, 8, ...

17. Hallar el décimo término de la progresión: , $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}, ...$

18. Determinar los seis primeros términos de una progresión geométrica si los dos primeros valen 5 y 3, respectivamente.

19. El término a_5 de una progresión geométrica vale 324 y la razón vale 3. Hallar el primer término.

20. En una progresión geométrica se sabe que $a_5 = 48$ y $a_{10} = 1536$. Hallar el primer término y la razón.

21. En una progresión geométrica $a_{10} = 64$ y la razón es $\frac{1}{2}$. Hallar el término octavo.

22. Indica la razón de las siguientes progresiones:

    (a) 1, 4, 16, 64...

    (b) 3, -9, 27, -81...