Vectores en el plano

Geometría

1º Bachillerato

2023

Vectores en el plano

Vector Fijo

Un vector fijo es un **segmento orientado**. Es decir, **un par ordenado de puntos**. El primero se denomina *origen* y el segundo *extremo* del vector. Cuando ambos puntos coinciden se denomina vector nulo.

Para describir un vector fijo se nombran su origen y su extremo con una flecha por encima $\vec{\mathrm{AB}}$.

Los elementos que definen un vector fijo son :

- *Módulo:* Longitud del segmento $\overline{\mathrm{AB}}$. Y se escribe $|\vec{\mathrm{AB}}|$

- *Dirección:* Es la recta sobre la que se encuentra el vector.

- *Sentido:* Cada dirección tiene dos sentidos.Diremos que dos vectores fijos tienen igual sentido(teniendo igual dirección) si al unir los orígenes de los vectores por una recta ambos extremos están en el mismo semiplano

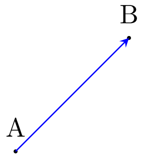


Figura 1: Vector fijo

El vector $\vec{\mathrm{AB}}$ es un vector de origen en el punto A y extremo en B. Conocemos su origen $A = (x_0, y_0)$ y su final $B = (x_1, y_1)$.

Se denota por $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, y sus coordenadas son $\vec{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$.

Se llaman **Vectores equivalentes o equipolentes**: El conjunto de los vectores fijos con igual módulo, dirección y sentido.

Vector libre

Es el conjunto de vectores que son equivalentes entres sí. Para representarlo cogemos como representante aquel que tiene por origen el (0,0).

Un vector LIBRE representa un conjunto de vectores fijos(equipolentes) con igual módulo, dirección y sentido.

Cada uno de los vectores de ese conjunto es un representante del conjunto y puede ser usado para cualquier operación como **representante de todos**.

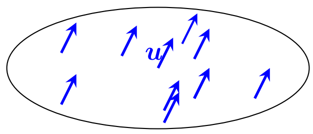
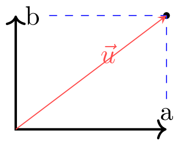


Figura 2: Vector libre

Nota: Para entender esto , debemos pensar en que los vectores equipolentes son como una caja de tornillos del mismo tipo. Cada tornillo es representante de su clase de tornillos. Todos los tornillos de esa clase es lo que llamamos «tornillo libre».

Por ejemplo el vector libre $(2,1)$= $\left\{\overrightarrow{(0,0)(2,1)};\ \overrightarrow{(1{,}2)(3{,}3)};\ \overrightarrow{(1,0)(3,1)};\ \overrightarrow{(0,3)(2,4)};\ ......\right\}$
Estarán todos los que la diferencia entre las coordenadas del punto origen y extremo da cómo resultado $(2,1)$.

Vector Libre: Sólo se conocen sus coordenadas, y se denotan por $\overrightarrow{u} = (a,b)$.

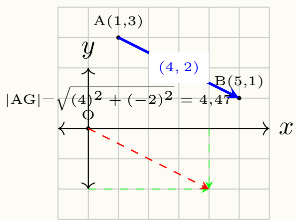


Módulo de un vector.

Sea $\overrightarrow{u}$ un vector libre, llamamos módulo del mismo a su longitud, y lo denotamos por $|\overrightarrow{u}|$

Ejemplo

Sea el vector dado por los puntos A(1,3) y B(5,1).
Si no fijamos en el triángulo que se forma, es rectángulo y podemos usar Pitágoras:
Hipotenusa = $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$



Tendremos $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(1-5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{20}$

En general para hallar el módulo del vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$; con $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ haremos $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$=

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Operaciones con vectores

Sean $\overrightarrow{u} = (a, b)$ y $\overrightarrow{v} = (c, d)$ dos vectores libres y sea k un número real, se definen las siguientes operaciones:

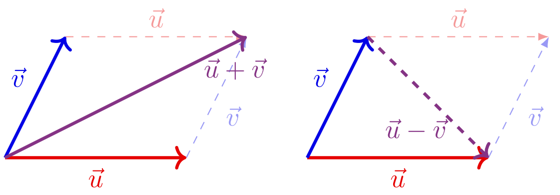
Sumas y restas de vectores.

Gráficamente:Se suman aplicando la regla del paralelogramo.

Analíticamente , se suman coordenadas:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$



Propiedades de la suma de vectores

- **Conmutativa:** Dados dos vectores del plano $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- **Asociativa:** Dados tres vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ del plano, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
- **Elemento neutro:** Dado $\overrightarrow{u}$, un vector cualquiera del plano, $\overrightarrow{u} + 0 = 0 + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

  Es decir, el vector 0 es el elemento neutro de la operación suma de vectores libres del plano.

  - *Demostración:* Recuérdese que 0 es el vector del plano formado por todos los vectores fijos cuyo origen coincide con el extremo.

  Se elige un punto fijo del plano, O, y con origen en O se busca el vector OP representante de $\overrightarrow{u}$.

  Los vectores OO y $\overrightarrow{PP}$ son representantes del vector 0.

  Así se tiene:$\overrightarrow{u} + 0 = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{u}$ y $0 + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
- **Elemento simétrico:** Dado un vector $\overrightarrow{u}$ del plano, existe otro vector -$\overrightarrow{u}$, tal que,

  $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = 0$. El vector $-\overrightarrow{u}$ recibe el nombre de simétrico u opuesto de $\overrightarrow{u}$.

Demostración: Bastará con demostrar una de las dos igualdades:

Sea $\overrightarrow{PQ}$ un representante de $\overrightarrow{u}$. Considérese el vector $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{QP}$.

$\overrightarrow{u}$ + (- $\overrightarrow{u}$) = $\overrightarrow{\overrightarrow{PQ}}$ + $\overrightarrow{QP}$ = $\overrightarrow{PP}$ = 0 y (- $\overrightarrow{u}$) + $\overrightarrow{u}$ = 0

Como consecuencia de todas las propiedades vistas se dice que el conjunto de los vectores fijos del plano, junto con la suma de vectores, constituye un grupo conmutativo.

Observaciones:

Dado un vector $\overrightarrow{u}$, su opuesto $-\overrightarrow{u}$ tiene el mismo módulo, la misma dirección y sentido contrario al de $\overrightarrow{u}$, Basta con ver la construcción de $-\overrightarrow{u}$.

Resta de vectores: Dados dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, existe un único vector $\overrightarrow{x}$ que verifica $\overrightarrow{u}$ = $\overrightarrow{x}$ + $\overrightarrow{v}$.

Si existe tal vector, sería: $\overrightarrow{u}$ = $\overrightarrow{v}$ + $\overrightarrow{x}$$\Rightarrow$ (- $\overrightarrow{v}$) + $\overrightarrow{u}$ = (- $\overrightarrow{v}$) + ($\overrightarrow{v}$ + $\overrightarrow{x}$)

Por la propiedad asociativa, (- $\overrightarrow{v}$) + ($\overrightarrow{v}$ + $\overrightarrow{x}$) = [(- $\overrightarrow{v}$) + $\overrightarrow{v}$] + $\overrightarrow{x}$ = 0 + $\overrightarrow{x}$= $\overrightarrow{x}$

Así, el único vector que puede verificar tal propiedad es el vector $\overrightarrow{x}$ = (- $\overrightarrow{v}$) + $\overrightarrow{u}$.

Falta ver que efectivamente la verifica:

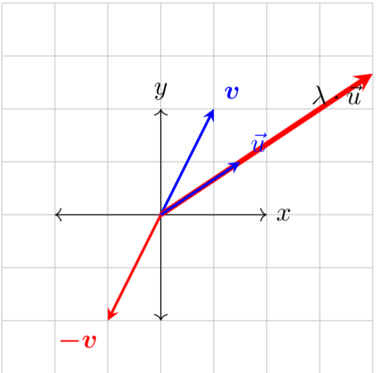
$\overrightarrow{v}$ + $\overrightarrow{x}$ = $\overrightarrow{v}$ + [(- $\overrightarrow{v}$) + $\overrightarrow{u}$] = [$\overrightarrow{b}$+ (- $\overrightarrow{v}$)] + $\overrightarrow{u}$= 0 + $\overrightarrow{u}$= $\overrightarrow{u}$, que es la igualdad buscada.

El vector (-v) + $\overrightarrow{u}$ recibe el nombre de diferencia entre los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y suele representarse por $\overrightarrow{u}$- $\overrightarrow{v}$.

Producto de un vector por un número.

Si k es un número real y $\overrightarrow{v}$ un vector no nulo, el producto $k \cdot \overrightarrow{v}$ será otro vector con las siguientes características:

- Su módulo es igual al módulo de $\overrightarrow{v}$ multiplicado por el valor absoluto de k.
- Su dirección es la misma que la de $\overrightarrow{v}$.
- Su sentido es el mismo de $\overrightarrow{v}$ si k es positivo o el contrario si k es negativo.
- Cuando $\overrightarrow{v}$ es el vector nulo, o $k = 0$, el resultado es el vector nulo: :$0 \cdot \overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
- Analiticamente $k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b)$



Primeras propiedades del producto de números por vectores

- Dado un vector $\overrightarrow{u}$ se verifica que $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
  - *Demostración:* En efecto, $|1 \cdot \overrightarrow{u}| = |1| \cdot |\overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{u}|$
  - Por definición $1 \cdot \overrightarrow{u}$ tiene la misma direción que $\overrightarrow{u}$. Como 1 es positivo, el sentido de $1 \cdot \overrightarrow{u}$ es el de $\overrightarrow{u}$. Por tener el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, los vectores libres $\overrightarrow{u}$ y $1 \cdot \overrightarrow{u}$ coinciden.
- Para cualquier vector $\overrightarrow{u}$, se verifica que $(-1) \cdot \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$
  - *Demostración:* Para verlo conviene recordar que $-\overrightarrow{u}$ tiene el mismo módulo, la misma dirección y sentido contrario al de $\overrightarrow{u}$. Si se concluye que $(-1) \cdot \overrightarrow{u}$ cumple esas tres condiciones, se tendrá la propiedad dada.
  - $|(-1) \cdot \overrightarrow{u}| = |-1| \cdot |\overrightarrow{u}| = 1 \cdot |\overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{u}|$
  - La dirección de $(-1) \cdot \overrightarrow{u}$ es la de $\overrightarrow{u}$.
  - El sentido de $(-1) \cdot \overrightarrow{u}$ es opuesto al de $\overrightarrow{u}$, porque -1 es negativo.
  - Así pues $(-1) \cdot \overrightarrow{u}$ tiene módulo, dirección y sentido iguales a los de $-\overrightarrow{u}$. Por tanto:
  - $(-1) \cdot \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.

Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores no nulos. Entonces:

- Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen la misma dirección, existe un número r tal que $\overrightarrow{u} = r \cdot \overrightarrow{v}$; y r es positivo si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen el mismo sentido, y negativo en caso contrario.
  - Además, de $\overrightarrow{u} = r \cdot \overrightarrow{v}$, se deduce que $|\overrightarrow{u}| = |r| \cdot |\overrightarrow{v}| \Rightarrow |r| = \frac{|\overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{v}|}|$
  - A partir de ahora, para diferenciar números de vectores, a los primeros se les llamará, a menudo, escalares.

- Otras propiedades del producto de escalares por vectores Dados dos números reales r y s, y un vector $\overrightarrow{u}$ se tiene:
    - $(k_1 \cdot k_2 \cdot s) \cdot \overrightarrow{u} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \overrightarrow{u})$
        - Debido al extraordinario parecido que tiene esta propiedad con la propiedad asociativa del producto de números, a veces se la denomina propiedad asociativa.

- Propiedad distributiva del producto respecto de la suma de escalares Dados dos números r y donde s y un vector $\overrightarrow{u}$, se cumple la igualdad:

$$(k_1 + k_2) \cdot \overrightarrow{u} = k_1 \cdot \overrightarrow{u} + k_2 \cdot \overrightarrow{u}$$

    - *Demostración:* Se hará únicamente en el caso $k_1, k_2 > 0$. Para comprobarlo en los demás casos, bastará con hacer pequeñas modificaciones teniendo en cuenta los sentidos de los vectores.

      Los vectores $k_1 \cdot \overrightarrow{u}$ y $k_2 \cdot \overrightarrow{u}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido. Al sumarlos se suman los módulos y se mantienen la dirección y el sentido.

      Así pues, $|k_1 \cdot \overrightarrow{u} + k_2 \cdot \overrightarrow{u}| = |k_1 \cdot \overrightarrow{u}| + |k_2 \cdot \overrightarrow{u}| = k_1 \cdot |\overrightarrow{u}| + k_2 \cdot |\overrightarrow{u}|$

      Pero $|(k_1 + k_2) \cdot \overrightarrow{u}| = (k_1 + k_2) \cdot |\overrightarrow{u}| = k_1 \cdot |\overrightarrow{u}| + k_2 \cdot |\overrightarrow{u}|$ Luego ambos vectores tienen el mismo módulo.

      La dirección y el sentido de ambos coinciden con los de $\overrightarrow{u}$.

      Por tener iguales el módulo, la dirección y el sentido ambos vectores libres son iguales.

- **Propiedad distributiva del producto respecto de la suma de vectores** : Dados un número real k y dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, se verifica

$$k \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k \cdot \overrightarrow{u} + k \cdot b$$

  Demostración: Para demostrarlo se elige un punto P del plano y a partir de él se llevan los vectores $\overrightarrow{u}$ = PH y $k\overrightarrow{u} = PH'$

  Se construye el vector $\overrightarrow{v}$con origen en H, obteniéndose el punto M Prolongando la recta PM y trazando por H' una paralela a HM, se obtiene M' como punto de intersección Los dos triángulos PHM y PH'M' son semejantes por el teorema fundamental de semejanza de triángulos. Su razón de semejanza es: PH'/PH = r por ser PH' = k·$\overrightarrow{u}$ y PH = $\overrightarrow{u}$.

  Así pues, $\frac{H'M'}{HM} = k$, con lo que $H'M' = k \cdot HM$

  Puesto que los vectores HM y H'M' tienen la misma dirección y sentido, se tiene que H'M' = k·HM = k·b

De la misma forma PM' = k·PM, de donde se da la igualdad vectorial PM' = k·PM.

Ya es fácil demostrar el resultado enunciado: $k \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k \cdot (PH + HM) = k \cdot PM = PM'$

$k \cdot \overrightarrow{u} + k \cdot \overrightarrow{v} = PH' + H'M' = PM'$. De ahí la igualdad.

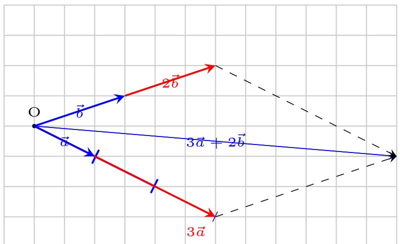
Combinacion lineal de vectores.

Una **combinación lineal** de los vectores $\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ es una expresión de la forma: $\lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} + \lambda_3 \overrightarrow{c}$; con λ_1,λ_2, y λ_3 números reales.

Se dice que $\overrightarrow{u}$ se puede **escribir como combinación lineal** de los vectores $\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ si $\overrightarrow{u}$ se puede escribir de la forma $\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} + \lambda_3 \overrightarrow{c}$; con λ_1,λ_2, y λ_3 números reales

Muy importante

En el plano , cualquier vector se puede expresar como una combinación lineal de dos vectores con diferente dirección y esta combinación de números λ_1, λ_2 , es única.



Propiedades

Primera propiedad Los vectores que son combinación lineal de un solo vector ŭ son el vector 0 y todos los vectores que son paralelos a ŭ.

• *Demostración:* Si x es combinación lineal de ŭ, es de la forma x = k·ŭ. Entonces:

a) Si k = 0, x = 0·$\overrightarrow{u}$ = 0

b) Si r $\neq$ 0, x = r·$\overrightarrow{u}$, luego x es paralelo a $\overrightarrow{u}$ por tener ambos la misma dirección

Segunda propiedad Dados dos vectores del plano $\overrightarrow{u}1$ y $\overrightarrow{u}_2$ que tengan distinta dirección, el único vector que es combinación lineal de cada uno de ellos es el vector 0.

• *Demostración:* Si hubiese un vector no nulo que fuese combinación lineal de cada uno de ellos, también habría de ser paralelo a cada uno de ellos, con lo que $\overrightarrow{u}1$ y $\overrightarrow{u}_2$ han de ser paralelos entre sí, lo cual va contra la hipótesis.

Teorema. Sean $\overrightarrow{u}_1$ y $\overrightarrow{u}_2$ dos vectores del plano con distinta dirección. Entonces cualquier vector x del plano se puede poner de manera única como combinación lineal de $\overrightarrow{u}_1$ y $\overrightarrow{u}_2$

• *Demostración:* Considérese P un punto cualquiera del plano y trácense, con origen en P, representantes de los vectores $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ y $\overrightarrow{x}$

Llamando A al extremo de x, se trazan por él paralelas a los vectores $\overrightarrow{u}_1$ y $\overrightarrow{u}_2$

Prolongando las rectas que contienen a $\overrightarrow{u}_1$ y $\overrightarrow{u}_2$, se obtienen los puntos B y C.

De la figura se deduce inmediatamente que $PA = PB + PC$.

Pero PB es paralelo a $\overrightarrow{u}_1$, por lo que se tiene que PB $=$ x1$\cdot\overrightarrow{u}_1$, para un cierto número x_1

Análogamente PC $= x_2\cdot\overrightarrow{u}_2$, para cierto escalar x_2

Por tanto $\overrightarrow{x} = PA = PB + PC = x_1 \cdot \overrightarrow{u}_1 + x_2 \cdot \overrightarrow{u}_2$

Falta ver la unicidad:

Si $\overrightarrow{x} = y_1 \cdot \overrightarrow{u}_1 + y_2 \cdot \overrightarrow{u}_2, x_1 \cdot \overrightarrow{u}_1 + x_2 \cdot \overrightarrow{u}_2 = y_1 \cdot \overrightarrow{u}_1 + y_2 \cdot \overrightarrow{u}_2 \Rightarrow (x_1 - y_1) \cdot \overrightarrow{u}_1 = (x_2 - y_2) \cdot \overrightarrow{u}_2$

Con lo que se tiene un vector que es combinación lineal de cada uno de ellos. Por la segunda propiedad vista anteriormente, se concluye que dicho vector ha de ser 0.

Así, (x_1 - y1)$\cdot\overrightarrow{u}_1$ = (x_2 - y_2)$\cdot\overrightarrow{u}_2$ = 0. Para ello han de ser 0 los coeficientes, es decir:

x_1 - y_1 = 0 $\Rightarrow$ x_1 = y_1 x_2 - y_2 = 0 $\Rightarrow$ x_2 = y_2 Luego los números dados son únicos

Conjunto de vectores linealmente dependientes

Un conjunto de vectores se dice que es **linealmente dependiente** cuando uno de los vectores del conjunto se puede escribir como combinación lineal del resto.

Ejemplo Se dice que el conjunto $A = \{(2,1);(1,0);(0,1)\}$ es **l. d.(linealmente dependientes)** ya que $(2,1) = 2 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$.

Definición

Otra forma de definirlo es: Un conjunto de vectores se dice que l. d. cuando podemos escribir el vector $\vec{0}$ como combinación lineal de ellos sin que los coeficientes sean todos ceros.
Ejemplo $\{(2,1);(1,0);(0,1)\}$ son **l. d.** por que (2,1)= 2·(1,0)+1·(0,1); entonces (0,0)=(-1)·(2,1)+ 2·(1,0)+1·(0,1); con al menos el coeficiente de (2,1) no es cero.

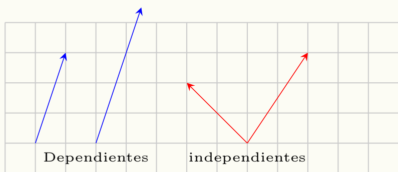
Conjunto de vectores linealmente independientes

Definición

Un conjunto de vectores se dice que es **l.i.** cuando ninguno se puede escribir como combinación lineal del resto.
O de otra forma, si el vector cero $\vec{0}$ se puede expresar como combinación lineal de ellos todos los coeficientes son 0.

Ejemplo

$B = \{(-2,0),(0,1)\}$. Es un conjunto linealmente independiente ya que si (0,0)=α(-2,0)+β(0,1); necesariamente α y β deben ser 0.



Consecuencia de las definiciones anteriores:

En el plano :

- Un conjunto de dos vectores **proporcionales** (los dos con igual dirección) son **linealmente dependientes**
- un conjunto de dos vectores **no proporcionales** (con diferente dirección) son **linealmente independientes**

- un conjunto de **tres vectores** con diferentes direcciones son **linealmente dependientes(**No hay conjuntos linealmente independientes de tres o mas vectores)

  Gráficamente dos vectores son l.d. $\Longleftrightarrow$ son dos vectores de igual dirección.

  Gráficamente dos vectores son l.i. $\Longleftrightarrow$ son dos vectores de distinta dirección.

  Dados dos vectores l.i., si considero un tercero éste siempre se puede expresar como combinación lineal de los otros dos.

Base de vectores.

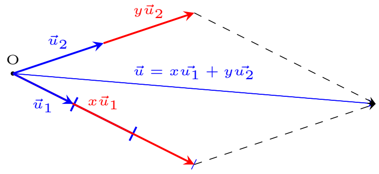
Una **base de vectores** del plano está formada por dos vectores $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$, que son independientes y que a partir de combinaciones lineales de ellos, obtenemos todos los demás vectores del plano. Se denota de la siguiente forma:

B={ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$}

Y si $\overrightarrow{a}$ es otro vector del plano, entonces $\overrightarrow{a} = x \cdot \overrightarrow{u_1} + y \cdot \overrightarrow{u_2}$.

Todo vector puede venir expresado de dos formas distinta,

- En función de los vectores de una base: $\overrightarrow{u} = x \cdot \overrightarrow{u_1} + y \cdot \overrightarrow{u_2}$
- En coordenadas: $\overrightarrow{u} = (x, y)$con respecto a una base



Ejemplo

Sea (4,1)= $\overrightarrow{u}$ y la base $B = \{(1, 2); (0, -1)\}$
(4,1)=α(1,2)+β(0,-1)
(4,1)= (α,2$\alpha - \beta$) de donde se obtiene que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 4 \\ 2\alpha - \beta & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow 4{=}\alpha \quad \beta = 7$$

Entonces las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ son (4,7) respecto de la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$

La base llamada canónica es la formada por $\left\{\overrightarrow{i}\,(1, 0); \overrightarrow{j}\,(0, 1)\right\}$

Coordenadas de un vector respecto una base

Definición

Si tengo la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ a los escalares que forman la combinación lineal de los elementos de la base que determinan el vector se les llama **coordenadas del vector en esa base**.
Las coordenadas de un vector serán distintas respecto de cada base.

Base Ortogonal

Una base $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ se dice que es ortogonal, si sus vectores son perpendiculares.

Base Normada

Una base $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ se dice que es normada si los vectores que la forman son unitarios, es decir, $|\overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{v}| = 1$.

Base Ortonormal:

Una base $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ se dice que es ortonormal si es ortogonal y normada a la vez, es decir, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, $|\overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{v}| = 1$.

Todo vector que venga expresado en función de los vectores de una base ortonormal, puede expresarse en coordenadas.
Dado el vector $\overrightarrow{u} = (a, b)$; las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ respecto de la base canónica $\left\{\overrightarrow{i}(1,0); \overrightarrow{j}(0,1)\right\}$ serán siempre (a, b)

Operaciones con vectores

Producto escalar

Definición

El producto escalar de un vector $\vec{u}$ y otro $\vec{v}$, denotado como $\vec{u} \cdot \vec{v}$ es un número (escalar) tal que,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot cos\alpha$$

donde es α el angulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Propiedades del producto escalar

- Si uno de los dos vectores $\vec{u}$ ó $\vec{v}$ es 0, su producto escalar es 0 ya que el módulo de uno de ellos será cero. El recíproco no es cierto: el producto puede ser 0 sin que ninguno de los vectores sea 0 (cuando el coseno valga 0).
- El producto escalar es conmutativo, es decir,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- El producto escalar es distributivo respecto de la suma de vectores:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

- Extracción de un escalar $\lambda \in$ R :

$$\vec{u} \cdot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

- **Si los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son ortogonales (perpendiculares), entonces su producto escalar es 0.**
  - En efecto

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| cos(90) = 0 \quad ó \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| cos(-90) = 0$$

- El producto de un vector por sí mismo es el cuadrado de su módulo:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{u}| \cdot cos\, 0 = |\overrightarrow{u}|^2$$

- El módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada de su cuadrado:

$$|\overrightarrow{u}|^2 = \sqrt{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}}$$

Expresión analítica del producto escalar

Sea $B = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ una base ortonormal de vectores. En ella consideramos los vectores

$\overrightarrow{u} = x_1.\overrightarrow{i} + x_2.\overrightarrow{j}$ $\qquad$ $\overrightarrow{v} = y_1.\overrightarrow{i} + y_2.\overrightarrow{j}$

En base ortonormal:

Como $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j} = 0; \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{i} = 0; \overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{i} = 1; \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{j} = 1;$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = (x_1\cdot\overrightarrow{i} + x_2\cdot\overrightarrow{j})\cdot(y_1\cdot\overrightarrow{i} + y_2\cdot\overrightarrow{j}) =$$

$$= x_1\cdot y_1\cdot\cancelto{0}{\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{i}} + x_2\cdot y_1\cdot\cancelto{0}{\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{i}} + x_1\cdot y_2\cdot\cancelto{0}{\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j}} + x_2\cdot y_2\cdot\cancelto{1}{\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{j}} = \boxed{x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2}$$

$|\overrightarrow{x}| = \sqrt{a^2+b^2}$

En base no ortonormal:

Sea $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ una base de vectores. En ella consideramos los vectores

$\overrightarrow{u} = x_1.\overrightarrow{u_1} + x_2.\overrightarrow{u_2}$ $\qquad$ $\overrightarrow{v} = y_1.\overrightarrow{u_1} + y_2.\overrightarrow{u_2}$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = (x_1.\overrightarrow{u_1} + y_1.\overrightarrow{u_2}).(x_2.\overrightarrow{u_1} + y_2.\overrightarrow{u_2}) =$$

$$= x_1.y_1.|\overrightarrow{u}_1|^2 + x_1.y_2.\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} + x_2.y_1.\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_1} + x_2.y_2|\overrightarrow{u_2}|^2$$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{(x_1.\overrightarrow{u_1} + x_2.\overrightarrow{u_2}).(x_1.\overrightarrow{u_1} + y_2.\overrightarrow{u_2})}$$

En una base no ortonormal los cálculos son mas difíciles ya que requieren el conocimeiento de los productos escalares de las bases.

Producto escalar de dos vectores en base ortonormal.

Así pues, podemos definir nuevamente el producto escalar por medio de su expresión analítica :

Definición

Sean $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)=$ y $\overrightarrow{v} = (x_{2,} y_2)$ dos vectores libres con coordenadas en base ortonormal , se llama **producto escalar** de ambos vectores al valor de la siguiente expresión:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 \ . \ x_2 + y_1 \ . \ y_2$$

Otra forma de hallar el producto escalar entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, conociendo el ángulo $\hat{\alpha}$ que forman, es:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\cos\alpha$$

con $\alpha = \text{áng}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Ejemplo

Sean $\vec{v} = (2; 3)$ y $\vec{w} = (4; -5)$,
Entonces
$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \ . \ 4 + 3 \ . \ (-5) = -7$
$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
$|\overrightarrow{w}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$
Despejando $\cos \hat{\alpha}$ de la fórmula anterior, podemos calcular $\hat{\alpha}$, cuando no lo conocemos.

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|.|\vec{w}|} = \frac{|-7|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}} \Rightarrow \alpha = 72{,}3°$$

Ejemplo

Ejemplo Calcula el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$ con los datos que se indican en cada caso.
a. $\vec{v} = (1; 5)$ $|\vec{w}| = \sqrt{6}$ $\hat{\alpha} = 45^{\text{o}}$
c. $\vec{v} = (4; -1)$ $\vec{w} = (1; 4)$
b. $|\vec{v}| = |\vec{w}| = 3$ $\hat{\alpha} = 210^{\text{o}}$
d. $|\vec{v}| = 4 \ . \ |\vec{w}|$ $\hat{\alpha} = 90^{\text{o}}$
Solución :

Teorema

Dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se dicen que son ortogonales si su producto escalar es cero:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Demostración

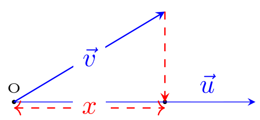
$\Rightarrow$) $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\alpha = 0$

$\Leftarrow$)Si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ Entonces $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \cdot cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad algún \;\; vector \; es \, nulo \\ \qquad \quad ó \\ cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Propiedades del producto escalar

- El producto escalar de dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es igual al producto del módulo de $\overrightarrow{u}$ por la proyección de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{u}$ (este producto será positivo si $\overrightarrow{u}$ y la proyección de $\overrightarrow{v}$ sobre él tienen el mismo signo, y negativo en caso contrario).



  Demostración: La proyección de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{u}$ es un segmento de medida x.

  Por la resolución de triángulos rectángulos se sabe que $cos\ \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{v}|}$

  Sustituyendo en la definición de producto escalar:

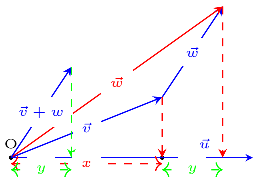
  $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot cos\alpha = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot (\frac{x}{|\overrightarrow{v}|}) = |\overrightarrow{u}| \cdot x$, que es la fórmula que se quería demostrar.

- **Propiedad conmutativa del producto escalar de vectores** Dados dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} . \overrightarrow{u}$

  - *Demostración:* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\alpha = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{u}| \cdot \cos\alpha = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

- **Propiedad distributiva respecto de la suma**. Dados tres vectores cualesquiera $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ del plano, $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$

  - *Demostración:* Para demostrarlo se utiliza la primera propiedad del producto escalar.



- En la figura, la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es el segmento x, la proyección de $\vec{w}$ sobre $\vec{u}$, es el segmento y, y la proyección de $\vec{v}+\vec{w}$ sobre $\vec{u}$ es el segmento $x+y$.

Así pues:

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = |\vec{u}|\cdot(x+y)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot x$; $\vec{u}\cdot\vec{w} = |\vec{u}|\cdot y$

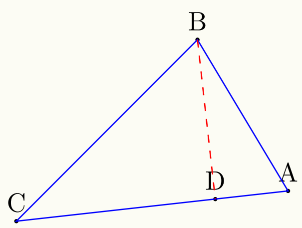
$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} = |\vec{u}|\cdot x + |\vec{u}|\cdot y = |\vec{u}|\cdot(x+y) = \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$

- **Propiedad de linealidad** Si se multiplica uno de los factores de un producto escalar por un número real, el producto escalar queda multiplicado por dicho número.

$$(k\cdot\vec{u}).\vec{v} = k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

Ejemplo

Siendo A(7,0),B(4,5),C(-2,-1) los vértices de un triángulo, calcular las proyecciones de los lados AB y AC sobre BC y comprobar que su suma es igual al módulo de AC .



Calculamos $\overrightarrow{AB}=(-3,5), \overrightarrow{AC}=(-9,-1), \overrightarrow{CB}=(6,6)$
La proyección de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$es $\overrightarrow{AB'}$ $\frac{(-3,5)(-9,-1)}{|(-9,-1)|} = \frac{22}{\sqrt{82}}$
La proyección de $\overrightarrow{CB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$ es $\overrightarrow{CB'}$ $\frac{(6,6)(-9,-1)}{|(-9,-1)|} = \frac{60}{\sqrt{82}}$
$\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CB'}=\frac{22}{\sqrt{82}}+\frac{60}{82} = \frac{82}{\sqrt{82}} = \sqrt{82}$ que coincide con $|\overrightarrow{AC}| \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-9)^2+(-1)^2} = \sqrt{82}$

Vectores unitarios.

Se llaman vectores unitarios a aquellos vectores que su $|\overrightarrow{u}| = 1$

Normalización de un vector.

Sea $\overrightarrow{u}$ un vector no nulo y no unitario. Normalizar dicho vector es construir otro, a partir de él, que tenga la misma dirección , sentido y que su módulo sea 1. Dicho vector se construye dividiendo por su módulo.

$$\overrightarrow{u'} = \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}$$

Ejemplo

Normalizar el vector $\vec{v} = (1; 5)$

Solución :

|v|=$\sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$.

Entonces el vector normalizado será $v' = (\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}})$

Ejemplo

Dado el vector $\overrightarrow{v}(-5, 3)$, calcula las coordenadas de los siguientes vectores:

a) unitarios y de la misma dirección que v

b) ortogonales a v y del mismo módulo

c) Ortonormales a v

Solución :

a) Para convertir un vector en unitario, lo dividimos por su módulo:$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \Rightarrow v_1 = (\pm\frac{-5}{\sqrt{34}}, \pm\frac{3}{\sqrt{34}})$

Como queremos que tenga la misma dirección que u, nos quedamos con la solución positiva: $v_1 = (\pm\frac{-5}{\sqrt{34}}, \pm\frac{3}{\sqrt{34}})$

b) Se permutan las coordenadas y se cambia una de signo: $w1 = (3, 5)$ y $w2 = (-3, -5)$

c)Ortogonal y unitario: Dividimos los vectores w1 y w2 que son ortogonales entre su módulo para convertirlos en unitarios:

$w1 = (\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}})$ y $w2 = (\frac{-3}{\sqrt{34}}, \frac{-5}{\sqrt{34}})$

Ángulo entre dos vectores

Se define como el menor ángulo positivo determinado por ambos al estar aplicados en un origen común.

$$\cos\,\hat{\alpha} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$$

Ejercicios resueltos

1. **Dado el vector $\vec{u}=(2,-1)$, determinar dos vectores equipolentes a $\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{CD}}$, sabiendo que $A(1,-3)$ y $D(2,0)$.**

   - $\vec{u}= \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ \ (2,1)=(x_B-1,y_B+3)$

   $2=x_b-1 \Rightarrow x_b=3$; $-1=y_b+3 \Rightarrow y_b=-4 \Rightarrow B=(3,-4)$

   - $\vec{u}= \overrightarrow{\mathrm{CD}}\ \ (2,1)=(2-x_C,0-y_C)$

   $2=2-x_c \Rightarrow x_c=0$; $-1=-y_c \Rightarrow y_c \Longrightarrow C=(0,1)$

2. **Halla un vector v de módulo $\sqrt{5}$ y que forme con u(2,-4) un ángulo de 60º**

   $$\text{Sea } v(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5} & \Rightarrow\ x^2+y^2=5\\ cos60=\frac{2x-4y}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{2} & \Rightarrow\ 2x-4y=5\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x &=& \frac{5+4y}{2}\\ (\frac{5+4y}{2})^2+y^2 &=& 5\end{matrix}$$

   $$4y^2+8y+1=0\begin{cases} y= & -0{,}13 & \Rightarrow & x= & 2{,}24\\ y= & -1{,}86 & \Rightarrow & x= & -1{,}22\end{cases}$$

3. **Calcula el valor de k sabiendo que el módulo del vector $\vec{u}=$ (k, 3) es 5.**

   $5=\sqrt{k^2+9}$; $k=\pm 4$

4. **Si $\vec{v}$ es un vector de componentes (3,4), hallar un vector unitario de su misma dirección y sentido.**

   Solución:

   $|\vec{v}|=\sqrt{3^2+4^2}=5\ \ \vec{w}=\frac{1}{5}(3,4)=(\frac{3}{4},\frac{4}{5})$

5. **Hallar las coordenadas del punto C, sabiendo que B(2, - 2) es el punto medio de AC, A(- 3, 1).**

   Solución:

   $2=\frac{-3+x_c-1}{2} \Rightarrow x_c=7$; $-1=\frac{1+y_b}{2} \Rightarrow y_c=-5 \Rightarrow C=(7,-5)$

6. **Averiguar si están alineados los puntos:** $A(-2,-3)$**,** $B(1,0)$ **y** $C(6,5)$.

   Solución:

   Calculamos la pendiente de ABy la pendiente de AC y comparamos

   $\frac{1+2}{6-1} = \frac{3}{5} = \frac{0+3}{5-0} \Longrightarrow SI$

7. **Las coordenadas de los extremos del segmento A$\vec{v}$son:** $A(2,-1)$ **y** $B(8,-4)$**. Hallar las coordenadas del punto C que divide al segmento A$\vec{v}$en dos partes tales que AC es la mitad de CB.**

   Solución:

   $AC = \frac{1}{2}CB \Rightarrow (x-2, y+1) = \frac{1}{2}(8-x, -4-y);$

   $x - 2 = 1/2(8-x) \Rightarrow x = 4$

   $y + 1 = 1/2(-4-y) \Rightarrow y = -2 \Rightarrow C = (4,-2)$

8. **Estudiar si los vectores A$\vec{v}$y CD son equipolentes siendo A=(1,3);B=(4,1),C=(-1,1) y D=(2,-1)**

   Solución:

   a) Son equipolentes si tienen igual mósdulo dirección y sentido. en definitiva, si son iguales
   b) AB=(4,1)-(1,3)=(3,-2)
   c) CD=(2,-1)-(1,1) =(3,-2) luego son equipolentes

9. **Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos**

   a) **{(4,12),(2,6)}**
   b) **{(1,2),(3,4)}**
   c) **{(1,0),(0,1)}**
   d) **{(1,3),(5,4),(-3,7)}**

   Solución:

   a)Linealmente dependientes ya que $\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$

   b)Linealmente dependientes ya que $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{4}$ l. indep

   c)Linealmente dependientes ya que $\frac{1}{0} \neq \frac{0}{1}$ l. indep

   d)Por ser mas de 2 vectores son lin dep

10. **Probar que** $B = u_1, u_2$ **son base ,siendo** $u_1 = (4,0); u_2 = (5,1)$

    Solución:

    Son base si son lin indep y generador

Para probar que son generador supongamos un vector v=(a,b)

Entonces $(a, b) = x(4, 0) + y(5, 1)$

entonces $a = \frac{x-5y}{4}$ y $b = y$ luego generan v

Ademas por no ser proporcionales son l.i. , luego son base

11. **Sabiendo que $|\overrightarrow{u}| = 3$ y $\overrightarrow{u} = -5\overrightarrow{v}$. Calcular $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$**

    Solución:

    Puesto que $\overrightarrow{u} = -5\overrightarrow{v}$,$\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores que tienen la misma dirección pero sentido opuesto $\alpha = 180°$

    $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|cos180 = -|u||\overrightarrow{v}| = -3|\overrightarrow{v}|$

    $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = -5\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{v} = -5|\overrightarrow{v}|$

    Entonces $-5|\overrightarrow{v}|^2 = -3|\overrightarrow{v}| \Rightarrow |\overrightarrow{v}| = \frac{3}{5}$ ó $|\overrightarrow{v}| = 0$

    Pero $|\overrightarrow{v}| \neq 0$ ya que $|\overrightarrow{u}| = 3$ y $u = -5\overrightarrow{v}$ .Así que$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = -3|\overrightarrow{v}| = -3\frac{3}{5} = -\frac{9}{5}$

12. **Un vector fijo tiene su origen en el punto A(2, −1) y es equipolente al vector $\overrightarrow{\mathrm{CD}}(-1,\ 4)$. Determina las coordenadas de su extremo y su módulo.** [Sol] B(1, 3); $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{17}$.

13. **Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos A(1, −3), B(2, 2) y C(−3, 0). Calcula las coordenadas del cuarto vértice. [Sol]** D(-4, -5)

14. **Halla el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en los siguientes casos:**

    a) $|\vec{u}| = 2,\ \ |\vec{v}| = \frac{1}{4};\ \ (\vec{u}, \vec{v}) = 60^{\text{o}}$ b) $|\vec{u}| = 3,\ \ |\vec{v}| = (2, -3);\ \ (\vec{u}, \vec{v}) = 45^{\text{o}}$

    c) $\vec{u} = \left(3,\ \frac{1}{2}\right)$, $\vec{v} = (-1,\ 3)$ [Sol] a) $\frac{1}{4}$; b) $= \frac{3\sqrt{26}}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$

15. **Dados los vectores $\vec{u}(1,\ -2)$, $\vec{v}(3,\ 1)$ y $\vec{w}$ (2, 0),**

    a) **calcula las coordenadas del vector 2 $\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$,**

    b) **expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$,**

    c) **calcula los ángulos que forman dos a dos,**

    d) **halla un vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y de módulo $\sqrt{20}$,**

    [Sol] a) $\left(-\frac{1}{3},\ -5\right)$; b) $\overrightarrow{w} = \frac{2}{7}\overrightarrow{u} + \frac{4}{7}\overrightarrow{v}$; c) $(\vec{u}, \vec{v}) = 81^{\text{o}}\ 52'\ 12''$; $(\vec{u}, \vec{v}) = 63^{\text{o}}\ 26'\ 6''$; $(\vec{v}, \vec{w}) =\ 18^{\text{o}}\ 26'\ 6''$; d) $\overrightarrow{x_1}$ =(2, -4) y $\overrightarrow{x_2}$ =(-2, 4).

16. **Si $\vec{u}$ (2, a) y $\vec{v}$ (1, -4) determina el valor de a para que:**

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares; b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan el mismo módulo,

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathbf{10}$.

[Sol] a) $a = \frac{1}{2}$; b) $a = \pm\sqrt{13}$; c) $a = -2$

17. **Sea $\vec{u}$ (3, -2). Calcula:**

    a) **un vector $\vec{x}$ unitario y con la misma dirección que $\vec{u}$,**

    b) **un vector $\vec{z}$ unitario y perpendicular a $\vec{u}$.**

[Sol] a) $\overrightarrow{x_1} = \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\overrightarrow{x_2} = \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$; b) $\overrightarrow{z_1} = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\overrightarrow{z_2} = \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$.

Relación de problemas tipos:

1. Calcular el valor de m y n para que los vectores $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{2}, m\right)$ y $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, n\right)$ sean unitarios.
2. Hallar el valor de m para que los vectores $\overrightarrow{u} = (1, m)$ y $\overrightarrow{v} = (3, 4)$ sean ortogonales.
3. Dados los vectores $\overrightarrow{x} = (2, 3)$ e $\overrightarrow{y} = (-1, 4)$,

A)Normalizarlos.

B) Hallar el ángulo que forman dichos vectores.

C) Hallar un vector unitario y ortogonal al $\overrightarrow{x}$.

1. Se sabe que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 10$, $\overrightarrow{u} = (a, 3)$ y | $\overrightarrow{v}$|=4 y ang($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$)=60º. Hallar el valor de a
2. 5.-Sea B={ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$} una base ortonormal. En ella consideramos los vectores $\overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{y} = -\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.

Hallar k de forma que los vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ sean ortogonales.

Normalizar $\overrightarrow{x}$.

Hallar un vector unitario y ortogonal al $\overrightarrow{x}$.

1. Sea B={ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$} una base ortogonal con | $\overrightarrow{u}$|=1, | $\overrightarrow{v}$|=2. Sean los mismos vectores del ejercicio anterior, hallar los mismos apartados.
2. Idem, pero B={ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$} una base normada y áng($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$)=60º.
3. Idem, pero B={ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$} una base con | $\overrightarrow{u}$|=1, | $\overrightarrow{v}$|=2 y áng($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$)=60º
4. A un vector libre (-5,7) pertenece un vector fijo de origen en punto A(3,-3). Determina el extremo y comprueba gráficamente el resultado.
5. El vector fijo A$\overrightarrow{v}$tiene la misma dirección que el vector fijo CD, sus sentidos son opuesto y la longitud de CD es tres veces la de AB. Determina las coordenadas de D sabiendo que A(3,-2), B(6,1) y C(5,5). Haz una comprobación gráfica del resultado.
6. Sean U= $\left\{\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}\right\}$ y V= $\left\{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}\right\}$ dos bases en el plano. Sabemos, además que $\overrightarrow{u_1} = -3\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2}$; y $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{v_1} - 2\overrightarrow{v_2}$. ¿Cuáles son las componentes del vector $\overrightarrow{v} = \frac{5}{3}\overrightarrow{u_1} - 7\overrightarrow{u_2}$ respecto de la base V? ¿Cuáles son las componentes del vector $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{v_1} - 5\overrightarrow{v_2}$ respecto de la base U?.
7. ¿Forman base los vectores (3,-2) y (5,-1)?

8. Dibuja los vectores (1,3); (3,2);(4,5);(4,0);(0,4);(3,2);(2,-3);(-5,4). ¿cuáles son perpendiculares entres sí?. Escribe el primero como combinación lineal del los dos siguientes.

9. Sabemos que $3\ \vec{u} - 2\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$

¿Puede afirmarse que $\vec{u}$ depende linealmente de $\vec{v}$ y $\vec{w}$?
¿Puede afirmarse que $\vec{w}$ depende linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$?