Ejercicios Resueltos Geometría I

Bachillerato 1º

2023

1. **Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (-3,-1) y B (6, 2)**

   Solución:

   Podemos hallar el vector director de la recta $u = \overrightarrow{AB}$.

   $u = \overrightarrow{AB} = (6,2) - (-3. -1) = (9,3)$. La pendiente de la recta será $m = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.Podemos usar la fórmula de punto-pendiente, eligiendo por ejemplo el punto A(-3,-1)

   Entonces $y - (-3) = m(x - (-1)) \Rightarrow y + 3 = \dfrac{1}{3}(x+1)$.Podemos pasar esta ecuación a otro tipo, por ejemplo, la ecuación general

   $y + 3 = \dfrac{1}{3}(x+1) \Rightarrow 3y + 9 = x + 1 \Rightarrow r \equiv x - 3y - 8 = 0$

   La ecuación paramética también es fácil $\begin{cases} x = -3 + 9\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$.Para sacar puntos alineados basta dar valores a λ.

   Por ejemplo $\lambda = 2 \Rightarrow C = (15,5)$;$\lambda = -4 \Rightarrow F = (-39,-13)$ son puntos de la recta.

   Una recta paralela a esta recta será de la forma $x - 3y + D = 0$. Diferentes valores de la letra D proporcionan rectas paralelas.

   Una recta perpendicular a r será de la forma $3x + y + D = 0$. Diferentes valores de la letra D proporcionan rectas paralelas todas ellas perpendiculares a r.la razón de esto es porque los vectores de esas rectas es $(-1,3)$ que es $\perp$ a $(9,3)$ ó $(3,1)$

2. **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 3y + 10 = 0$ y $4x - 2y - 7 = 0$ y por el punto $(2,1)$.**

   Solución:

   $x - 3y + 10 + k(4x - 2y - 7) = O$ es la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto de intersección . Como la recta pedida ha de pasar también por el punto $(2,1)$,

   entonces $1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 10 + k(4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 7) = 0 \Rightarrow -1 + 10 + k(-1) = 0$

   Despejando k de esta ecuación resulta $k = 9$.

   La recta pedida es de intersección de las dos rectas dadas. $x - 3y + 10 + 9(4x - 2y - 7) = 0 \Rightarrow 37x - 21y - 53 = 0$

Orta manera de hacerlo es hallar el punto de intersección de r y s $\begin{cases} x - 3y + 10 = 0 \\ 4x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow Q(\frac{41}{10}, \frac{47}{10})$

Luego, la ecuación que pasa por P y Q es la solución $\dfrac{x-2}{\frac{41}{10}-2} = \dfrac{y-1}{\frac{47}{10}-1} \Rightarrow$

$\dfrac{x-2}{\frac{21}{10}} = \dfrac{y-1}{\frac{37}{10}} \Rightarrow 37x - 21y - 53 = 0$

3. **Halla la ecuación de la recta perpendicular a $5x + 4y—3 = 0$ que corta a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{6}$ en $x = 1$.**

   Solución:

   Todas las rectas perpendiculares a $5x+4y—3 = 0$ son de la forma $4x—5y+k = 0$.

   Obligando a que corte a $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{6}$ en $x = 1$, es decir, $\frac{1-1}{1} = 0 = \frac{y-1}{6} \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ .El punto de corte es el punto $(1, 1)$,entonces $4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + k = 0 \Rightarrow k = 1$.

   Por tanto, la ecuación de la recta perpendicular es $4x—5y + 1 = 0$.

4. **Halla las coordenadas de los puntos de la recta $r : x + y—2 = 0$ y que distan 5 unidades de la recta $s : 4x - 3y + 10 = 0$.**

   Solución:

   Los puntos de la recta r son de la forma $r = \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases} \Rightarrow P(t, 2-t)$

   , para que disten 5 unidades de s deben verificar:

   $$\frac{|4t - 3(2-t) + 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4t - 3(2-t) + 10|}{5} = 5$$

   luego $|7t + 4| = 25$. Resolvemos la ecuación con valor absoluto

   $7t + 4 = 25 \Rightarrow t = \frac{21}{7}03$

   $7t + 4 = -25 \Rightarrow t = \frac{-29}{7}$

   Luego la soluciones son :

   $t = 3 \Rightarrow P(3, -1)$ y $t = \frac{-29}{7} \Rightarrow P'(\frac{-29}{7}, 2 - \frac{-29}{7}) = (\frac{-29}{7}, \frac{43}{7})$

5. **Para cada una de las siguientes rectas, determina la ecuación continua y la ecuación general.**

a) **Pasa por el punto** $A(-1,-4)$ **y tiene la dirección del vector** $u=(2,-1)$.

Solución:

Ecuación continua: $\dfrac{x-(-1)}{2}=\dfrac{y-(-4)}{-1}\Rightarrow\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+4}{-1}$
Ecuación general $-x-1=2y+8\Rightarrow x+2y+9=0$

b) **Pasa por el origen de coordenadas y por el punto medio del segmento de extremos** $P(2,—6)$ **y** $Q(5,12)$.

Solución:

1) El punto medio de $PQ=M=\frac{(2,-6)+(5,12)}{2}=(\frac{7}{2},3)$.
2) El vector director será $OM=(\frac{7}{2},3)-(0,0)=(\frac{7}{2},3)$. Podemos proporcionarlo a $u=(7,6)$.La ecuación es $\dfrac{x-(\frac{7}{2})}{7}=\dfrac{y-3}{6}\Rightarrow$ $6x-7y=0$

c) **Pasa por los puntos P(1, -4) y Q(5, 1).**

Solución:

1) El vector director será PQ$=(5,1)-(1,-4)=(4,5)$
2) La ecuación es $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+4}{5}\Rightarrow 5x-5-4y-16=0\Rightarrow$ $5x-4y-21=0$

d) **Pasa por el origen de coordenadas y por el punto C(-5, 3).**

Solución:

El vector director será $\overrightarrow{OC}=(-5,3)-(0,0)=(-5,3)$. La ecuación es $\dfrac{x}{-5}=\dfrac{y}{3}\Rightarrow 3x+5y=0$

e) **Pasa por el punto P(-2, 7) y es perpendicular al segmento de extremos** $M(-1,-3)$ **y** $N(0,5)$.

Solución:

El vector director será perpendicular a $MN=(0,5)-(-1,-3)=(1,3)\Rightarrow v=(-3,1)$
La ecuación es $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-7}{1}\Rightarrow x+3y-19=0$

6. **Calcula el ángulo entre las rectas** $r: y=3x-5$ **y** $s:\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-2}$

Solución:

Utilizamos el vector director de s $\overrightarrow{v_s}(4,-2)$ y hallamos unos de la recta r: $y=3x-5$;$m=3\rightarrow v_r(1,3)$

Usaremos la fórmula del ángulo de dos vectores $cos(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_r}) = \dfrac{\overrightarrow{v_s} \cdot \overrightarrow{v_r}}{|v_r||v_s|}$.

Realizamos los cálculos necesarios para utilizar la fórmula que nos permite calcular en ángulo entre dos vectores:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (1,3)(4,-2) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 4 - 6 = -2$

$|\overrightarrow{v_r}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$|\overrightarrow{v_s}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$

Así: $cos(v_r, v_s) = \dfrac{v_r v_s}{|v_r||v_s|} = \dfrac{-2}{\sqrt{10}\sqrt{20}}$ =-0.14

$arccos(-0{,}14) = 98° \Rightarrow \alpha = 180° - 98° = 82°$ Por tanto el ángulo que forman las rectas r y s es de 82°.

7. **Calcula la distancia entre la recta** $r = \{(x,y) = (-2,0) + \lambda(2,4)\}$ **y el punto** $P(-3;3)$

   Solución:

   Podemos hallar la solución de forma constructiva hallando el punto de intersección de la recta perpendicular a r pasando por P o mediante la fórmula adecuada para la distancia.

   Mediante el primer método

   Transformamos en ecuación general $r := (x,y) = (-2,0) + \lambda(2,4) \Rightarrow \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{4} \Rightarrow 4x - 2y + 2 = 0$.

   La recta perpendicular será $2x + 4y + D = 0$. Para forzar a pasar por P $\Rightarrow 2(-3) + 4(3) + D = 0 \Rightarrow D = -6$.

   La recta será $2x + 4y - 6 = 0$

   Hallamos el punto de corte $\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ 4x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(-1,2)$.

   Hallamos la distancia entre P y Q

   $d(P,Q) = d(P,r) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-1+3)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

8. **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto** $M(-2,3)$ **y es perpendicular a la recta** $r: 2x - 3y + 6 = 0$.

   Solución:

   Si las rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra. La pendiente de r:$2x - 3y + 6 = 0$, que está escrita en la forma general $Ax + By + C = 0$ es $-\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$ ya que el vector de dirección es $(-B, A)$ ó $(B, -A)$, luego la pendiente de la recta perpendicular que piden es $m_1 = -\frac{3}{2}$.

Sea (x, y) otro punto cualquiera de la recta que pasa por (-2, 3) y tiene de pendiente $-\frac{3}{2}$. Entonces $y - 3 = -\frac{3}{2}(x + 2) \Rightarrow 3x + 2y = 0$.

9. **Hallar las ecuaciones de las rectas de pendiente $\frac{-1}{4}$ que formen con los ejes coordenados un triángulo de area 72 unidades de superficie.**

   Solución:

   Una recta de pendiente $\frac{-3}{4}$ y ordenada en el origen b viene dada por $y = \frac{-1}{4}x + b$

   Para $x = 0$, y = b; para $y = 0, x = 4b$

   Área del triángulo $=\frac{1}{2}$ (producto de los catetos) $=\frac{1}{2}(b \cdot 4b) = \frac{1}{2}(4b^2)$

   De aquí se deduce que $\frac{1}{2}(4b^2) = 2b^2 = 72 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{72}{2}} \Rightarrow b = \sqrt{36} = \pm 6$. Las ecuaciones pedidas son $y = \frac{-1}{4}x \pm 6$, es decir, $x + 4y + 24 = 0$ y $x + 4y - 24 = 0$

10. **Las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$ y $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2}$ se cortan en un punto A, que es vértice de un triángulo obtusángulo en A. Determina el ángulo A de ese triángulo:**

    Solución:

    $$\begin{array}{c} u = (2,3) \Rightarrow A = 2; B = 3 \\ v = (1,-2) \Rightarrow A' = 1; B = -2; \end{array}$$ .Como $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}$ Las rectas son secantes, se cortan en la solución del sistema

    El ángulo que forman, lo hallamos a partir de los vectores

    $$cos\alpha = \frac{|u \cdot v|}{|u||v|} = \frac{|\text{(2,3)(1,-2)}|}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + (-6)|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = 0{,}496$$

    $\Longrightarrow \alpha = arcos(0{,}496) = 60°15'$

    Entonces el ángulo obtuso $A = 180 - \alpha = 180° - 60°15' = 119°45'$

11. **Calcula la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta r de ecuación $3x + 4y + 2 = 0$.**

Solución:

$$d(P,r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot(-1)+2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

12. **Calcula la distancia entre las rectas** $r \equiv 3x+4y+2=0$ **y** $s \equiv 3x+4y+5=0$

    Solución:

    1ª Forma

    Hallamos un punto de s dando valor $x=0 \Rightarrow y = \frac{-5}{4} \Rightarrow P(0, \frac{-5}{4})$

    Entonces $d(r,s) = d(P,r) = \frac{|3\cdot 0+4\cdot(-\frac{5}{4})+2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

    2ª Forma

    $d(r,s) = \frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

13. **Calcula la mediatriz del segmento determinado por A(1,1) y B(4,2)**

    Solución:

    $d(P,A) = d(PB) = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \Rightarrow$

    $(x-1)^2+(y-1)^2 \Rightarrow \cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}-2y+1 = \cancel{x^2}-2\cdot x\cdot 4+16+\cancel{y^2}-2y\cdot 2+2^2$

    $$(-2\cdot 1+2\cdot 4)x + (-2\cdot 1+2\cdot 2)y + (1-16+1-4) = 0$$

    $$6x+2y-18=0$$

14. **Calcula el punto simétrico de** $P(1,-2)$ **respecto a la recta** $3x+y-9=0$

    Solución:

    Hallamos la recta (s) perpendicular a r pasando por $P(1,-2)$

    El vector de esa recta es $\overrightarrow{v} = (3,1)$. La recta es $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1}$ en forma continua y en forma general será $s \equiv x-3y-7=0$

    Hallamos el punto de corte de las dos rectas $\begin{matrix} r: 3x+y-9=0 \\ s: x-3y-7=0 \end{matrix} \Rightarrow M(\frac{17}{5}, \frac{-6}{5})$

    El punto A' al ser el simétrico de A satisface que M es el punto medio de AA', por lo tanto

M$=\frac{A+A'}{2} \Rightarrow M(\frac{17}{5},\frac{-6}{5}) = \frac{(1,-2)+(x,y)}{2} \Rightarrow A'(x,y) = (\frac{34}{5},\frac{-12}{5}) - (1,-2) =$ $\boxed{A' = (\frac{39}{5},\frac{-2}{5})}$

15. **Calcula las bisectrices del ángulo formado por rectas $r \equiv 3x + 4y + 2 = 0$ y $s \equiv 8x + 6y + 5 = 0$**

    Solución:

    Según la definición los puntos de la mediatriz $P(x,y)$ serán tales que $d(P,r) = d(Ps)$.

    Es decir

    $$d(P,r) = \frac{|3x+4y+2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|8\cdot x+6y+5|}{\sqrt{8^2+6^2}} = d(P,s)$$

    $\frac{|3x+4y+2|}{5} = \frac{|8x+6y+5|}{10} \Rightarrow 10(3x+4y+2) = \pm 5(8x+6y+5)$

    $$\Rightarrow 30x+40y+20 = \pm(40x+30y+25)$$

    Habrá dos bisectrices que son perpendiculares entre sí.

    $30x+40y+20 = 40x+30y+25 \Rightarrow \boxed{-10x+10y-5=0}$

    $30x+40y+20 = -40x-30y-25 \Rightarrow \boxed{70x+70y-45=0}$

16. **Sea un triángulo con vértices A(5, 7), B(2, 3) y C(6, 4), encuentra el ortocentro**

    Solución:

    Tenemos las siguientes coordenadas:

    $A(x_1,y_1) = (5,7)$,$B(x_2,y_2) = (2,3)$,$(x_3,y_3) = (6,4)$

    Pendiente de AC:$m_{AC} = \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} = \frac{4-7}{6-5} = -3$.

    La pendiente de una línea perpendicular es igual a $\frac{-1}{m}$, en donde, m es la pendiente de la línea original

    La pendiente de la altura sobre lado AC será $m'_1 = \frac{1}{3}$

    La ecuación de la altura sobre el lado AC desde B es $y-3 = \frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow h_1 \equiv -x+3y = 7$

    Pendiente del lado BA $m_{BA} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$ .La pendiente de la altura sobre lado BA será $m'_2 = -\frac{3}{4}$.

La altura sobre el lado BA desde C es $y-4=-\frac{3}{4}(x-6) \Rightarrow h_2 \equiv 3x+4y=34$

El ortocentro es la solución del sistema $\begin{matrix} h_1: -x+3y-7=0 \\ h_2: 3x+4y-34=0 \end{matrix} \Rightarrow O=(\frac{74}{18}, \frac{55}{13})$

17. **Para un triángulo de vértices: A(5,-4); B(6,4); C(9,1). Hallar las coordenadas del baricentro o centro de gravedad**

    Solución:

$$C(x,y)=(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})=(\frac{5+6+9}{3}, \frac{-4+4+1}{3})=(\frac{20}{3}, \frac{1}{3})$$

18. **Dado el triángulo de vértices A(-3, 1), B(-1, 5) y C(5, - 3), calcula la mediatriz del lado AB y la del lado AC. Halla las coordenadas del circuncentro** (Punto de intersección de las tres mediatrices).

    Solución:

    Tenemos las siguientes coordenadas:

    Hallamos el punto medio de AB $M_1=\frac{A+B}{2}=\frac{(-3,1)+(-1,5)}{2}=(-2,3)$

    Pendiente de AB:$m_{AB}=\frac{5-1}{-1-(-3)}=\frac{4}{2}=2.$

    La pendiente de una línea perpendicular es igual a $\frac{-1}{m}$, en donde, m es la pendiente de la línea original

    La pendiente de la mediatriz sobre lado AB será $m_1'=-\frac{1}{2}$

    La ecuación de la mediatriz sobre el lado AB es $y-3=-\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow med_1 \equiv x+2y-4=0$

    Hallamos el punto medio de $AC=M_2=\frac{A+C}{2}=\frac{(-3,1)+(5,-3)}{2}=(1,-1)$

    Pendiente del lado AC $m_{AC}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{-3-1}{5-(-3)}=\frac{-4}{8}=\frac{-1}{2}$ .La pendiente de la mediatriz del lado AC será $m_2'=2$.

    La mediatriz del lado AC es $y+1=2(x-1) \Rightarrow med_2 \equiv 2x-y-3=0$

    El circuncentro es la solución del sistema

    $\begin{matrix} med_1: x+2y-4=0 \\ med_2: 2x-y-3=0 \end{matrix} \Rightarrow Ci=(2,1)$

19. **Dado el triángulo de vértices A(-1, 2), B(5,-1) y C(3, 4), calcula el área**.

Solución:

Hallamos el vector directos de la recta AB $\overrightarrow{AB} = (5,-1) - (-1,2) = (6,-3)$

Pendiente de AB:$m_{AB} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$.

La ecuación del lado AB es $y-(2) = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow lado\ c \equiv x+2y-3 = 0$

Hallamos la longitud del lado c $= |AB| = \sqrt{6^2+(3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = 3\sqrt{5}$

La distancia de la altura del triángulo es la distancia del punto C (3,4) a la recta AB $\equiv x+2y = 0$

$d(C, rectaAB) = \frac{|1\cdot 3+2\cdot 4-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$

$\acute{A}rea = \frac{1}{2}b\cdot h = \frac{1}{2}3\cancel{\sqrt{5}}\cdot\frac{8}{\cancel{\sqrt{5}}} = \frac{24}{2} = 12$