Logaritmos

Ejercicios resueltos

Bachillerato 1º

2023

BY S3R4

Definición

El logaritmo en base b de un número $a > 0$ se representa por $log_b(a)$ y es el número c que cumple $b^c = a$:

$$log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$$

Nota: la base b debe ser un número real positivo distinto de 1. El número a recibe el nombre de argumento del logaritmo.

Ejercicios resueltos

1. **Utiliza la definición y las propiedades de los logaritmos para:**

   a) **Reducir a un solo logaritmo y calcular:** $log40 + log25$

   b) **Calcular** $log\ 16$ **sabiendo que** $log\ 2 = 0,301$.

   c) **Calcular los siguientes logaritmos.**

   1) $log100000$ 2)$log_2 256$ 3)$log_3 81$ 4)$log_3 243$

   d) **Calcula los siguientes logaritmos.**

   1) $log_2 0,25$ 2) $log_4 2$ 3) $log0,001$ 4) $log_9 27$ 5)$log_8 4$

Solución :

a) $log40 + log25 = log(40 \cdot 25) = log(1000) = 3$

b) $log16 = log2^4 = 4log2 = 4 \cdot 0,301 = 1,204$

c1)$log100000 = log10^5 = 5$

c2)$log_2 512 = log_2 2^9 = 9$

c3) $log_3 81 = log_3 3^4 = 4$

c4) $log_3 243 = log_3 3^5 = 5$

d1) $log_2 0,25 = log_2 \frac{25}{100} = log_2 \frac{1}{4} = log_2 1 - log_2 2^2 = 0 - 2log_2 2 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$

d2)$4 = 2^2 => 2 = \sqrt{4} => 2^{(\frac{1}{2})} = 4; log_4 2 = log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

d3)$log0,001 = log\frac{1}{1000} = log1 - log10^3 = 0 - 3 = -3$

d4)$3^3 = 27 = (\sqrt{9})^3 = 9^{\frac{2}{3}}; log_9 27 = log_9 9^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

d5)$log_8 4 = log_8 2^2 = log_8(\sqrt[3]{8})^2 = \frac{2}{3}$

2. **Calcular el valor de x, aplicando la definición de logaritmo:**

   a)$log_x 125 = -3$ b)$log_2(4x) = 3$

   Solución :

   a)$log_x 125 = -3 \Leftrightarrow x^{-3} = 125 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} = 125 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow \frac{1}{125} = x^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

   b)$log_2(4x) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 4x \Leftrightarrow 8 = 4x; x = 2$

3. **Conociendo los valores aproximados de log 2 0,301 y log 3 0,477,calcula los siguientes usando las propiedades de los logaritmos.**

   a)$log 36$ b)$log 0,2$ c)log0,8333...

   Solución :

   a)log 36$= log(2^2 3^2) = log 2^2 + log 3^2 = 2log2 + 2log3 = 2\cdot 0,301 + 2\cdot 0,477 = 1,556$

   b)$log 0,2 = log\frac{2}{10} = log2 - log10 = 0,301 - 1 = -0,699$

   c)$log 0,8333... = log\frac{5}{6} = log\frac{10}{12} = log10 - log12 = 1 - 2log2 - log3 = 0,079$

4. **Calcula el valor de las expresiones:** $\log_8\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt[4]{324} - \frac{\sqrt{50}}{2} + \sqrt[6]{512}\right)$

   Solución :

   $\log_8\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt[4]{324} - \frac{\sqrt{50}}{2} + \sqrt[6]{512}\right) = \log_8\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt[4]{2^2\cdot 3^4} - \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2} + \sqrt[6]{2^9}\right) =$

   $= \log_8\left(\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} + 3\cdot\sqrt{2} - \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\sqrt{2}\right) = \log_8\left(\frac{3\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{2}}{2}\right)$

   $= \log_8(4\cdot\sqrt{2}) = \log_8\left(2^{5/2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\log_8(2) = \frac{5}{2}\cdot\log_8\left(8^{1/3}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

5. **Demostrad la siguiente igualdad (siendo $a > 0$, $b > 1$):**$logb(\frac{1}{a}) = log_{\frac{1}{b}} a$

   Solución :

   Aplicando las propiedades de los logaritmos: $log_b(\frac{1}{a}) = log_b(a^{-1}) = -1\cdot log_b(a)$

   Cambiando base

   $-1\cdot log_b(a) = -\frac{\log_{\frac{1}{b}}(\mathrm{a})}{log_{\frac{1}{b}} b} = -\frac{log_{\frac{1}{b}}(a)}{log_{\frac{1}{b}}((\frac{1}{b})^{-1})} = -\frac{log_{\frac{1}{b}}(a)}{-1} = log_{\frac{1}{b}}(a)$

6. **Conocidos** $ln\ a = 0{,}6$ **y** $ln\ b = 2{,}4$ **calcular:**

   a) $ln\sqrt[3]{\frac{ab}{e^2}}$ b) $ln\frac{\sqrt{a^{-3}}}{\sqrt[3]{b^2}}$

   Solución :

a) $ln\sqrt[3]{\frac{ab}{e^2}}=ln(\frac{ab}{e^2})^{1/3}=1/3(lna+lnb-lne^2)=\frac{1}{3}(0{,}6+2{,}4-2)=\frac{1}{3}$

b) $ln\frac{\sqrt{a^{-3}}}{\sqrt[3]{b^2}}=ln\sqrt{a^{-3}}-ln\sqrt[3]{b^2}=lna^{-3/2}-lnb^{2/3}=-\frac{3}{2}lna-\frac{2}{3}lnb=-\frac{3}{2}0{,}6-\frac{2}{3}2{,}4=-2{,}5$

7. **Resolver las siguientes ecuaciones:**

   a) $log16-2logx=log10000$

   b) $log(x^2-9)-log(x-3)=log(3)+log(2x)$

   Solución :

a)Aplicando propiedades de los logaritmos:

$$log16-2logx=log16-logx^2=log100$$

Por tanto, la ecuación queda $log\frac{16}{x^2}=log100$, .Igualamos los argumentos y resolvemos la ecuación: $\frac{16}{x^2}=100$, es decir, $\frac{16}{100}=x^2$, cuyas soluciones son $x=\sqrt{\frac{16}{100}}=\pm\frac{4}{10}$ El valor $x=-\frac{4}{10}$ no es solución de la ecuación inicial, ya que no existe el logaritmo de un número negativo, por tanto, la única solución es $x=+\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=0{,}4$

b)$log(x^2-9)-log(x-3)=log(3)+log(2x)\Longrightarrow log(\frac{x^2-9}{x-3})=log(3\cdot x)$

Observamos que el numerador de la fracción es el resultado de una suma por diferencia:

$x^2-9=(x+3)(x-3)$ Por tanto, podemos simplificar la fracción: $\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=x+3$. La ecuación que queda es $log(x+3)=log(6x)$.

Igualamos los argumentos y resolvemos la ecuación:

$x+3=6x\Longrightarrow 3=5x\Longrightarrow$ La solución de la ecuación logarítmica es $x=3/5$.

8. **Resolver las siguientes ecuaciones:**

   a) $2logx+log10=1+log(10x-9)$

   b) $log(15-2x)=2log(x)$

   Solución :

   a) $2logx+log10=1+log(10x-9)$ Aplicando propiedades de los logaritmos

$$logx^2+log10=log10+log(10x-9)$$

$$logx^2 \cdot 10 = log10(10x-9)$$

Igualamos los argumentos y resolvemos la ecuación:$10x^2 = 100x - 90$; cuya solución es $x = 1\ y\ x = 9$

b)$log(15-2x) = 2log(x) \Longrightarrow log(15-2x) = log(x^2)$

Igualamos los argumentos:

$$15 - 2x = x^2; x^2 + 2x - 15 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado :

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-15) 2}}{2} == \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -5$ .La solución negativa no es válida porque el logaritmo tendría argumento no positivo.Por tanto, la solución de la ecuación logarítmica es $x = 3$.

9. **Resolver las siguientes ecuaciones:**

   a) $log_3(x) = log_9(16)$

   b) $log_2(5x^2 + 15x + 10) - log_2(x+2) = 2$

   c) $log_{5x^2-6x}(8) = log_x(2)$

   Solución :

   a) Cambiamos a base 3 el logaritmo de base 9 :$log9(16) = \frac{log3(4)}{log_3 9} = \frac{log_3 16}{2}$ ya que $log_3(9) = log_3(3^2) = 2$

   Entonces la ecuación a resolver es

   $$2 \cdot log_3(x) = log_3(16) \Longrightarrow log_3 x^2 = log_3 16 => x^2 = 16$$

   Las soluciones de la ecuación de segundo grado incompleta son $x = -4\ y\ x = 4$.

   La primera de las soluciones no es válida porque hace que el argumento del logaritmo sea no positivo.

   La solución de la ecuación logarítmica es 4 .

b) $log_2(5x^2+15x+10) - log_2(x+2) = 2$;

$$log_2(\frac{5x^2+15x+10}{x+2}) = log_2 4$$

Igualamos los argumentos:

$$\frac{5x^2+15x+10}{x+2} = 4 \Longrightarrow$$

$$5x^2+15x+10 = 4x+8; \Longrightarrow 5x^2+11x+2 = 0$$

Resolvemos la ecuación:$x = \frac{-11\pm 9}{10}$ Las soluciones son $x = \frac{-1}{5}$ y $x = -2$.

La solución $x = -2$ no es una solución válida porque hace que los argumentos de los logaritmos sean 0.

La única solución de la ecuación logarítmica es $x = \frac{-1}{5}$.

c) $log_{5x^2-6x}(8) = log_x(2)$ Cambiamos la base de los logaritmos

$log_{5x^2-6x}(8) = \frac{log_2(8)}{log_2(5x^2-6x)} = \frac{3}{log_2(5x^2-6x)}$ y $log_x(2) = \frac{log_2(2)}{log_2(x)} = \frac{1}{log_2 x}$

La ecuación a resolver es

$$\frac{3}{log_2(5x^2-6x)} = \frac{1}{log_2(x)} \Longrightarrow 3log_2(x) = log_2(5x^2-6x)$$

$$\Longrightarrow log_2(x^3) = log_2(5x^2-6x)$$

Igualamos los argumentos y pasamos variables

$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ .Resolvemos $x(x^2-5x+6) = 0$.

Las soluciones son $x = 0$,$x = 3$ y $x = 2$

La solución $x = 0$ no es válida porque la base de un logaritmo no puede ser 0.Las soluciones de la ecuación logarítmica son x = 3 y x = 2 .

10. **Resolver el siguiente sistema de ecuaciones** $\left\{ \begin{array}{l} log(x{\cdot}y) = 3 \\ log(\frac{x}{y}) = 1 \end{array} \right.$

Solución :

$$\left\{ \begin{array}{l} log(x \cdot y) = 3 \\ log(\frac{x}{y}) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} log(x \cdot y) = log1000 \\ log(\frac{x}{y}) = log10 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Obtenemos el sistema al igualar los argumentos de los logaritmos:

$$\begin{cases} x{\cdot}y = 1000 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x{\cdot}y = 1000 \\ x = 10y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10y \cdot y = 1000 \\ x = 10y \end{cases}$$

$y^2 = 100 \Longrightarrow y = \pm 10$

Si $y = 10$, entonces $x = 100$.

Y si $y = -10$, $x = -100$.

El sistema de ecuaciones logarítmicas tiene dos soluciones:(100,10) y (-100,-10)

11. **Resolver el siguiente sistema de ecuaciones** $\begin{cases} log_3(x-2y) - log_3(y-2) = 2 \\ log_3(5y+2) - log_3(y+4) = 1 \end{cases}$

Solución :

$$\begin{cases} log_3(x-2y) - log_3(y-2) = 2 \\ log_3(5y+2) - log_3(y+4) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} log_3(x-2y) - log_3(y-2) = log_3 9 \\ log_3(5y+2) - log_3(y+4) = log_3 3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} log_3\frac{(x-2y)}{y-2} = log_3 9 \\ log_3\frac{(5y+2)}{y+4} = log_3 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2y)}{y-2} = 9 \\ \frac{(5y+2)}{y+4} = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x - 2y = 9(y-2) \\ 5y + 2 = 3(y+4) \end{matrix}$$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} x - 11y = -18 \\ 2y = 10 \end{cases}$

Solucionamos $y = 5$

Sustituimos $y = 5$ en la primera ecuación: $x = 37$

La solución del sistema de ecuaciones logarítmicas es $(x, y) = (37, 5)$