S3r4 | 2022

MATEMÁTICAS : Bachillerato I y II

Límites de Funciones

Apuntes

by Sera

Límite de funciones de variable real.

1. El proceso del límite de una función

El concepto de límite es la base fundamental con la que se construye el cálculo infinitesimal (diferencial e integral).

Hablando informalmente decimos que el límite de una función es el valor al que tiende(se aproxima) una función cuando la variable independiente tiende a un número determinado , al +infinito o al -infinito.

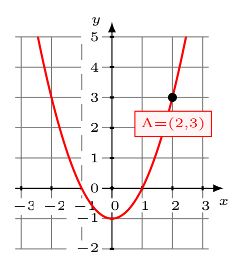
Definición de límite

Antes de establecer la definición formal del límite de una función en general vamos a observar qué sucede con una función particular cuando la variable independiente tiende (se aproxima) a un valor determinado.

Ejemplo 1.

Con la gráfica y una tabla de valores. ¿Qué le sucede a $f(x) = x^2 - 1$ cuando x se acerca a 2?

Solución:



En ella podemos ver que canto más cerca se encuentren de 2 los valores de x, entonces los valores de $f(x)$ se encuentran más cercanos a 3.

La tabla de valores refuerza esa percepción gráfica.

	Hacia 2 por la izquierda(—–>)				2	(<—–)Hacia 2 por la derecha			
x	1.9	1.99	1.999	1.9999		2.0001	2.001	2.1	2.1
f(x)	**2.61**	**2.9601**	**2.996001**	**2.99960001**		**3.00040001**	**3.004001**	**3.0401**	**3.41**

En esta función la aproximación al valor 2 de la variable puede hacerse por la por la izquierda de 2 o por la derecha de 2 ya que esos valores están en el dominio de la función.

Podemos ver que a medida que tomamos valores de x más próximos a 2, tanto para valores mayores que 2 como para valores menores que 2, los valores de $f(x)$ se aproximan a 3.

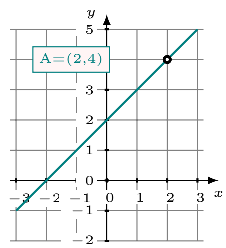
Es fácil ver el comportamiento de las dos variable x e $y = f(x)$, pero si sistematizamos este comportamiento mediante el cálculo de distancias al valor 2.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Distancias de x al valor 2=|x - 2|</td><td></td><td>Distancia al valor 3 desde la función $f(x) = x^2 - 1$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>1.9</td><td>|x-2|=|1.9-2|=0,1</td><td></td><td>|1.9^2-3|=|2.61-3| = 0.39</td></tr>
<tr><td rowspan="3">↓</td><td>1.99</td><td>|x-2|=|1.99-2|=0,01</td><td></td><td>|1.99^2-3|=|2.9601-3| = 0.0399</td></tr>
<tr><td>1.999</td><td>|x-2|=|1.999-2|=0,001</td><td></td><td>|1.999^2-3|=|2.996001-3| = 0.003999</td></tr>
<tr><td>1.9999</td><td>|x-2|=|1.9999-2|=0,0001</td><td></td><td>|1.99^2-3|=|2.99960001-3| = 0.00039999</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">↑</td><td>2.0001</td><td>|x-2|=|2.0001-2|=0,0001</td><td></td><td>|2.0001^2-3|=|3.00040001-3| = 0.00040001</td></tr>
<tr><td>2.001</td><td>|x-2|=|2.001-2|=0,001</td><td></td><td>|2.0001^2-3|=|1.9^2-3|=|3.004001-3| = 0.004001</td></tr>
<tr><td>2.01</td><td>|x-2|=|2.01-2|=0,01</td><td></td><td>|2.01^2-3|=|3.0401-3| = 0.0401</td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>|x-2|=|2.1-2|=0,1</td><td></td><td>|2.1^2-3|=|3.41-3| = 0.41</td></tr>
</table>

De lo anterior se deduce intuitivamente que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a valer 2, es 3.

Ejemplo 2.

Con la gráfica y una tabla de valores .Si $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$,
¿a qué valor se aproxima $f(x)$ si x se aproxima a 2?
Solución:



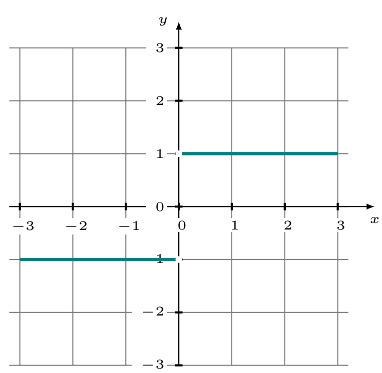
La figura muestra la gráfica de la función.

Podemos ver que, aún cuando la gráfica presenta una ruptura (hueco) en el punto $(2,4)$, ya que no existe el valor de función $f(2)$, las imágenes de valores de x muy cercanos a 2 son muy cercanas a 4. También una tabla de valores utilizando valores de x próximos a 2 tanto por la izquierda (menores que 2) como por la derecha (mayores que 2), nos convence de esa situación , ver la Tabla 1.2

	Distancias de x al valor 2=|x - 2|			Distancia al valor 4 desde la función$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
x	1.9	|x-2|=|1.9-2|=0,1		$\lvert \frac{1,9^2-4}{1,9-2}$-4|=|3.9-4| = 0.1
$\downarrow$	1.99	|x-2|=|1.99-2|=0,01		$\lvert \frac{1,99^2-4}{1,99-2}$-4|=|3.99-4| = 0.01
	1.999	|x-2|=|1.999-2|=0,001		$\lvert \frac{1,99^2-4}{1,99-2}$-4|=|3,999-4| = 0.001
	1.9999	|x-2|=|1.9999-2|=0,0001		$\lvert \frac{1,999^2-4}{1,999-2}$-4|=|3.9999-4| = 0.0001
2				
	2.0001	|x-2|=|2.0001-2|=0,0001		$\lvert \frac{2,0001^2-4}{2,0001-2}$-4|=|4,0001-4| = 0.0001
$\uparrow$	2.001	|x-2|=|2.001-2|=0,001		$\lvert \frac{2,001^2-4}{2,001-2}$-4|=|4,001-4| = 0.001
	2.01	|x-2|=|2.01-2|=0,01		$\lvert \frac{2,01^2-4}{2,01-2}$-4|=|4,01-4| = 0.01
	2.1	|x-2|=|2.1-2|=0,1		$\lvert \frac{2,1^2-4}{2,1-2}$-4|=|4,1-4| = 0.1

Ejemplo 3.

Por la derecha y por la izquierda Consideremos ahora la función $(x) = \frac{|x|}{x}$.



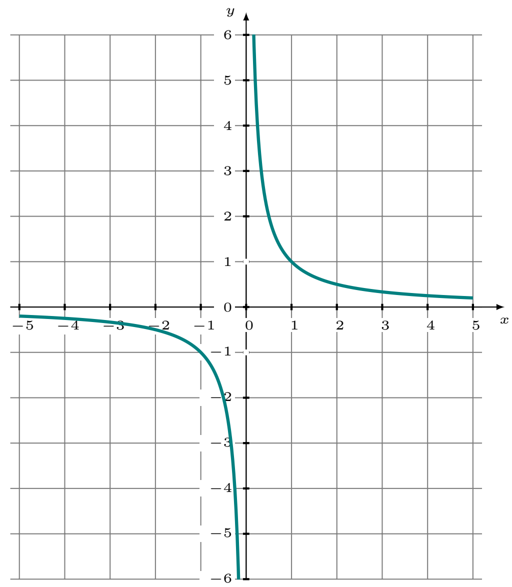
La figura muestra la gráfica de la función.

En su gráfica vemos que por la derecha de 0 las imágenes son 1, mientras que por la izquierda de 0 las imágenes son -1, la gráfica presenta un "salto" y entonces las imágenes no se acercan a un mismo valor. Podemos ver que **el límite no existe.** Hagamos una tabla como las de los ejemplos anteriores para verlo de otra manera,

	Hacia 0 por la izquierda(—–>)				0	(<—–)Hacia 0 por la derecha			
x	-0.9	-0.1	-0,001	-0,0001		0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**		**1**	**1**	**1**	**1**

Ejemplo 4.

Crecimiento ilimitado. Ahora hagamos lo mismo para f(x) $= f(x) = \frac{1}{x}$, para valores de x cercanos a 0.



En la figura vemos que a medida que nos acercamos a 0 por la derecha, la gráfica de la función **sube ilimitadamente** sin aproximarse a ningún valor en particular. Si vamos por la izquierda de 0, la gráfica de la función "**baja ilimitadamente**" y tampoco se aproxima a ningún valor en particular. La tabla también indica esa tendencia.

	Hacia 0 por la izquierda(—–>)				0	(<—–)Hacia 0 por la derecha			
x	-1	-0.1	-0,01	-0,001		0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	**-1**	**-10**	**-100**	**-1000**		**10000**	**1000**	**100**	**10**

Estos ejemplos tienen cosas en común y cosas en las cuales difieren:

Notas:

- En primer lugar, tienen en común el hecho de que tenemos un valor dado de x (es decir un valor de x previamente fijado) digamos $x = x_o$ y, luego, consideramos valores de x cada vez más próximos a x_o, tanto valores mayores que x_o (por la derecha) como valores menores que x_o (por la izquierda).
    - Esta situación se expresa diciendo que x tiende a x_o y simbólicamente se indica por $x \to x_o$(en el ejemplo 1, x tiende a 2; en el ejemplo 2, x tiende a 2; en los ejemplos 3 y 4, x tiende a 0.)
- En segundo lugar, en los ejemplos 1 y 2, a medida que nos aproximamos al valor dado del eje X, no importa si lo hacemos por la izquierda o por la derecha, los valores de $f(x)$ se van aproximando a un valor fijo L. Decimos en este caso que$f(x)$ tiende a L y escribimos "*El límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_o es igual a L*" .Simbólicamente se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

- En el ejemplo 3 tenemos una situación diferente. En este caso, cuando x tiende a 0 por la derecha entonces $g(x)$ tiende a 1, pero cuando x tiende a 0 por la izquierda se tiene que $g(x)$

tiende a -1. En estas circunstancias se dice que el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 0 no existe. Es decir no existe.

- Finalmente, en el cuarto ejemplo tampoco existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0, porque la tabla no presenta tendencia hacia ningún valor fijo sino que las imágenes crecen o decrecen sin límite a medida que aproximamos x a 0. Es decir: no existe.

- De acuerdo con lo anterior damos la siguiente definición intuitiva de límite.

  - **Definición Intuitiva**:Decimos que el límite de f(x) cuando x tiende a x_o es igual a L si a medida que x se «acerca» a x_o, ya sea por la derecha como por la izquierda, entonces los valores de $f(x)$ se aproximan a L. Esto se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

2. Definición épsilon-delta

Definición formal

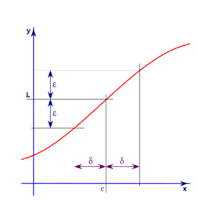
Si la función f tiene límite L en x_0 podemos decir de manera informal que la función f tiende hacia el límite L cerca de $x_o$si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de L haciendo que x esté suficientemente cerca de x_0 siendo x distinto de x_0.

Los conceptos cerca y suficientemente cerca son matemáticamente poco precisos. Por esta razón, se da una definición formal de límite que precisa estos conceptos. Entonces se dice:

El límite de una función f(x), cuando x tiende a x_0 es L si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$; tal que para todo número real x en el dominio de la función, si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esto, escrito en notación formal:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in Dom(f),\ 0 < |x - c| < \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Tomando valores arbitrarios de ε, podemos elegir un δ **para cada uno de estos**, de modo que $f(x)$ y L se acerquen a medida que x se acerca a x_0. Esta es una formulación estricta del concepto de límite de una función real en un punto de acumulación (o punto límite) del dominio de la función y se debe al matemático francés Luis Cauchy.

Esta notación es tremendamente poderosa, pues nos dice que si el límite existe, entonces se puede estar tan cerca de él como se desee.

Si no se logra estar lo suficientemente cerca, entonces la elección del δ no era adecuada.

Ejemplo.

Supongamos que se quiere demostrar que $\lim_{x \to 2}(3x - 5) = 1$. El cálculo de este límite surge por simple sustitución, esto se debe a que la función afín es continua.

Utilicemos entonces la definición, debemos demostrar que para cualquier ε dado podemos hallar un δ para el cual se cumple

(*)$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(3x - 5) - 1| < \varepsilon$

Tomando $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$ es posible probar esto. Es válido ya que nos permite obtener un valor para cualquier ε dado, que es precisamente lo que enuncia la definición.

Tomando como hipótesis $0 < |x - 2| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

Veamos que $|(3x - 5) - 1| = |3x - 6| = 3|x - 2|$, luego por hipótesis

$3|x - 2| < 3\frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$ y queda demostrado (*).

Nótese que bien podríamos haber elegido $\delta = \frac{1}{6}\varepsilon$ o $\delta = \dfrac{1}{15}\varepsilon$, por ejemplo. En tanto $\delta \leq \dfrac{1}{3}\varepsilon$, siempre podremos demostrar (*).

2.1. Operaciones con límites

- El límite de la suma o diferencia de dos funciones es la suma o resta de los límites de cada función.
  - Así, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$,entonces:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L + M$$

- El límite del producto de dos funciones es el producto de los límites de cada función. Así, si lim f(x)=a y lim g(x)=b entonces:
  - Así, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$,entonces:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L \cdot M$$

- El límite del cociente de dos funciones es la división de los límites de cada función.
  - Así, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, con M≠0 entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}$$

- El límite de la potencia de dos funciones es el valor de la potencia de los límites de cada función.
  - Así, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \left[f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x\to x_0} f(x)^{\lim_{x\to x_0} g(x)} = L^M$$

  Nota

  Recuerda que una raíz es una potencia de exponente fraccionario

$$\lim_{x\to x_0} \left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{1/n} = \sqrt[n]{L}$$

  Siempre que n es impar o f(x)≥0 en todo el dominio.

- Límite de la composición de funciones
  - Sea f una función potencial de exponente racional, logarítmica, exponencial o trigonométrica. Sea g(x) una función cuyo límite en el punto considerado (o en el infinito) conocemos lim g(x)=M. El límite de la función compuesta (f∘g, g compuesta con f) viene dado según:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\circ g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(M)$$

- **Logaritmos**
  - Sea lim $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ y $b > 0$ y $f(x) > 0$ en todo el dominio, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} (log_b(f(x)) = log(\lim_{x\to x_0} f(x)) = log_b A$$

Recuerda que la función logaritmo $log_b f(x)$ solo se define para valores positivos de la base b y del argumento $f(x)$.

A modo de curiosidad, observa que, aplicando las propiedades de los logaritmos podemos reescribir el límite de la potencia de funciones.

Así, ya que:

$$f(x)^{g(x)} = e^{Ln(f(x)^{g(x)})=}e^{g(x)\cdot Ln(f(x))=e^{bL(A)}}$$

nos queda que el cálculo del límite, asumiendo que $limf(x) = A$ y $limg(x) = b$, se puede expresar equivalentemente:

$$lim[f(x)^{g(x)}] = e^{lim[g(x)\cdot ln(f(x))]} = e^{B\cdot ln(A)}$$

Las expresiones anteriores son válidas tambien el el caso de límites al infinito.

$\underset{x\longrightarrow\pm\infty}{lim}(f(x)\pm g(x)) = \underset{x\longrightarrow\pm\infty}{lim} f(x) \pm \underset{x\longrightarrow\pm\infty}{lim} g(x)$
$\underset{x\to\pm\infty}{lim}\ (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to\pm\infty}\ f(x)\cdot \lim_{x\to\pm\infty}\ g(x) = L\cdot M$
$\lim_{x\to\pm\infty}\ (f(x)\circ g(x)) = \lim_{x\to\pm\infty}\ f(g(x)) =\ f(\lim_{x\to\pm\infty} g(x)) = f(M)$
$\underset{x\to\pm\infty}{lim}\ (f(x)^{g(x)}) = (\underset{x\to\pm\infty}{lim} f(x))^{\underset{x\to\pm\infty}{lim}\ g(x)} = L^M$

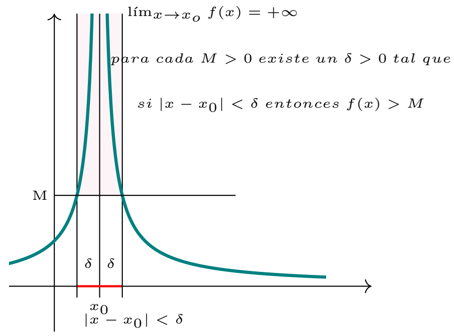
En este cálculo de límites es necesario saber la aritmética donde aparece el infinito:

SUMA	**PRODUCTO**
$(+\infty)\pm k = (+\infty)$ $(-\infty)\pm k = (-\infty)$	$k(+\infty) = \begin{cases} +\infty\ si\ k>0 \\ -\infty\ si\ k<0 \end{cases}$
$(+\infty)+(+\infty) = (+\infty)$ $(-\infty)+(-\infty) = (-\infty)$	$k(-\infty) = \begin{cases} -\infty\ si\ k>0 \\ +\infty\ si\ k<0 \end{cases}$
$-(-\infty) = (+\infty)$	$(+\infty)\cdot(+\infty)=(+\infty)$
	$(-\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)$
	$(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)$
	$(-\infty)\cdot(-\infty)=(+\infty)$
COCIENTE	**POTENCIA**
$\frac{k}{(+\infty)} = \frac{k}{(-\infty)} = 0$	$k^{(+\infty)} = \begin{cases} +\infty\ si\ k>1 \\ 0\ si\ 0\leq k<1 \end{cases}$
$\frac{0}{(+\infty)} = \frac{0}{(-\infty)} = 0$	$k^{(-\infty)} = \begin{cases} 0\ si\ k>1 \\ -\infty\ si\ 0\leq k<1 \end{cases}$
$\frac{k}{0} = \pm\infty$	$(+\infty)^k = \begin{cases} +\infty\ si\ k>0 \\ 0\ si\ k<0 \end{cases}$
$\frac{\infty}{0} = \pm\infty$	$(+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$
	$(+\infty)^{(-\infty)} = 0$

2.2. Límites infinito en un punto x_0 (Asíntotas verticales)

Dada cierta función f, diremos que tiende a infinito cuando crezca indefinidamente, a medida que nos acercamos a cierto punto x_0 en el dominio. Esto equivale a afirmar que f no está acotada, para valores del dominio «suficientemente cercanos» a x_0. Esto se denota así

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$



El límite de una función f(x), cuando x tiende a x_0, es infinito si y solo si para todo $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo punto x en el dominio de f, se cumple $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

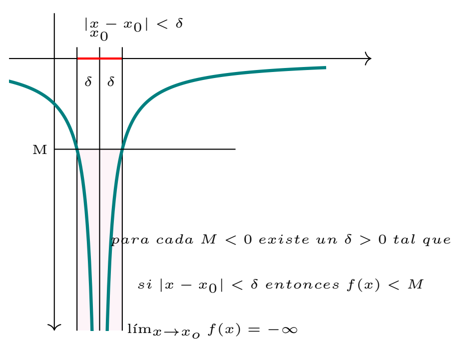
Es decir, cuanto mas cerca de x_0 mas vale la función

En símbolos,

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathrm{Dom}(f), 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Dada cierta función f, diremos que tiende a $-\infty$ cuando decrezca indefinidamente, a medida que nos acercamos a cierto punto x_0 en el dominio. Esto equivale a afirmar que f no está acotada inferiormente, para valores del dominio «suficientemente cercanos» a x_0. Esto se denota así

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

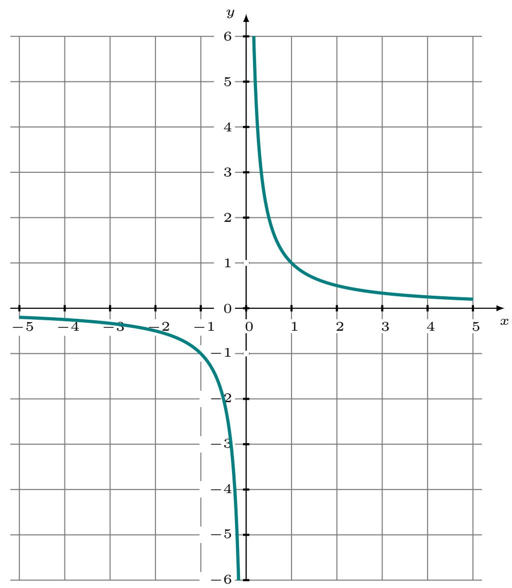
El límite de una función $f(x)$, cuando x tiende a x_0, es $-\infty$ si y solo si para todo $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo punto x en el dominio de f, se cumple $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$.

Es decir, cuanto mas cerca de x_0 menos vale la función.

En símbolos,

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathrm{Dom}(f), 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

Como ejemplo, tomemos la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cuya gráfica en el plano es una hipérbola equilátera centrada en el origen de coordenadas. Tomando x muy cercano a cero, la función $f(x)$ toma valores muy grandes, por eso se dice que $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a cero por la derecha (tiene una **asíntota vertical** en $x = 0$).



Límite lateral derecho:
$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > M$
Tomemos $\delta = \dfrac{1}{M}$, en este caso la demostración es inmediata ya que

$$0 < x - 0 < \frac{1}{M} \Rightarrow x < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x} > M$$

Límite lateral izquierdo:
$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < 0 - x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} < -M$
Tomemos $\delta = \dfrac{-1}{M}$, en este caso la demostración es inmediata ya que

$$0 < 0 - x < \frac{1}{M} \Rightarrow x > \frac{-1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x} < -M$$

Nota:

- El hecho de que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ no implica que sea posible la división por cero. Según la definición de este límite, $0 < |x| < \delta \Rightarrow x \neq 0$, con lo cual, $\dfrac{1}{0} \neq \infty$. En definitiva, $\nexists \dfrac{1}{0}$ es decir, está expresión es indefinida.

- Puede haber infinitas asíntotas verticales como en el caso de la función $f(x) = tag(x)$ o $f(x) = sec(x)$

- Para calcular las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = \frac{(x-3)\cdot(x+2)}{x(x-2)}$, buscamos, en primer el dominio $D = R - \{0, 2\}$. El lugar donde habrá posiblemente Asíntotas verticales en $x_0 = 0$ y $x_0 = 2$

  - $\underset{x\to 0}{lim} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = \frac{-6}{0} = \pm\infty]$.Luego $x = 0$ es una Asíntota vertical
  - $\underset{x\to 2}{lim} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = \frac{-4}{0} = \pm\infty]$.Luego $x = 2$ es una Asíntota vertical.

2.3. Límites finitos en el infinito(Asíntotas horizontales)

La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de $y = f(x)$ si sucede que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Más formal: Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es L si para cualquier entorno de centro L y radio ε, tan pequeño como se quiera, se puede encontrar un número real h, tan pequeño como sea necesario, a partir del l cual las imágenes de $x > h$ pertenecen a dicho entorno:

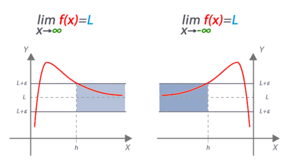
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h \in R\ ,\ Si\ \ x > h \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

En este caso la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica

Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a -∞ es L si para cualquier entorno de centro L y radio ε, tan pequeño como se quiera, se puede encontrar un número real h, tan pequeño como sea necesario, a partir del cual las imágenes de $x < h$ pertenecen a dicho entorno:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h \in R\ ,\ Si\ \ x < h \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

En este caso la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica



Nota:

Puede haber hasta dos asíntotas horizontales como máximo:Una en el infinito y otra en el -infinito

- **Ejemplo.**

Para calcular las asíntotas horizontales de $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = \frac{(x-3)\cdot(x+2)}{x(x-2)}$, buscamos, en primer lugar, la asíntota horizontal derecha:

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = [\frac{\infty}{\infty}] IND.$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}$=1 Por tanto, como es un valor concreto, $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Ahora, la izquierda:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = [\frac{\infty}{\infty}]$ IND

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}$=1 Por tanto, como es un valor concreto, $y = 1$ es una asíntota horizontal.

- **Ejemplo:** Demuestra que $\lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{x} = 1$

Como $\lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{x} = 1 <=> \lim_{x \to \infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$, demostraremos este ultimo limite.

Sea $\epsilon > 0$. Hay que encontrar un número h tal que si x > h, entonces $|1 + \frac{2}{x} - 1| < \epsilon$, lo que es equivalente,$|1+\frac{2}{x}-1| < \epsilon$. Basta con tomar $h = \frac{2}{\epsilon}$, puesto que si $x > \frac{3}{\epsilon}$, entonces$|\frac{x+2}{x} - 1| = \frac{2}{x} < \epsilon$.

2.4. Ramas infinitas en el infinito.

El límite de una función cuando x tiende a infinito es infinito si podemos conseguir que $f(x)$ sea tan grande como queramos, sin más que dar a x valores suficientemente grandes. Formalmente:

- Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es ∞ si para cualquier número real k se puede encontrar otro número real h a partir del cual las imágenes de $x > h$ son mayores que k :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists h \in R\ ,\ Si\ \ x > h \Rightarrow f(x) > K$$

- Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a -∞ es ∞ si para cualquier número real k se puede encontrar otro número real h a partir del cual las imágenes de $x > h$ son mayores que k :

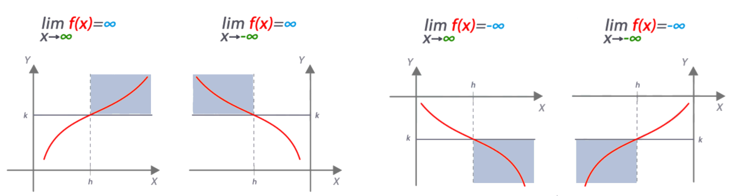
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists h \in R\ ,\ Si\ \ x < h \Rightarrow f(x) > K$$

- Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a ∞ es -∞ si para cualquier número real k se puede encontrar otro número real h a partir del cual las imágenes de $x > h$ son mayores que k :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists h \in R\ ,\ Si\ \ x > h \Rightarrow f(x) < K$$

- Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a -∞ es ∞ si para cualquier número real k se puede encontrar otro número real h a partir del cual las imágenes de $x > h$ son mayores que k :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists h \in R\ ,\ Si\ \ x < h \Rightarrow f(x) < K$$



- **Ejemplo:** Demuestra que $\lim_{x \to \infty} 2^x = +\infty$

Dado $K > 0$, buscamos $h > 0$ tal que si $x > h$ entonces $2^x > K$.

El número h buscado puede ser $h = K + 1$, dado que $2^{K+1} > K$.

Realmente bastard tomar $h = log_2 K$, con lo que si $x > log_2 M$, se cumple que $2^x > 2^{log_2 K} = K$.

Asi, si se toma $K = 10000$, basta con tomar $h = log_2 10000$, con lo que si $x > log_2 10000$, se cumple que $2^x > 2^{log_2 10000} = 10000$.

2.5. Indeterminaciones

Las propiedades generales permiten, junto con la definición, calcular límites indeterminados mediante transformaciones algebraicas.

Hay varios tipos de indeterminaciones, entre ellas las que se muestran en la tabla siguiente. Considerar ∞ como el límite que tiende a infinito y 0, 1 al límite de una función que tiende a 0 o 1, respectivamente.

Operación	Indeterminación
Sustracción	$\infty - \infty$
Multiplicación	$\infty \cdot 0$
División	$\frac{\infty}{\infty}\ \frac{0}{0}$
Elevación a potencia	$1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

Ejemplo.

0/0 es una indeterminación, es decir, no es posible, a priori, saber cual es el valor de un límite que tiende a cero sobre otro que también tiende a cero ya que el resultado no es siempre el mismo. Por ejemplo:

$\lim_{t\to 0} \frac{t}{t^2} = \infty$, $\lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t} = 0$ Nótese que hubiera sido imposible «eliminar» las indeterminaciones en los ejemplos anteriores si no se hubiera supuesto $t \neq 0$, desigualdad que se deduce de la definición.

2.6. Ejemplos de Cálculo de límites

Hay varias técnicas de resolución de límites, la mas rápida en la mayoría de los casos suele ser la regla de L'Hôpital basada en derivación pero también se pueden aplicar otros métodos.

Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que son cociente de polinomios y/o de raíces de polinomios. Para resolver estas indeterminaciones es preciso averiguar en cuál de los casos siguientes nos encontramos:

1. El numerador tiende a ∞ más rápidamente que el denominador, en cuyo caso el cociente tenderá a ∞. Además habrá que determinar el signo del límite, es decir, si tiende a $+\infty$ o a -∞

2. El denominador tiende a ∞ más rápidamente que el numerador, en cuyo caso el cociente tenderá a 0.

3. Numerador y denominador quedan «en tablas» (los dos son infinitos del mismo orden), en cuyo caso el límite será un número finito distinto de 0.

Una idea que se puede aplicar en estos casos es dividir numerador y denominador por el término que converge a infinito más rápidamente. Para ello se debe recordar que, cuando $x \to \infty$, x^n tiende a ∞ más rápidamente cuanto mayor es n.

Ejemplo 1

Calcular $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x}$

Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que son cociente de polinomios y/o de raíces de polinomios. Para resolver estas indeterminaciones es preciso averiguar en cuál de los casos siguientes nos encontramos:
1. El numerador tiende a ∞ más rápidamente que el denominador, en cuyo caso el cociente tenderá a ∞. Además habrá que determinar el signo del límite, es decir, si tiende a $+\infty$ o a -∞
2. El denominador tiende a ∞ más rápidamente que el numerador, en cuyo caso el cociente tenderá a 0.
3. Numerador y denominador quedan «en tablas» (los dos son infinitos del mismo orden), en cuyo caso el límite será un número finito distinto de 0.
Una idea que se puede aplicar en estos casos es dividir numerador y denominador por el término que converge a infinito más rápidamente. Para ello se debe recordar que, cuando $x \to \infty$, x^n tiende a ∞ más rápidamente cuanto mayor es n.
Comenzamos por aplicar las reglas del cálculo de límites: $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x} = \frac{\infty}{\infty}$

Se trata de un límite indeterminado de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para aclarar la indeterminación, dividimos numerador y denominador por el término que tiende más rápidamente a infinito. En este caso, entre todas las potencias de x que aparecen la mayor es x^3.
Dividiendo numerador y denominador por x^3, se obtiene

$$\lim_{x \mapsto \infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x} = \lim_{x \mapsto \infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \mapsto \infty} \frac{4+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{x}{x^3}} = \frac{4}{2} = 2$$

ya que, los términos $1\frac{1}{x^2}$y $\frac{1}{x^3}$ son del tipo $\frac{k}{\infty}$, luego convergen a cero cuando x tiende a ∞

Ejemplo 2

Calcular $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{4x^2-1}{x^3+x}$
Comenzamos por aplicar las reglas del cálculo de límites: $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{4x^2+1}{x^3+x} = \frac{\infty}{\infty}$

Se trata de un límite indeterminado de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para aclarar la indeterminación, dividimos numerador y denominador por el término que tiende más rápidamente a infinito. En este caso, entre todas las potencias de x que aparecen la mayor es x^3.
Dividiendo numerador y denominador por x^3, se obtiene

$$\lim_{x \mapsto \infty} \frac{4x^2+1}{x^3+x} = \lim_{x \mapsto \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \mapsto \infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{2+0} = 0$$

ya que, los términos $\frac{1}{x^2}$ y $\frac{1}{x^3}$ son del tipo $\frac{k}{\infty}$, luego convergen a cero cuando x tiende a ∞.

Ejemplo 3

Calcular $\underset{x\mapsto\infty}{lim}\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^3+1}+2x}$

Solución

De nuevo vemos que se trata de un límite de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Los términos que aparecen son :

En el numerador aparecen $\sqrt{x^4+1}$, cuyo comportamiento cuando $x \to \infty$ es como p $\sqrt{x^2} = x^{4/2} = x^2$, y x^2.

En el denominador aparecen $\sqrt{x^3+1}$, cuyo comportamiento es como $\sqrt{x^3} = x^{1/3}$, y $2x$.

Por tanto lo que tiende a infinito más rápidamente es x^2 (es la mayor potencia de x que aparece). Se puede, pues, aplicar la técnica de dividir numerador y denominador por x^2.Sin embargo, es más fácil tener en cuenta sólo los términos dominantes, como antes:

• cuando $x \to \infty$ el numerador se comporta como $x^2 + x^2 = 2x^2$.

• cuando $x \to \infty$ el denominador se comporta como $2x$.

En consecuencia se tiene $\underset{x\mapsto\infty}{lim}\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^3+1}+2x} = \underset{x\mapsto\infty}{lim}\frac{2x^2}{2x} = \underset{x\mapsto\infty}{lim}\, x = +\infty$

Ejemplo 4

Cálculo de límites de funciones racionales cuando x tiende a un número

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinómicas de cualquier grado, entonces: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$

Es decir, basta con sustituir x por x_0 para calcular el límite. Podemos obtener tres tipos de resultados:

- Caso 1) $\frac{a}{b}$ siendo $b \neq 0$ FIN
- Caso 2) $\frac{a}{0}$ siendo $a \neq 0$ LÍMITES LATERALES
- Caso 3) $\frac{0}{0}$ INDETERMINACIÓN

- En el caso 1 no habría ningún problema. Ya estaría el límite calculado. Veamos un ejemplo: $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{2x-1} = \frac{2^3-1}{2\cdot 2-1} = \frac{7}{3}$

- En el casos 2 debemos estudiar los límites laterales.

- En el casos 3 obtendríamos una INDETERMINACIÓN. Eso significa una especie de atasco, por lo que debemos tomar otro camino para calcular el límite.

Caso Indeterminación $\frac{0}{0}$

Cuando al calcular el límite de un cociente de polinomios obtenemos un resultado del tipo $\frac{0}{0}$, estamos ante una Indeterminación que se resuelve dividiendo numerador y denominador por $(x - x_0)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}$$

Resolvemos la INDETERMINACIÓN haciendo

$$\underset{x\mapsto x_0}{lim}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{x-x_0}}{\frac{g(x)}{x-x_0}}$$

O lo que es lo mismo factorizando los polinomios y simplificando.

Veamos un ejemplo:

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{5x-5} = \frac{1^2-2\cdot 1-3}{5\cdot 1-5} = \frac{0}{0}$ Dividimos numerador y denominador por (x-1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{5x-5} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^2+2x-3}{x-1}}{\frac{5x-5}{x-1}}$

Si hacemos las divisiones del numerador y denominador (aplicando Ruffini si es necesario) obtenemos: $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^2+2x-3}{x-1}}{\frac{5x-5}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}}{\frac{5(x-1)}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{5} = \frac{4}{5}$

Ejemplo 5

Cálculo de límites de funciones irracionales cuando x tiende a menos infinito

A veces este tipo de límites pueden conllevar alguna dificultad. Lo más efectivo es hacer una cambio de variable: Cambiamos x por $-x$ y $-\infty$ por $+\infty$ de forma que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

Ejemplo $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(-x)^2-9}}{-x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{-x-1} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-x-1} = -1$

Ejemplo 6

Multiplicamos y dividimos por el conjugado
$\lim\limits_{x\to\infty} 3x^2 - \sqrt{x^4+x} = \infty - \infty = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(3x^2-\sqrt{x^4+x}\right)\cdot\left(3x^2+\sqrt{x^4+x}\right)}{\left(3x^2+\sqrt{x^4+x}\right)} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x^4-x^4-x}{3x^2+\sqrt{x^4+x}} = \infty$
Observe que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

Ejemplo 7

- Indeterminación 1 elevado a infinito

Las indeterminaciones de tipo $\boxed{1^\infty}$ están basadas en el número e y se pueden resolver de muchas formas.

Una de ellas es aplicando la siguiente fórmula (donde A puede ser un número o un infinito)

$$\lim_{x\to A} f(x)^{g(x)} = e^{\left[\lim\limits_{x\to A} g(x)\cdot(f(x)-1)\right]}$$

Veamos un ejemplo:
$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+2}\right)^{2x+1} = 1^\infty$
Aplicamos la fórmula
$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+2}\right)^{2x+1} = e^{\left[\lim\limits_{x\to\infty} (2x+1)\cdot\left(\frac{x}{x+2}-1\right)\right]}$
Hacemos las operaciones aparte
$(2x+1)\cdot\left(\frac{x}{x+2}-1\right) = (2x+1)\cdot\frac{x-(x+2)}{x+2} = =(2x+1)\cdot\frac{-2}{x+2} = \frac{-4x-2}{x+2}$ Entonces tenemos:
$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+2}\right)^{2x+1} = e^{\left[\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x-2}{x+2}\right]} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$

Ejemplo 8

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt{x}}} =$
$\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt{x}}} = \frac{0}{0}$IND.
Resolvemos multiplicando numerador y denominador por el conjugado de cada uno:
$\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt{x}}} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x->4} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x}} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+2} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2\sqrt{x}}} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}} =$
$\lim\limits_{x->4} \frac{\sqrt{(x-4)^2(x+2\sqrt{x})}}{\sqrt{(x^2-4x)(\sqrt{x+2})}} = \lim\limits_{x->4} \frac{\sqrt{\cancel{(x-4)}(x-4)(x+2\sqrt{x})}}{\sqrt{\cancel{(x-4)}x(\sqrt{x+2})}} = 0$

2.7. Límites con la ayuda de la regla de L'Hôpital

Regla de l'Hôpital para el cálculo de límites

Si las funciones f y g son derivables en un entorno del punto x=a y tales que f(a)=g(a)=0 , entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se cumple que

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
La regla de l'Hôpital se puede aplicar para indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ $\qquad \frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo 1

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{3x^2-2x} = \frac{e^0-1}{3\cdot 0^2-2\cdot 0} = \frac{0}{0}$
Indeterminación. Aplicamos l'Hôpital
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{3x^2-2x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{6x-2} = \frac{e^0}{6\cdot 0-2} = -\frac{1}{2}$
Observe que al aplicar l'Hôpital derivado numerador y denominador

Ejemplo 2 aplicaciones sucesivas de l'Hôpital

$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot sen(x)}{1-cos(x)} = \frac{0\cdot sen(0)}{1-cos(0)} = \frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot sen(x)}{1-cos(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)+x\cdot cos(x)}{sen(x)} = \frac{sen(0)+0\cdot cos(0)}{sen(0)} = \frac{0}{0}$
Aplicamos l'Hôpital por segunda vez
$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)+x\cdot cos(x)}{sen(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot cos(x)-x\cdot sen(x)}{cos(x)} = \frac{2\cdot cos(0)-0\cdot sen(0)}{cos(0)} = \frac{2}{1} = 2$

Ejemplos

1. $\lim_{x\to 0} \frac{cosx-1}{x^2}$

   Solución

   $lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x^2} = \frac{1-1}{0^2} = \frac{0}{0}$

   Aplicamos L'Hôpital

   $\lim_{x\to 0} \frac{cosx-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-sen\ x}{2x} = \frac{0}{0} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-cos\ x}{2} = \frac{-1}{2}$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{ln^2x}{x}$

   Solución

   $\lim_{x\to\infty} \frac{ln^2x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ Aplicamos L'Hôpital

   $\lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot ln(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

   Volvemos a aplicar L'Hôpital

   $\lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2x}{e^x-x-1}$

   Solución

   $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2x}{e^x-x-1} = \frac{0^2}{e^0-0-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$ Aplicamos L'Hôpital

   $\lim_{x\to 0} \frac{2\cdot sen(x)\cdot cos(x)}{e^x-1} = \frac{2\cdot 0\cdot 1}{e^0-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$

   Aplicamos nuevamente L'Hôpital

   $\lim_{x\to 0} \frac{2\cdot[cos(x)\cdot cos(x)+sen(x)\cdot(-sen(x))]}{e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot[cos^2(x)-sen^2(x)]}{e^x} = \frac{2\cdot(1^2-0^2)}{e^0}$ =2

4. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$

   Solución

   $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{\infty}} = \frac{-\infty}{\infty}$INDETERMNADO. Aplicamos L'Hôpital

   $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{e^{-x}\cdot(-1)} = \frac{1}{e^{\infty}\cdot(-1)} = \frac{1}{-\infty} = 0$

5. Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)sen\ x}{x^3-x^2}$

   Solución

   $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)sen\ x}{x^3-x^2} = \frac{0}{0}$ Aplicamos la Regla de L'Hôpital

   $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)sen\ x}{x^3-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x)sen\ x+(e^x-1)cos\ x}{3x^2-2x}$ Vuelve a dar 0/0. Volvemos a aplicar L'Hôpital y queda:

   $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x)sen\ x+(e^x)cos\ x+(e^x)cos\ x+(e^x-1)(-sen\ x)}{6x-2}$

Volvemos a sustituir x por 0 y esta vez ya obtenemos un resultado: $\frac{2}{-2} = 1$

Por tanto: $lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)sen\,x}{x^3-x^2} = \boxed{\text{-1}}$

6. Consideremos el siguiente límite $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg(x)} = (+\infty)^0$

Solución

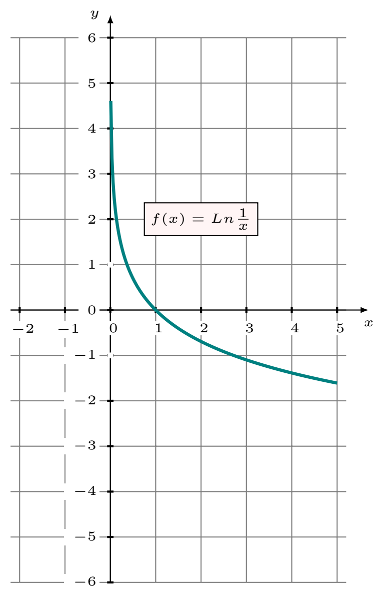
Llamamos "A" al límite y tomamos logaritmos $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg(x)} = A$

$ln\left[\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg(x)}\right] = ln(A) \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \left[ln\left(\frac{1}{x}\right)^{tg(x)}\right] = ln(A)$

$\lim_{x\to 0^+} \left[(tg(x)) \cdot ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] = ln(A)$

Nos centramos en la expresión de la izquierda del signo igual

$\lim_{x\to 0^+} \left[(tg(x)) \cdot ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0 \cdot (+\infty)$



Se ha transformado en una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$ que vimos cómo resolver en indeterminación $0 \cdot$ infinito

$\lim_{x\to 0^+} \left[(tg(x)) \cdot ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1/tg(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$

Ahora podemos aplicar L'Hôpital

$\lim_{x\to 0^+} \frac{ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1/tg(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x^2}{-1/sen^2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{sen^2(x)}{x} = \frac{0}{0}$

Volvemos a aplicar L'Hôpital

$lim\frac{sen^2x}{x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2senx(cosx)}{1} = \frac{0}{1} = 0$

`Entonces, como teníamos que:`

$\lim_{x\to 0^+} \left[(tg(x)) \cdot ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] = ln(A)$

$0 = ln(A) \longrightarrow \boxed{\texttt{A=1}}$

`Por tanto` $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg(x)} = 1$

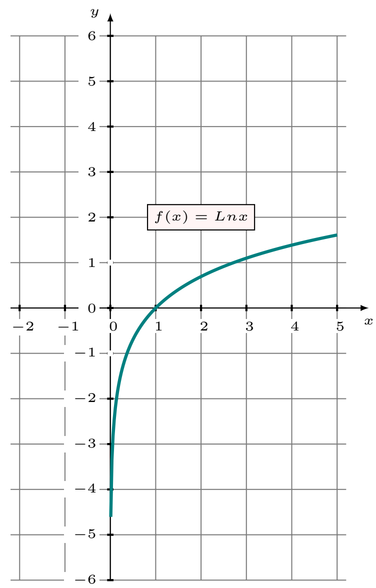
7. Indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$

Si hacemos una de las siguientes transformaciones $f \cdot g = \frac{f}{1/g} = \frac{g}{1/f}$ se convierte en una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ a las que ya sabemos aplicarle la Regla de l'Hôpital

Ejemplo

$\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot ln(x) = 0 \cdot (-\infty)$

En la imagen se puede apreciar que cuando $x \longrightarrow 0^+$, la función $ln(x)$ tiende a $-\infty$ (función logartimo neperiano de x)



Aplicamos la transformación $\lim_{x\to 0^+} x \cdot ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{1/x} = \frac{-\infty}{+\infty}$ Ahora podemos aplicar L'Hôpital

$\lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{1/x} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$