Los Números reales

Logaritmos

Bach MAT I

2023

BY S3R4

MATEMATICAS (MAT I)

1º Bachillerato

LOGARITMOS

S3r4

1 Concepto de logaritmo.

1.1 Definición

Consideremos a un número real *positivo, no nulo y distinto de 1*, y **A** otro número positivo no nulo. Se llama logaritmo en base a del número A, al exponente x a que debe elevarse la base a para obtener el número A.

Se representa por

$$log_a A = x \Longleftrightarrow a^x = A$$

1.1.1 Ejemplos

Hallar los siguientes logaritmos:
a)$log_2 16 = x \Longleftrightarrow 2^x = 16 \Longleftrightarrow 2^x = 2^4 \Longleftrightarrow x = 4 \Longleftrightarrow log_2 16 = 4$
b)$log_{1/3} 9 = x \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 \Longleftrightarrow 3^{-x} = 3^2 \Longleftrightarrow x = -2$
Calcular: $\log_2 128$, $\log_3 \sqrt{243}$, $\log_5 \left(\frac{5}{\sqrt[3]{5}}\right)$

De la infinidad de bases que podemos elegir para un logaritmo, hay dos que son, en la práctica, los más utilizados, los de base $a = 10$ (base 10) y *base* $a = e$.

Base 10: Los logaritmos de base $a = 10$, se llaman ***Logaritmos decimales***, y se suele representar de la siguiente forma

log x

Base e: Los logaritmos de base $a = e$, se llaman ***Logaritmos neperianos o naturales.*** y se suele representar de la siguiente forma

Ln x

(e es un número irracional cuyas primeras cifras son: e $=$ 2'71828182... y es el límite de la sucesión $\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$)

Los logaritmos neperianios deben su nombre a su descubridor John Napier de Merchiston (1550 -1617) y fueron los primeros en ser utilizados.

1.1.2 Log A en la calculadora

Estos logaritmos decimales se pueden obtener directamente con la calculadora, usando la tecla log

Por ejemplo, si deseamos calcular el valor de log 125, procederíamos de la siguiente forma

125 log en la pantalla aparece 2,096910013 ; log 125 = 2,096910013

1.1.3 Ln A en la calculadora

Estos logaritmos también se obtienen directamente usando la calculadora y con la tecla ln , por ejemplo, si deseamos obtener el valor de ln 125, teclearíamos

125 ln = en la pantalla aparece 4,828313737 usando la base e (logarimos naturales)

ln 125 = 4,828313737 usando logarimos naturales.

1.2 Propiedades de los logaritmos.

Las siguientes propiedades de los logaritmos son fundamentales para poder operar con los mismos.

Las propiedades de los logaritmos son las propiedades de las potencias.

1. $log_a a = 1 \Longleftrightarrow a^1 = a$
2. $log_a 1 = 0 \Longleftrightarrow a^0 = 1$
3. $log_a a^x = x \Longleftrightarrow ax = ax$
4. $a^{\log_a x} = x \Longleftrightarrow log_a x = log_a x$

5. **Logaritmo de un producto:**

$$\mathrm{log_a(x.y) = log_a\ x + log_a\ y}$$

Demostración:

Llamamos $A = log_a x$ y $B = log_a y$.

Por definición de logaritmos sabemos que: $A = log_a x \Longleftrightarrow a^A = x$ $B = log_a y \Longleftrightarrow a^B = y$

Multiplicamos: $xy = a^A a^B = a^{A+B} \Longleftrightarrow log_a xy = A + B = log_a x + log_a y$.

6. **Logaritmo de un cociente**

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x – log_a y$$

Demostración:

Llamamos $A = log_a x$ y $B = log_a y$.

Por definición de logaritmos sabemos que: $A = log_a x \iff a^A = x$ $B = log_a y \iff a^B = y$

Dividimos: $\frac{x}{y} = \frac{a^A}{a^B} = a^{A-B} \iff log_a(\frac{x}{y}) = A - B = log_a x - log_a y$.

7. **Logaritmo de una potencia**

$$log_a x^n = n.log_a x$$

Por definición de logaritmos sabemos que: $A = log_a x \iff a^A = x$

$A = log_a x \iff a^A = x \iff (a^A)^y = x^y = a^{Ay} \iff A^y = log_a x^y = y \cdot log_a x$

8. **Logaritmo de una raíz**

$$log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$$

Dominar estas propiedades, equivale a poder resover una gran cantidad de problemas.

1.2.1 Ejemplos

1.- Hallar el valor de los siguientes logaritmos decimales sin usar la calculadora:

- $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}\log 10 = \frac{1}{2},1 = \frac{1}{2}$
- $\log 40 + \log 25 = \log(40.25) = \log 1000 = \log 10^3 = 3$
- $\log 80 – \log 8 = \log\frac{80}{8} = \log 10 = 1$

Descomponer los siguientes logaritmos en logaritmos simples:

- log (x.y.z) = log x + log y + log z
- log $\left(\frac{x^3.y}{z^2}\right)$ = log (x^3.y) – log z^2 = log x^3 + log y – log z^2 = 3.log x + log y – 2 log z

Reducir a un solo logaritmo las siguientes expresiones
a) 3 log A + 5log B – 2 log Z = log A^3 + log B^5 – log Z^2 = log ($A^3.B^5$) – log Z^2 = log $\left(\frac{A^3.B^5}{Z^2}\right)$
b) $\frac{3}{2}$ log A + log B + $\frac{1}{2}$ log Z = log $A^{3/2}$ + log B + log $Z^{1/2}$ = log $\left(A^{3/2}.B.Z^{1/2}\right)$= lob $\left(\sqrt{A^3}.B.\sqrt{Z}\right)$

4.- Sabiendo que log 2 = 0'3010, hallar el valor de los siguientes logaritmos

- log 8 = log 2^3 = 3.log 2 = 3. 0'3010 = 0'9030
- log 5 = log(10/2) = log 10 – log 2 = 1 – 0'3010 = 0'699
- log 0'125 = log $\left(\frac{125}{1000}\right)$ = log 125 – log 1000 =log $\left(\frac{1000}{8}\right)$ – log1000=log1000 – log 8 – log 1000=-log 2^3 = -3.log 2 = -3 . 0'3010

= - 0'9030

1.3 Cambio de base.

Conocido el logaritmo de un número en una base, se puede hallar en cualquier otra base.
Si conocemos el logaritmo de cierto número A en dos bases distintas a y b, es decir, conocemos
$\log_a A$ y $\log_b A$

Nos planteamos la relación que hay entre ambos. Esta relación viene dada por la fórmula

$$\log_b A = \frac{\log_a A}{\log_a b}$$

Como consecuencia de esta última propiedad, se deduce que solamente necesitamos conocer los logaritmos en una sola base, los demás se obtienen aplicando el proceso anterior.

Para hallar un logaritmo en cualquier base, haremos un cambio a base 10, que sabemos hallar.

Hallar los siguientes logaritmos:

1. $\log_3 40 = \frac{\log 40}{\log 3} = \frac{1'6021}{0'4771} = 3'3580$
2. $\log_2 13'567 = \frac{\log 13'567}{\log 2} = \frac{1'1325}{0'3010} = 3'7625$