Vectores

Ejercicios resueltos

Bachillerato 1º

2023

BY S3R4

1. **Sea (4,1)=** $\overrightarrow{u}$ **y la base** $B = \{(1,2);(0,-1)\}$ **Hallar coordenadas de** $\overrightarrow{u}$ **en esa base**

   Solución :

   (4,1)=α(1,2)+β(0,-1)

   (4,1)= (α,2$\alpha-\beta$) de donde se obtiene que:$\begin{cases} \alpha & = & 4 \\ 2\alpha-\beta & = & 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$4=α $\beta =$ 7 Entonces las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ son (4,7) respecto de la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$

2. **Sean** $\vec{v} = (2;3)$ **y** $\vec{w} = (4;-5)$**,Calcula módulos y ángulo entre de los vectores**

   Solución :

   $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2\ .\ 4 + 3\ .\ (-5) = -7$
   $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$
   $|\overrightarrow{w}| = \sqrt{4^2+(-5)^2} = \sqrt{41}$
   Despejando cos $\hat{\alpha}$ de la fórmula anterior, podemos calcular $\hat{\alpha}$, cuando no lo conocemos.

   $$\cos\ \hat{\alpha} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|.|\vec{w}|} = \frac{|-7|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}} \Rightarrow \alpha = 72{,}3°$$

3. **Ejemplo Calcula el producto escalar** $\vec{v} \cdot \vec{w}$ **con los datos que se indican en cada caso.**

   a. $\vec{v} = (1;5)$ $|\vec{w}| = \sqrt{6}$ $\hat{\alpha} = 45^{\text{o}}$

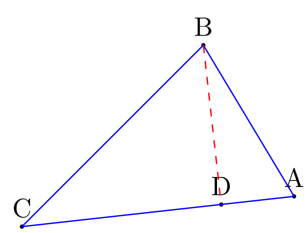
   c. $\vec{v} = (4;-1)$ $\vec{w} = (1;4)$

   b. $|\vec{v}| = |\vec{w}| = 3$ $\hat{\alpha} = 210^{\text{o}}$

   d. $|\vec{v}| = 4\ .\ |\vec{w}|$ $\hat{\alpha} = 90^{\text{o}}$

   Solución :

4. **Siendo A(7,0),B(4,5),C(-2,-1) los vértices de un triángulo, calcular las proyecciones de los lados AB y AC sobre BC y comprobar que su suma es igual al módulo de AC .**



Calculamos $\overrightarrow{AB} = (-3, 5), \overrightarrow{AC} = (-9, -1), \overrightarrow{CB} = (6, 6)$

La proyección de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$es $\overrightarrow{AB'}$ $\frac{(-3,5)(-9,-1)}{|(-9,-1)|} = \frac{22}{\sqrt{82}}$

La proyección de $\overrightarrow{CB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$ es $\overrightarrow{CB'}$ $\frac{(6,6)(-9,-1)}{|(-9,-1)|} = \frac{60}{\sqrt{82}}$

$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CB'} = \frac{22}{\sqrt{82}} + \frac{60}{82} = \frac{82}{\sqrt{82}} = \sqrt{82}$ que coincide con $|\overrightarrow{AC}| \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-9)^2 + (-1)^2} = \sqrt{82}$

5. **Dados los vectores x (5, –2), y (0, 3), z (–1, 4), calcula:**

   a) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

   b) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$

   c) $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

   Solución :

   a) x · y = (5, –2) · (0, 3) = –6

   b) x · z = (5, –2) · (–1, 4) = –5 – 8 = –13

   c) y · z = (0, 3) · (–1, 4) = 12

6. **Normalizar el vector** $\vec{v} = (1; 5)$

   Solución :

   $|v| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$.

   Entonces el vector normalizado será $v' = (\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}})$

7. **En una base ortonormal se consideran los vectores $\vec{u}$ (3, 0), $\vec{v}$ (2, 1) y $\vec{w}$ (–1, –2). Comprobar que B($\vec{u}$, $\vec{v}$) es también una base y calcular las coordenadas de $\vec{w}$ en esta base.**

   Solución :

   La pendiente de $\vec{u}$ es $\frac{0}{3} \neq$pendiente de $\vec{v}$ $= \frac{1}{2}$,luego no tienen la misma dirección. Por tanto, forman una base.

   $\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v} \rightarrow (-1, -2) = m(3, 0) + n(2, 1) \rightarrow (-1, -2) = (3m + 2n, n)$

   Igualando ambas coordenadas: $\begin{cases} -1 = & 3m + 2n \Rightarrow & m = & (2n+1)/3 \\ -2 = & n & \Rightarrow & n = & -2 \end{cases}$

   Solución: m = 1, n = –2

8. **Dado el vector $\vec{v}(-5, 3)$, calcula las coordenadas de los siguientes vectores:**

   a) unitarios y de la misma dirección que $\vec{v}$

   b) ortogonales a $\vec{v}$ y del mismo módulo

   c) Ortonormales a $\vec{v}$

   Solución :

a) Para convertir un vector en unitario, lo dividimos por su módulo:$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \Rightarrow v_1 = (\pm\frac{-5}{\sqrt{34}}, \pm\frac{3}{\sqrt{34}})$

Como queremos que tenga la misma dirección que u, nos quedamos con la solución positiva: $v_1 = (\pm\frac{-5}{\sqrt{34}}, \pm\frac{3}{\sqrt{34}})$

b) Se permutan las coordenadas y se cambia una de signo: $w1 = (3,5)$ y $w2 = (-3,-5)$

c)Ortogonal y unitario: Dividimos los vectores w1 y w2 que son ortogonales entre su módulo para convertirlos en unitarios:

$w1 = (\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}})$ y $w2 = (\frac{-3}{\sqrt{34}}, \frac{-5}{\sqrt{34}})$

9. **Dado el vector $\vec{u} = (2,-1)$, determinar dos vectores equipolentes a $\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{CD}}$, sabiendo que $A(1,-3)$ y $D(2,0)$.**

   - $\vec{u} = \overrightarrow{\text{AB}}$ $(2,1) = (x_B - 1, y_B + 3)$

   $2 = x_b - 1 \Rightarrow x_b = 3;\ -1 = y_b + 3 \Rightarrow y_b = -4 \Rightarrow B = (3,-4)$

   - $\vec{u} = \overrightarrow{\text{CD}}$ $(2,1) = (2 - x_C, 0 - y_C)$

   $2 = 2 - x_c \Rightarrow x_c = 0;\ -1 = -y_c \Rightarrow y_c \Longrightarrow C = (0,1)$

10. **Dados $u(\frac{1}{2}, k)$ y $v(\frac{1}{2}, 0)$, calcula k para que u y v formen un ángulo de 60°.**

    Solución :

    $cos\angle(u,v) = \frac{u\cdot v}{|u|\cdot|v|} = \frac{(\frac{1}{2},k)(\frac{1}{2},0))}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2, +k^2}\sqrt{(\frac{1}{2})^2+0^2}} = cos60^\circ = \frac{1}{2}$

    $\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}+k^2} = 1 \Rightarrow k = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$

11. **Halla un vector v de módulo $\sqrt{5}$ y que forme con u(2,-4) un ángulo de 60º**

    Solución :

    $$\text{Sea } v(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5} & \Rightarrow & x^2+y^2 = 5 \\ cos60 = \frac{2x-4y}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{2} & \Rightarrow & 2x-4y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x & = & \frac{5+4y}{2} \\ (\frac{5+4y}{2})^2 + y^2 & = & 5 \end{matrix}$$

    $$4y^2 + 8y + 1 = 0 \begin{cases} y = & -0{,}13 & \Rightarrow & x = & 2{,}24 \\ y = & -1{,}86 & \Rightarrow & x = & -1{,}22 \end{cases}$$

12. **Sean los vectores $a(3,n)$ y $b(-2,m)$. Calcular el valor de los parámetros n y m en cada uno de los siguientes casos, para que se cumpla:**

    a) **|a | = 5**
    b) **a ⊥ b y |a | = |b |**
    c) **forme un ángulo de 45° con el vector u = (1, 1).**

Solución:

a) $|a| = \sqrt{3^2 + n^2} = \rightarrow 9 + n^2 = 25 \rightarrow n = –4, n = 4$

b) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow (3, n)(-2, m) = 0 \Rightarrow -6 + mn = 0$

Además $|a| = |b| \Rightarrow \sqrt{9 + n^2} = \sqrt{4 + m^2} \Rightarrow n^2 - m^2 = -5$

Resolveiendo el sistema $\left\{ \begin{array}{ccc} mn = 6 & \Rightarrow & m = \frac{6}{n} \\ n^2 + 9 = m^2 + 4 & \Rightarrow & 9 + n^2 = 4 + \frac{36}{n^2} \end{array} \right. \Rightarrow$ Soluciones:

$$n = –2, m = –3; n = 2, m = 3$$

c) $a \cdot v = |a||v| cos 45° = |\ \mathrm{a}\ | \cdot \sqrt{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = |a| = \sqrt{9 + n^2}$

$a \cdot v = (3, n) \cdot (1, 1) = 3 + n$

Luego $\sqrt{9 + n^2} = 3 + n \rightarrow \cancel{9} + \cancel{n^2} = \cancel{9} + \cancel{n^2} + 6n \Rightarrow n = 0$

13. **Calcula el valor de k sabiendo que el módulo del vector $\vec{u} = (k, 3)$ es 5.**

    Solución:

    $5 = \sqrt{k^2 + 9}$; $k = \pm 4$

14. Sabiendo que $|u| = 3, |v| = 5$ y $u \perp v$, halla $|\mathrm{u} + \mathrm{v}\ |$ y $|\mathrm{u} - \mathrm{v}\ |$.

    Solución:

    a) $|u + v|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v =$
    $|u|^2 + |v|^2 = 32 + 52 = 34 \rightarrow |u + v| = 34(*)$
    $(*) u \perp v \rightarrow u \cdot v = 0$

    b) $|u–v|^2 = (u–v) \bullet (u–v) = u \cdot u–2u \cdot v + v \cdot v = = |u|^2 + |v|^2 = 32 + 52 = 34 \rightarrow |u–v| = 34$

15. **Si $\vec{v}$ es un vector de componentes (3,4), hallar un vector unitario de su misma dirección y sentido.**

    Solución:

    $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \vec{w} = \frac{1}{5}(3, 4) = (\frac{3}{4}, \frac{4}{5})$

16. **Hallar las coordenadas del punto C, sabiendo que B(2, - 2) es el punto medio de AC, A(- 3, 1).**

    Solución:

    $2 = \frac{-3 + x_c - 1}{2} \Rightarrow x_c = 7; \ -1 = \frac{1 + y_b}{2} \Rightarrow y_c = -5 \Rightarrow C = (7, -5)$

17. **Averiguar si están alineados los puntos:** $A(-2, -3)$**,** $B(1, 0)$ **y** $C(6, 5)$.

    Solución:

    Calculamos la pendiente de ABy la pendiente de AC y comparamos

    $\frac{1+2}{6-1} = \frac{3}{5} = \frac{0+3}{5-0} \Longrightarrow SI$

18. **Sean a y b dos vectores unitarios que forman un ángulo de 120°. Calcula | a + b| y | a − b|.**

Solución:

$|a + b|2 = (a + b) \bullet (a + b) = a \cdot a + 2a \cdot b + b \cdot b = |a|^2 + 2|a||b|cos($ $=1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 = 1–1 + 1 = 1 \to |a + b| = 1$

$|a–b|^2 = (a–b) \bullet (a–b) = a \bullet a–2a \bullet b + b \bullet b = |a|^2–2|a||b|cos(= 1 - 2 \cdot \frac{-1}{2}$ $+ 1 = = 1 + 1 + 1 = 3 \to |a–b| = 3$

19. **Las coordenadas de los extremos del segmento A$\vec{v}$son:** $A(2, -1)$ **y** $B(8, -4)$**. Hallar las coordenadas del punto C que divide al segmento A$\vec{v}$en dos partes tales que AC es la mitad de CB.**

Solución:

$AC = \frac{1}{2}CB \Rightarrow (x - 2, y + 1) = \frac{1}{2}(8 - x, -4 - y);$

$x - 2 = 1/2(8 - x) \Rightarrow x = 4$

$y + 1 = 1/2(-4 - y) \Rightarrow y = -2 \Rightarrow C = (4, -2)$

20. **Estudiar si los vectores A$\vec{v}$y CD son equipolentes siendo A=(1,3);B=(4,1),C=(-1,1) y D=(2,-1)**

Solución:

a) Son equipolentes si tienen igual mósdulo dirección y sentido. en definitiva, si son iguales

b) AB=(4,1)-(1,3)=(3,-2)

c) CD=(2,-1)-(1,1) =(3,-2) luego son equipolentes

21. **Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos**

a) **{(4,12),(2,6)}**

b) **{(1,2),(3,4)}**

c) **{(1,0),(0,1)}**

d) **{(1,3),(5,4),(-3,7)}**

Solución:

a)Linealmente dependientes ya que $\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$

b)Linealmente dependientes ya que $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{4}$ l. indep

c)Linealmente dependientes ya que $\frac{1}{0} \neq \frac{0}{1}$ l. indep

d)Por ser mas de 2 vectores son lin dep

22. **Probar que** $B = u_1, u_2$ **son base ,siendo** $u_1 = (4, 0); u_2 = (5, 1)$

Solución:

Son base si son lin indep y generador

Para probar que son generador supongamos un vector v=(a,b)

Entonces $(a,b) = x(4,0) + y(5,1)$

entonces $a = \frac{x-5y}{4}$ y $b = y$ luego generan v

Ademas por no ser proporcionales son l.i. , luego son base

23. **Sabiendo que $|\overrightarrow{u}| = 3$ y $\overrightarrow{u} = -5\overrightarrow{v}$. Calcular $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$**

    Solución:

    Puesto que $\overrightarrow{u} = -5\overrightarrow{v}$,$\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores que tienen la misma dirección pero sentido opuesto $\alpha = 180°$

    $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|cos180 = -|u||\overrightarrow{v}| = -3|\overrightarrow{v}|$

    $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = -5\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{v} = -5|\overrightarrow{v}|$

    Entonces $-5|\overrightarrow{v}|^2 = -3|\overrightarrow{v}| \Rightarrow |\overrightarrow{v}| = \frac{3}{5}$ ó $|\overrightarrow{v}| = 0$

    Pero $|\overrightarrow{v}| \neq 0$ ya que $|\overrightarrow{u}| = 3$ y $u = -5\overrightarrow{v}$ .Así que$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = -3|\overrightarrow{v}| = -3\frac{3}{5} = -\frac{9}{5}$

24. **Un vector fijo tiene su origen en el punto A(2, −1) y es equipolente al vector $\overrightarrow{\mathrm{CD}}(-1,\ 4)$. Determina las coordenadas de su extremo y su módulo.**

    Solución:

    a) B(1, 3); $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{17}$.

25. **Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos A(1, −3), B(2, 2) y C(−3, 0). Calcula las coordenadas del cuarto vértice.**

    Solución: D(-4, -5)

26. **Halla el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en los siguientes casos:**

    a) $|\vec{u}| = 2,\ \ |\vec{v}| = \frac{1}{4};\ \ (\vec{u},\vec{v}) = 60^{\text{o}}$ b) $|\vec{u}| = 3,\ \ |\vec{v}| = (2,-3);\ \ (\vec{u},\vec{v}) = 45^{\text{o}}$

    c) $\vec{u} = \left(3,\ \frac{1}{2}\right)\ ,\ \vec{v} = (-1,\ 3)$

    Solución:

    a) $\frac{1}{4}$;

    b) $= \frac{3\sqrt{26}}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$

27. **Dados los vectores $\vec{u}$(1, −2), $\vec{v}$(3, 1) y $\vec{w}$ (2, 0),**

    a) **calcula las coordenadas del vector $2\ \vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\ \vec{w}$,**

    b) **expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$,**

    c) **calcula los ángulos que forman dos a dos,**

    d) **halla un vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y de módulo $\sqrt{20}$,** *Solución:*

a) $2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}=2(1,-2)-(3,1)+\frac{1}{3}(2,0)=(2,-4)-(3,1)+(\frac{2}{3},0)=$ $(\left(-\frac{1}{3},\ -5\right)$

b) $\overrightarrow{w}=\frac{2}{7}\overrightarrow{u}+\frac{4}{7}\overrightarrow{v}$;

c) $\angle\ (\vec{u},\vec{v})=arcos\frac{u\cdot v}{|u||v|}=arcos\frac{(1,-2)(3,1)}{\sqrt{5}\sqrt{10}}$ $=81^{o}\ 52'\ 12''$;

$\angle(\vec{u},\vec{w})=63^{o}\ 26'\ 6''$;

$\angle(\vec{v},\vec{w})=\ 18^{o}\ 26'\ 6''$;

d) $\overrightarrow{x_1}$ =(2, -4) y $\overrightarrow{x_2}$ =(-2, 4).

28. **Si $\vec{u}$ (2, a) y $\vec{v}$ (1, -4) determina el valor de a para que:**

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares;

b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan el mismo módulo,

c) $\vec{u}\cdot\ \vec{v}=$ 10.

Solución:

a) $a=\frac{1}{2}$;

b) $a=\pm\sqrt{13}$;

c) $a=-2$

29. **Sea $\vec{u}$ (3, -2). Calcula:**

a) **un vector $\vec{x}$ unitario y con la misma dirección que $\vec{u}$,**

b) **un vector $\vec{z}$ unitario y perpendicular a $\vec{u}$.**

Solución:

a) $\overrightarrow{x_1}=\left(\frac{3\sqrt{13}}{13},\ -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\overrightarrow{x_2}=\left(-\frac{3\sqrt{13}}{13},\ \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$;

b) $\overrightarrow{z_1}=\left(\frac{2\sqrt{13}}{13},\ \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\overrightarrow{z_2}=\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13},\ -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$.