Números Complejos

Ejercicios resueltos

Bachillerato 1º

2023

BY S3R4

1. **Escribe estos números como complejos** $\sqrt{-3}; \sqrt{\mathbf{3}}; \sqrt[4]{-16}; 8$

   Solución:

   a) $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i = 0 + \sqrt{3}i$

   b) $\sqrt{3} = \sqrt{3} + 0 \cdot i$

   c) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt{\sqrt{-16}} = \sqrt{4i} = \sqrt{4_\pi} = 2(cos\pi/4 + isen\pi/4) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

   d) $8 = 8 + 0i$

2. **Identifica las partes imaginaria y real de los siguientes números complejos y halla su conjugado y su opuesto:**

   a) $z = 8 + 2i$

   b) $z = 5$

   c) Construye un cuadrado a partir de $z = 1 + i$

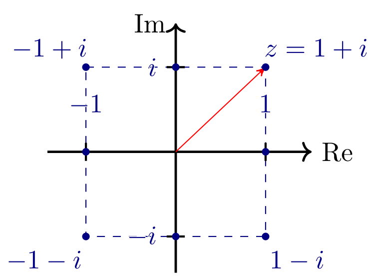
   Solución:

   a) La parte real es $a = Re(z) = 8$ y la parte imaginaria es $b = Im(z) = 2$.

   El conjugado es $\overline{z} = 8 - 2i$ y el opuesto de z es $-z = -8 - 2i$.

   b) La parte real es $a = Re(z) = 5$ y la parte imaginaria es $b = Im(z) = 0$. El conjugado de z es $\overline{z} = 5$ y el opuesto de z es $-z = -5$.

   c) Uso $z = 1+i$, su conjugado $\overline{z}$,su opuesto $-z = -1-i$ y su conjugado $\overline{-z}$



3. **Dados los números complejos** $z_1 = 56 + 4i$ **y** $z_2 = 4 + 8i$**, calcula:**

   a) $z_1 + z_2$ **b)** $z_1 - z_2$ **c)** $z_1 \cdot z_2$ **d)** $\frac{z_1}{z_2}$ **e)**z_1^3

   Solución:

a) $(56+4i)+(4+8i)=60+12i$

b) $(56+4i)-(4+8i)=52-4i$

c) $(56+4i)\cdot(4+8i)=224+448i+16i-32i^2$

Recordando que $i^2=-1$, simplificamos:

$$224+464i+32=256+464i$$

d) Para realizar la división $\frac{56+4i}{4+8i}$ multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$\frac{(56+4\text{i})(4-8\text{i})}{(4+8i)(4-8i)}$

Realizamos la multiplicación: $\frac{224-448i+16i-32i^2}{16+64}$

Sustituimos $i^2=-1$ y queda $\frac{224-432i-32}{8}$.

Simplificamos: $\frac{192-432i}{80}$

La división es $\frac{192}{80}-\frac{432}{80}i=\frac{24}{10}-\frac{54}{10}i$

e) $(z_1)^3=(56+4i)^3$

Usando la fórmula del binomio al cubo:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

donde a=56 y b=4i:

$(56+4i)^3=56^3+3\cdot 56^2\cdot 4i+3\cdot 56\cdot(4i)^2+(4i)^3$

Simplificamos los términos: $=175616+9408i-1792-64i$

Agrupamos los términos reales e imaginarios: $=174824+9344i$

4. **Calcula**

   a) $\frac{i^{241}}{1-i}-\frac{2i^{42}}{1+i^9}+i^{83}$ b)$i^{333}-\frac{i^{27}}{1-i^{27}}+\frac{i^{72}}{1-i^{25}}$

   Solución:

   a)$i^{241}=i^{240}i=1\cdot i=i;i^{42}=i^{40}i=1\cdot i^2=-1;i^9=i^8i=1\cdot i=i;i^{83}=i^{80}i=1\cdot i=i;$

   $\frac{i^{241}}{1-i}-\frac{2i^{42}}{1+i^9}+i^{83}=\frac{i}{1-i}-\frac{-2}{1+i}-i=\frac{i(1+i)+2(1-i)-i(1-i)}{1-i^2}=\frac{1-3i}{2}$

   b)$i^{333}-\frac{i^{27}}{1-i^{27}}+\frac{i^{72}}{1-i^{25}}=i-\frac{-i}{1-(-i)}+\frac{1}{1-i}=\frac{i\left(1-i^2\right)+i(1-i)+(1+i)}{2}=1+2i$

5. **Dado el número complejo $z=7+5i$, responde y resuelve las siguientes cuestiones:**

a) **Calcula el módulo de z y su argumento.**

b) **Calcula el módulo y el argumento de su conjugado z .**

Solución:

a) El módulo de un número complejo $z = a + bi$ se calcula como $\mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$. En este caso, el módulo de z es:

$\mid z \mid = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$

El argumento de z se puede calcular usando la función arcotangente (o atan) de $\frac{b}{a}$ en el plano complejo. El argumento se expresa en radianes o grados.

$arg(z) = atan(\frac{5}{7})$. Así el número z=$\sqrt{74}_{atan(5/7)}$=$\sqrt{74}_{35,53^o}$

b) Calcula el módulo y el argumento de su conjugado $\overline{z}$.

El conjugado de $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$.

El módulo del conjugado $\overline{z}$ es igual al módulo de z: $\mid \overline{z} \mid = \mid z \mid$

El argumento del conjugado $\overline{z}$ es el opuesto del argumento de z : $arg(\overline{z}) = -arg(z)$

Entonces, el módulo del conjugado $\overline{z}$ es $\sqrt{74}$ y su argumento es $-atan(\frac{5}{7})$ radianes.

6. **Transforma los siguientes números complejos:**

a) **El número $z = 5 - 8i$ a forma polar.**

b) **El número $z = 7_{\frac{\pi}{2}}$ a forma binómica**

Solución:

a) Para transformar $z = 5 - 8i$ a forma polar, hallamos módulo y argumento

$r = \mid a \mid = \sqrt{5^2 + (-8)^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}$

ϑ=arg(z)=atan($\frac{-8}{5}$)

La forma polar es $z = r_\theta$. Sustituimos los valores calculados: $z = \sqrt{89}_{atan(-\frac{8}{5})}$

En la forma trigonométrica $r(cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)) = \sqrt{89}(cos(atan(\frac{-8}{5})) + i \cdot sen(atan(\frac{-8}{5})))$

b) Para transformar $z = 7_{\frac{\pi}{2}}$ a forma binómica, donde $r = 7$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$

La forma binómica es $z = r(cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$. Sustituimos los valores dados:

$z = 7(cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot sen(\frac{\pi}{2})) \Longrightarrow z = 7(0 + i) = 7i$

7. **Dados $z_1 = 1{+}1i$ y $z_2 = 1{-}1i$, calcula y expresa en forma binómica:**

   a) $z_1 \cdot z_2$

   b) z_1/z_2

   Solución:

   a) $z_1 = 1 + 1i = r_\alpha$; r= $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\alpha = arctg(b/a) = arctg(1) = \pi/4 \Longrightarrow z_1 = 2_{\pi/4}$;

   b) $z_2 = 1 - 1i = r_a$; $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\alpha = arctg(b/a) = arctg(-1) = -\pi/4 \Longrightarrow z_2 = 2_{-\pi/4}$

   c) El afijo de z_2 está en el cuarto cuadrante. Por lo tanto, su argumento es $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$, es decir, el número es $z_2 = 2_{\frac{7\pi}{4}}$.

   d) Ahora ya podemos hallar el producto y el cociente de ambos números y expresarlos en forma binómica.

   e) Expresamos el resultado en forma binómica: $z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})_{\pi/4+7\pi/4} = 2_{2\pi}$

   $a = 2cos2\pi = 2; b = 2sen2\pi = 0 \Longrightarrow z_1 \cdot z_2 = 2$=2+0i

   a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2_{7\pi/4}} = 1_{-3\pi/2} = 1_{\underline{2\pi - 3\pi/2}} = 1_{\pi/2}$. Expresamos el resultado en forma binómica:

   $$a = 1cos(\frac{\pi}{2}) = 0; b = 1sen(\frac{\pi}{2}) = 1 \Longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = i$$

8. **Realiza las siguientes potencias empleando la formula de Moivre**

   a) $[3(cos\, 25° + i\, sen\, 25°)]^4$

   b) $[2(cos\ 40° + i\, sen\, 40°]^9$

   Solución:

   a) $(3(cos25° + i \cdot sen25°))^4 = 3^4(cos(4 \cdot 25°) + i \cdot sen(4 \cdot 25°)) = 81(cos100° + i \cdot sen100°)$

   b) $(2(cos40° + i \cdot sen40°))^9 = 2^9(cos(9 \cdot 40°) + i \cdot sen(9 \cdot 40°)) =$
   $= 512(cos360° + i \cdot sen360°) = 512(cos0° + i \cdot sen0°) = 512$

9. **Resuelve** $z^5 + 32 = 0$

   Solución: $z^5 + 32 = 0 \Longrightarrow z = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{3}_{180^o}$

   El módulo de las soluciones será $2 = \sqrt[5]{32}$.

   Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$k = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{\pi + 0 \cdot 2\pi}{5} = \frac{\pi}{5} = 36^o$$

$$k = 1 \Longrightarrow \alpha_2 = \frac{\pi + 1 \cdot 2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5} = 108^o$$

$$k = 2 \Longrightarrow \alpha_3 = \frac{\pi + 2 \cdot 2\pi}{5} = \pi = 180^o$$

$$k = 3 \Longrightarrow \alpha_4 = \frac{\pi + 3 \cdot 2\pi}{5} = \frac{7\pi}{5} = 252^o$$

$$k = 4 \Longrightarrow \alpha_5 = \frac{\pi + 4 \cdot 2\pi}{5} = \frac{9\pi}{5} = 324^o$$

   Por tanto, las raíces de z son $2_{36^\circ}, 2_{108^\circ}, 2_{180^\circ}, 2_{252^\circ}, 2_{324^\circ}$. En forma trigonométrica se expresan

   $z_1 = 2(cos36^o + i \cdot sen36^o)$;

   $z_2 = 2(cos108^o + i \cdot sen108^o)$;

   $z_3 = 2(cos180^o + i \cdot sen180^o)$;

   $z_4 = 2(cos252^o + i \cdot sen252^o)$;

   $z_5 = 2(cos324^o + i \cdot sen324^o)$;

10. **Hallar dos numeros reales x e y, tales que** $(43 + yi) = (4 + 3i)(x - 5i)$

    Solución:

    Para hallar los números reales x e y tal que $(43 + yi) = (4 + 3i)(x - 5i)$, vamos a multiplicar los términos del lado derecho y luego igualar los resultados con el lado izquierdo. La multiplicación se hace distribuyendo:

    $(4 + 3i)(x - 5i) = 4x - 20i + 3ix - 15i^2$

    Recordemos que $i^2 = -1$, por lo que $15i^2 = -15$.

    $4x - 20i + 3ix - 15$

Agrupamos los términos reales e imaginarios:$(4x - 15) + (-20 + 3x)i$

Ahora igualamos esto a $43 + yi$: $4x - 15 = 43$; $-20 + 3x = y$

Resolvemos estas ecuaciones para encontrar x e y:

De la primera ecuación: $4x - 15 = 43 \Longrightarrow 4x = 58; 4x = \frac{58}{4} \Longrightarrow x = 14{,}5$

De la segunda ecuación: $-20 + 3x = y;-20 + 3 \cdot 14{,}5 = y$; $y = 23{,}5$

Entonces, los números reales x e y son $x = 14{,}5$ e $y = 23{,}5$, respectivamente.

11. **Hallar el valor de $\alpha \in R$ para que la expresión $\frac{3-2\alpha i}{4-3i}$ sea real. Para el valor obtenido calcular el valor del cociente**.

    a) multiplicaremos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador para eliminar el término imaginario en el denominador.

    b) El conjugado de $4 - 3i$ es $4 + 3i$. Multiplicamos el numerador y el denominador por $4 + 3i$:

    c) $\frac{3-2\alpha i}{4-3i} \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{12+9i-8\alpha i-6\alpha i^2}{16-9i^2}$

    d) Simplificamos $i^2 = -1$:

    e) $\frac{12+9i+6\alpha}{16+9} = \frac{12+6\alpha+9i}{25} = \frac{12+6\alpha}{25} + \frac{9i}{25}$.Para que el número sea imaginario, la parte real debe ser 0 por lo que $12+6\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = -\frac{12}{2} = -2$

12. **Dado el número complejo $z = 2_{\frac{\pi}{2}}$, calcula z^5.**

    Solución:

    $z^5 = (2_{\frac{\pi}{2}})^5 = (2^5)_{\frac{5\pi}{2}} = 32_{\frac{5\pi}{2}} = 32_{\frac{5\pi}{2}-2\pi} = 32_{\frac{\pi}{2}}$

    Observa que el argumento del resultado era mayor que 2π $(5\pi/2)$ y lo hemos expresado como un número comprendido entre 0 y 2π.

13. **Calcula las raíces cuartas de** $z = 1 - i$.

    Para calcular raíces, hallaremos la raíz del módulo $\sqrt[n]{r_\alpha} = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\alpha}{n}+k\frac{2\pi}{n}}$ y calcularemos los argumentos dando valores a k desde 0 hasta $n - 1$.

    Las raíces cuartas $z = 1 - i = \sqrt{2}$ tendrán módulo $\sqrt[3]{27} = 3_{\frac{7\pi}{4}}$ y argumentos:

$$k = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{\frac{7\pi}{4} + 0 \cdot 2\pi}{4} = \frac{7\pi}{16};$$

$$k = 1 \Longrightarrow \alpha_2 = \frac{\frac{7\pi}{4} + 1 \cdot 2\pi}{4} = \frac{7\pi}{16} + \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{16};$$

$$k = 2 \Longrightarrow \alpha_3 = \frac{\frac{7\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi}{4} = \frac{7\pi}{16} + \pi = \frac{23\pi}{16}$$

$$k = 3 \Longrightarrow \alpha_4 = \frac{\frac{7\pi}{4} + 3 \cdot 2\pi}{4} = \frac{7\pi}{16} + \frac{3 \cdot \pi}{2} = \frac{31\pi}{16}$$

Las raíces son, por lo tanto, $3_{\frac{7\pi}{16}}, 3_{\frac{15\pi}{16}}, 3_{\frac{13\pi}{16}}$ y $3_{\frac{31\pi}{16}}$.en forma polar.

14. **Calcula las raíces cuadradas de** $z = 2\pi$ **y las raíces cúbicas de** $z = 27_{30^\circ}$.

    Solución:

    Para calcular raíces, hallaremos la raíz del módulo $\sqrt[n]{r_\alpha} = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}}$ y calcularemos los argumentos dando valores a k desde 0 hasta $n - 1$.

    Las raíces cuadradas de $z = 2\pi$ tendrán módulo $\sqrt{2}$ y argumentos: $\alpha_1 = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}$; $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + 1\frac{2\pi}{2}\cdot = \frac{3\pi}{2}$

    Por lo tanto, las raíces son $2_{\frac{\pi}{2}}$y $2_{\frac{3\pi}{2}}$.

    Las raíces cúbicas de $z = 27_{30^\circ}$ tendrán módulo $\sqrt[3]{27} = 3$ y argumentos:

$$k = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{30^o + 0 \cdot 360^o}{3} = 10^o;$$

$$k = 1 \Longrightarrow \alpha_2 = \frac{30^o + 360^o \cdot 1}{3} = 130^o;$$

$$k = 2 \Longrightarrow \alpha_3 = \frac{30^o + 360^o \cdot 2}{3} = 250^o$$

    Las raíces son, por lo tanto, $3_{10^\circ}, 3_{130^\circ}$ y 3_{250°.

15. **Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada:** $x^4 + 2x^2 + 2 = 0$.

    Solución:

    Efectuaremos los cambios de variable $x^2 = t; x^4 = t^2$

    Los cambios de variable nos permiten escribir la ecuación de la siguiente forma: $t^2 + 2t + 2 = 0$.

    A continuación, la resolvemos: $t = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot2}}{21} = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{-2\pm2i}{2} = -1 \pm i$.

Las soluciones son dos complejos conjugados y, *para deshacer el cambio*, deberemos aplicar el método de radicación de complejos. Para ello, expresaremos las soluciones en forma polar:

$t_1 = -1 + i;$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2};\;\; tg\alpha = -1 \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 135^o \\ \alpha = 315^o \end{cases}$$

Puesto que el afijo del número complejo pertenece al segundo cuadrante, su argumento es $\alpha = 135°$.

$t_2 = -1 - i;$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};\;\; tg\ \alpha = 1 \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 45^o \\ \alpha = 225^o \end{cases}$$

Puesto que el afijo del número complejo pertenece al tercer cuadrante, su argumento es $\alpha = 225°$.

Por lo tanto, $t_1 = \sqrt{2}_{135°}$ y $t_2 = \sqrt{2}_{225°}$.

Ahora haremos las raíces para deshacer el cambio $x = \sqrt{t_1}$.

Las raíces tendrán por módulo $\sqrt{\sqrt{2}}$ y por argumentos

$$\alpha_1 = \frac{135^o}{2}; \alpha_2 = \frac{135^o}{2} + 1 \cdot \frac{360^o}{2}$$

y para $x = \sqrt{t_2}$,las raíces tendrán por módulo $\sqrt{\sqrt{2}}$ y por argumentos

$$\alpha_3 = \frac{225^o}{2}; \alpha_2 = \frac{225^o}{2} + 1 \cdot \frac{360^o}{2}$$

Así pues tenemos cuatro raíces solución:

$x_1 = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{67{,}5^o} = \left(\sqrt[4]{2}\right)(cos 67{,}5^o + i \cdot sen\ 67{,}5^o);$

$x_2 = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{247{,}5^o} = \left(\sqrt[4]{2}\right)(cos 247{,}5^o + i \cdot sen\ 247{,}5^o);$

$x_3 = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{112{,}5^o} = \left(\sqrt[4]{2}\right)(cos 112{,}5^o + i \cdot sen\ 112{,}5^o);$

$x_4 = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{292{,}5^o} = \left(\sqrt[4]{2}\right)(cos 292{,}5^o + i \cdot sen\ 292{,}5^o);$

16. Un hexágono con centro en el origen tiene uno de sus vértices en el punto A(1, 1). Calcula los demás vértices.

Solución: El punto A(1, 1) es el afijo del número $\sqrt{2}_{45^o}$. Cada vértice se obtiene del anterior girándolo 60º. O lo que es lo mismo, multiplicando por 1_{60^o} el número que representa su afijo.

Así B es el afijo del número $\sqrt{2}_{45^o} \cdot 1_{60^o} = \sqrt{2}_{105^o}$;

C es el afijo del número $\sqrt{2}_{105^o} \cdot 1_{60^o} = \sqrt{2}_{165^o}$;

D es $\sqrt{2}_{165^o} \cdot 1_{60^o} = \sqrt{2}_{225^o}$;

E es $\sqrt{2}_{225^o} \cdot 1_{60^o} = \sqrt{2}_{285^o}$;

F es $\sqrt{2}_{285^o} \cdot 1_{60^o} = \sqrt{2}_{345^o}$;