*Álgebra*

# Polinomios y Fracciones Algebraicas

*Bach MAT I*

**2023**

by S3r4

# MATEMATICAS (MAT I)

## 1º Bachillerato

### EXPRESIONES ALGEBRÁICAS.

### POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

S3r4

# 1 Polinomios

Un polinomio es una expresión algebraica constituida por una suma de finita de productos entre variables (valores no determinados o desconocidos) y constantes (números fijos llamados coeficientes), o bien una sola variable. Las variables pueden tener exponentes de valores definidos naturales incluido el cero y cuyo valor máximo de exponente se conocerá como grado del polinomio.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$n$ es el grado del polinomio

$a_n, a_{n-1}, ......, a_2, a_1, a_0$son los coeficientes

Cada término de la suma se llama **monomio**

Se llamará **binomio** si solo tiene dos términos ,por ejemplo $3x^4+2x$ ó $4x^3+5$.

Se llamará **trinomio** si solo tiene tress términos ,por ejemplo $3x^4 + 2x + 9$ ó $4x^3 - x^2 + 2$

## 1.1 Valor numérico del polinomio

Si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número real el valor numérico del polinomio para ese valor determinado de la variable.

**Ejemplo**

Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^3 - x^2 + 2$ en $x = 4$ obtendremos el número $p(4) = -3 \cdot 4^3 + 4^2 + 2 = -3 \cdot 64 + 16 + 2 = -1875 + 7 = -174$
Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^3 - x^2 + 2$ en $x = 0$ obtendremos el número $p(0) = -3 \cdot 0^3 + 0^2 + 2 = -3 \cdot 0 + 0 + 2 = 2$
Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^3 - x^2 + 2$ en $x = -2$ obtendremos el número $p(-2) = -3 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 2 = -3 \cdot (-8) + 4 + 2 = 30$

## 1.2 Operaciones con polinomios.

### 1.2.1 Suma y resta:

Para obtener la suma de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ :

Ordenamos los polinomios del término de mayor grado al de menor.

Agrupar los monomios del mismo grado.

Sumar los monomios semejantes sumando o restando los coeficientes con los coeficientes de la misma potencia.

**Ejemplo**

Por ejemplo, consideremos los polinomios:

$P(x) = 5x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 7x - 1$ y $Q(x) = 2x^3 - 5x + 10$

$$P(x) + Q(x) = 5x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x + 9$$

### 1.2.2 Producto:

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), para multiplicar P(x).Q(x), se multiplica cada monomio de P(x) con cada uno de los monomios de Q(x) y después se suman los monomios del mismo grado, obteniendo otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

**Ejemplo**

Por ejemplo, consideremos los polinomios :

$P(x) = 5x^4 + 3x^2 + 7x - 2 \quad$ y $\quad Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

$P(x).Q(x) = 10x^7 + 15x^6 - 5x^4 + 6x^5 + 9x^4 - 3x^2 + 14x^4 + 21x^3 - 7x - 4x^3 - 6x^2 + 2 =$

$= 10x^7 + 15x^6 + 18x^4 + 6x^5 + 17x^3 - 9x^2 + 7x + 2$

## 1.3 Propiedades del producto de polinomios

Propiedad conmutativa. Si p y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos:

$$p(x) \cdot q(x) \equiv q(x) \cdot p(x)$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x)) \equiv (q(x) \cdot p(x)) \cdot r(x)$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

$$p(x)(q(x) + r(x)) \equiv (p(x) \cdot q(x)) + (p(x) \cdot r(x))$$

### 1.3.1 División:

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, para poder dividir $P(x)$ entre $Q(x)$, el grado de $P(x)$ ha de ser mayor o igual que el de $Q(x)$.

$$P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$$

**Ejemplo**

Consideremos los polinomios:

$P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 7x - 5$ y $Q(x) = 3x^2 - 6x$

Realicemos la división $P(x) : Q(x)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^4 & -12x^3 & & +7x-5 & 3x^2-6x \\ \cline{5-5}
-4x^4 & +8x^3 & & & \frac{4}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3} \\ \cline{1-2}
 & -4x^3 & & & \\
 & 4x^3 & -8x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -8x^2 & +7x & \\
 & & 8x^2 & -16x & \\ \cline{3-4}
 & & & -9x-5 & 
\end{array}$$

- Se divide el término principal del resto, $(4x^4)$, por el término principal del denominador, $(3x^2)$: $4x^4/3x^2 = \frac{4}{3}x^2$, el resultado $\frac{4}{3}x^2$ es el primer término del cociente.
- Tomamos el término que acabamos de obtener y lo multiplicamos por el denominador: $\frac{4}{3}x^2(3x^2 - 6x) = 4x^4 - 8x^3$
- Restamos del numerador el resultado de la multiplicación anterior, dando lugar al siguiente resto. -> Nuevo resto: $4x^4 - 8x^3$
- Se divide el término principal del resto, $(-4x^3)$, por el término principal del denominador, $(3x^2)$: $4x^3 : 3x^2 = -\frac{4}{3}x$, el resultado $\frac{-4}{3}x$ es el siguiente término del cociente.
- Tomamos el término que acabamos de obtener y lo multiplicamos por el denominador: $-\frac{4}{3}x(3x^2 - 6x) = -4x^3 + 8x^2$
- Restamos del numerador el resultado de la multiplicación anterior, dando lugar al siguiente resto. -> Nuevo resto: $-8x^2 + 7x - 5$

- Se divide el término principal del resto, $(-8x^2)$, por el término principal del denominador, $(3x^2) \Rightarrow -8x^2 : 3x^2 = \frac{-8}{3}$, el resultado $\frac{-8}{3}$ es el siguiente término del cociente.
- Tomamos el término que acabamos de obtener y lo multiplicamos por el denominador: $\frac{-8}{3}(3x^2 - 6x) = -8x^2 + 16x$
- Restamos del numerador el resultado de la multiplicación anterior, dando lugar al siguiente resto. -> Nuevo resto: $-9x - 5$
- El resto tiene un grado polinómico menor (g=1) que el divisor (g=2), lo cual indica el final del proceso de división.
- El resultado de la división se conforma de la siguiente forma: $COCIENTE + \frac{RESTO}{DIVISOR.}$
- El resultado final de esta división polinómica es:
- $\frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + \frac{-9x-5}{3x^2-6x}$ o bien $C(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$ y el resto es $R(x) = -9x - 5$

**Ejemplo**

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -1 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+2x+2 \\ \cline{1-2}
& 2x^2 & & & \\
& -2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
& & 2x & -1 & \\
& & -2x & +2 & \\ \cline{3-4}
& & & 1 &
\end{array}
$$

## 1.4 Regla de Ruffini.Teorema del resto

División por un monomio de la forma $(x - a)$:

Para realizar esta división aplicamos la Regla de Ruffini

Por ejemplo, realicemos la división $(x^3 - 2x^2 + 3x - 5) : (x + 2)$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & -2 & 3 & -5 \\
-2 & & & -2 & 8 & -22 \\
-- & --- & --- & --- & --- \\
 & & 1 & -4 & 11 & -27
\end{array}$$

$C(x) = x^2 - 4x + 11 \quad y \qquad R(x) = -27$

## 1.5 Teorema del resto.

El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x = a$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x - a$.

## 1.6 Descomposición Factorial.

Por ejemplo, factorizar el polinomio $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6$

Aplicamos Ruffini con los divisores de $+6$ que son : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, y nos quedamos con los que den de resto 0.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -6 & -3 & 6 \\
1 & & 3 & -3 & -6 \\
\hline
 & 3 & -3 & -6 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
 & 3 & -3 & -6 \\
2 & & 6 & 6 \\
\hline
 & 3 & 3 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc}
 & 3 & 3 \\
-1 & & -3 \\
\hline
 & 3 & 0
\end{array}$$

$P(x) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot 3$ siendo las raíces de P(x) $\Rightarrow x = 1, x = -1, x = 2$

Nota:A la hora de buscar las raíces enteras de un polinomio disponemos del siguiente resultado:

Dado un polinomio cualquiera $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ cuyos coeficientes son todos números enteros, sus raíces enteras, si las tuviera, se encuentran necesariamente entre los divisores enteros de su término independiente a 0 .

## 1.7 Factorización de polinomios

Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales.

Basándonos en el cálculo de las raíces de un polinomio vamos a realizar el proceso de descomposición de un polinomio en forma de producto de otros polinomios más sencillos.(Factorización de un polinomio): Nos vamos a basar en el siguiente enunciado:

*La condición necesaria y suficiente para que un polinomio P(x) sea divisible por (x − a) es que a sea una raíz de P(x). Podemos reescribir este resultado de la siguiente manera: Un polinomio P(x) es divisible por (x − a) ⇔ a es una raíz de P(x).*

Demostración:

⇒Si $P(x)$ es divisible por $(x-a) \Rightarrow a$ es una raíz de $P(x)$

En efecto: Si $P(x)$ divisible por $(x-a) \Rightarrow r=0 \Rightarrow P(a)=0$ (por el teorema del resto) $\Rightarrow a$ es raíz de $P(x)$

⇐Si a es una raíz de $P(x) \Rightarrow (x-a)$ divide a $P(x)$ :

En efecto: a raíz de P(x) ⇒ P(a) = 0 (por el teorema del resto). El resto de la división de P(x) entre (x − a) es 0 ⇒ (x − a) divide a P(x) por la definición de raíz.

Consecuencia : si a es una raíz de P(x) ⇒ P(x) = c(x) (x − a)

El polinomio dado queda descompuesto en forma de producto de dos factores. Repitiendo el proceso para $c(x)$, éste se puede descomponer a su vez de nuevo y así sucesivamente.

Llegando al resultado general:

Dado el polinomio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ cuyas $n$ raíces son $x_1, x_2, ..., x_n$ ,dicho polinomio se puede descomponer factorialmente de la siguiente forma:

$$P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$

Decimos que un polinomio es reducible si admite una factorización mediante polinomios de grado inferior al suyo. En caso contrario el polinomio será irreducible.

**Ejemplo**

Factorizar $2x^4 + 9x^3 - 32x^2 - 99x + 180$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 9 & -32 & -99 & 180 \\ 3 & & 6 & 45 & 39 & -180 \\ \hline & 2 & 15 & 13 & -60 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 15 & 13 & -60 \\ -4 & & -8 & -28 & 60 \\ \hline & 2 & 7 & -15 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 7 & -15 \\ -5 & & -10 & 15 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$2x^4+9x^3-32x^2-99x+180=2\left(x-3\right)\left(x-\tfrac{3}{2}\right)\left(x+4\right)\left(x+5\right)$$

## 1.8 Fracciones algebraicas.

Denominamos Fracción Algebraica al cociente de polinomios:

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x) \neq 0$

Por ejemplo: $\frac{3x-5}{2x^2+x-1}$ ; $\frac{5}{7x^3-2x+3}$

### 1.8.1 Simplificar fracciones algebraicas:

Para simplificar una fracción algebraica, hay que descomponer factorialmente los polinomios del numerador y del denominador, y después, eliminar los factores comunes de ambos.

Por ejemplo, simplificar la fracción:

$\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+3x^2+2x} = \frac{x.(x^2+5x+6)}{x.(x^2+3x+2)} = \frac{x.(x+2).(x+3)}{x.(x+2).(x+1)} = \frac{x+3}{x+1}$

### 1.8.2 Operaciones:

**Suma y resta:**
Para sumar o restar fracciones algebraicas, procedemos como en la suma de fracciones numérica, reducimos a común denominador.

Por ejemplo, realizar la siguiente diferencia : $\frac{3x-1}{x^2+2x+1} - \frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$

Obtenemos la descomposición factorial de cada denominador:

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1).(x + 1) = (x + 1)^2$

$x^2 - 2x - 3 = (x + 1).(x - 3)$

el mínimo común múltiplo es $(x + 1)^2.(x - 3)$

$\frac{3x-1}{x^2+2x+1} - \frac{4x^2-1}{x^2-2x-3} = \frac{(x-3).(3x-1)-(x+1).(4x^2-1)}{(x+1)^2.(x-3)} =$

$= \frac{-4x^3-x^2-9x+4}{(x+1)^2.(x-3)}$

**Producto:**
Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \cdot \frac{q_1(x)}{q_2(x)} \equiv \frac{p_1(x) \cdot q_1(x)}{p_2(x) \cdot q_2(x)}$$

**División.** Sigue la conocida regla de la división de fracciones numéricas:

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} : \frac{q_1(x)}{q_2(x)} \equiv \frac{p_1(x) \cdot q_2(x)}{p_2(x) \cdot q_1(x)}$$