Ejercicios resueltos

Álgebra

BY S3R4

Evau 2021

2021.Álgebra

(Modelo) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, se pide:

a. (0.5 puntos) Determinar los valores de x ∈ R para los cuales A tiene inversa. 0

b. (0.75 puntos) Para $x = -1$, calcular la inversa de A.

c. (1.25 puntos) Para $x = 1$, calcular $(AB^t)^{2020}$.

Solución:

a. Nos basamos en $\exists\ A^{-1} \iff |A| \neq 0$.
Calculamos entonces $|A| = x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow \exists A - 1 \forall x \in R - \{-2, +2\}$

b. Si $x = -1$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c. Si $x = 1$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Entonces $AB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(AB^t)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(AB^t)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$

Así pues

$(AB^t)^{2020} = \left((AB^t)^3\right)^{673} (AB^t) = (-I)^{673}(AB^t) = -I \cdot (AB^t) = -AB^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Modelo) Sean las matrices

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a. (1.5 puntos) Calcular los valores de a para los que el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ no tenga solución.

b. (1 punto) Calcular los valores de a para los que $A = A^{-1}$.

Solución:

a. Estudiaremos los rango de las matrices del sistema

Si $AX = B$, la matriz ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & -3 & a & 1 \\ a-1 & -3 & a & 2 \end{pmatrix}$;Calculamos $|A| = 3 - a = 0 => a = 3$

Si $a \neq 3$, el sistema será compatible ya que $rang(A) = 3 = rang(A^*)$=nº incognitas => S.Compatible Determinado.

Si $a = 3$ el rango(A)=2 ya que sería A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $y \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$(menor de orden 2 diferente de 0 como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ =-4$\neq 0$=> Hay un menor de orden 3 diferente de 0 en $A^* => rango(A^*) = 3$=>Sistema incompatible

b. Para que $A = A^{-1} => A^2 = A^{-1}A = I$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2-4a & -2a+9 & a^2-4a \\ a^2-4a & -2a+8 & a^2-4a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces debe suceder que $a^2 - 4a = 0 => \cancel{a = 0}; a = 4$

$-2a + 9 = 1; => a = 4$;

$a^2 - 4a + 1 = 0 =>; a = 4$

-2$a + 8 = 0 => a = 4$

Entonces la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(Ordinaria Opción A 2021) Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A,B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el numero de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la accion B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Solución:
Si una acción de B vale 1 €=>la acción de A vale 3€ y 6€ la de la empresa C
Llamamos
x= acciones empresa A,
y =acciones empresa B
z= acciones empresa C
El reparto es el siguiente : $x + y + z = 540$
La acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el numero de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la accion B es 1 euro $3x + y + 6z = 1560$
el numero de acciones de C es la mitad que el de B $z = \frac{y}{2}$
El sistema es :

$$=> \left.\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 540 \\ 3x+y+6z & = & 1560 \\ z & = & \frac{y}{2} \end{array}\right\} => \left.\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 540 \\ 3x+y+6z & = & 1560 \\ y-2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos usando Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 540 & 1 & 1 \\ 1560 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{1} = 360; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 540 & 1 \\ 3 & 1560 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{1} = 120; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 540 \\ 3 & 1 & 1560 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 60.$$

Cada hermano recibe 360/3=120 acciones de la empresa A; 120/3=40 acciones de la empresa B y 60/2=20 acciones de la empresa C

(Opción B 2021) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a: $\left.\begin{array}{rcl} ax-2y+(a-1)z & = & 4 \\ -2x+3y-6z & = & 2 \\ -ax+y-6z & = & 6 \end{array}\right\}$.

a. 2 puntos) Discuta el sistema seg´un los diferentes valores de a

b. (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $a = 1$

Solución:
a) CAlculamos el determinante de la matriz A
$|A| = 3a^2 - 29a + 26 \Rightarrow$
|A|=0 si a = 1 ó a = 3 .

Si $a \neq 1$ o $\neq 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado ya que r(A)=$r\begin{pmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix} = 3$ y $r(A^*) = 3$

Si $a = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible ya que r(A)=$r\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & -6 \end{pmatrix} = 2$ y $r\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -3 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} = 3$

Si a = 1 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. ya que r(A)=$r\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix} = 2$ y $r\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -11 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} = 2$

b) Si a =1 El sistema es
$x - 2y = 4$
$-y - 6z = 10$
Solucion: $(-16 - 12t, -10 - 6t, t)$ con t $\in$ R.

(Coincidencia 2021) (2,5 puntos) Una tienda online de productos gourmet elabora tres tipos de cafés exclusivos, el Gold Cuvée (a $7,85 euros/kg$), el Paradiso (a $13,3 euros/kg$) y el Cremissimo (a $24,85 euros/kg$). Para ello utiliza solo dos tipos de grano, el Arábica y el Robusta. El Gold Cuvée tiene un 90% de grano tipo Arábica, el Paradiso un 85 % y el Cremissimo un 80 %. A lo largo de un mes han necesitado utilizar $27,1 kg$ de grano del tipo Robusta para atender todos los pedidos y han ingresado un total de $3112,5$ euros. Sabiendo que se ha vendido doble cantidad de café Cremissimo que de las otras dos especialidades juntas, se pide calcular los kilogramos de grano del tipo Arábica que se han utilizado a lo largo de ese mes.

Solución:

Llamamos:

x= los kg café Gold Cuvée; $7.85€/Kg$

y = los kg café Paradiso $13.3€/kg$

z= los kg café Cremissimo. $24.85€/kg$

« ...ingresado un total de $3112,5$ euros» $7.85x + 13.3y + 24.85z = 3112.5$;

«A lo largo de un mes han necesitado utilizar $27,1kg$ de grano del tipo Robusta»$0.1x + 0.15y + 0.2z = 27.1$;

«doble cantidad de café Cremissimo que de las otras dos especialidades juntas» $z = 2(x + y)$

$$=> \left.\begin{array}{rcl} 7.85x + 13.3y + 24.85z & = & 3112.5 \\ 0.1x + 0.15y + 0.2z = & = & 27.1 \\ -2x - 2y + z & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 157x + 266y + 497z & = & 62250 \\ 2x + 3y + 4z & = & 542 \\ -2x - 2y + z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos usando Cramer:

$$\begin{vmatrix} 157 & 266 & 497 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 61$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 62250 & 266 & 497 \\ 542 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{61} = \frac{1830}{61} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1157 & 62250 & 497 \\ 2 & 542 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{61} = \frac{1342}{61} = 22;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1157 & 266 & 62250 \\ 2 & 3 & 542 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{61} = \frac{6344}{61} = 104$$

Los kilos de café de tipo arábiga serán $0.9 \cdot 30 + 0.85 \cdot 22 + 0.8 \cdot 104 = 128.9kg$

(Coincidencia 2021) Dadas las siguientes matrices:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a. (1,25 puntos) Determine los valores del parámetro real m para los que la matriz A es invertible y calcule su inversa en esos casos.

b. (0,75 puntos) Estudie el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ en función del parámetro m.

c. (0,5 puntos) Resuelva el sistema del apartado anterior para el valor $m = 2$.

Solución:

a. Nos basamos en $\exists\ A^{-1} \iff |A| \neq 0$. Calculamos entonces $|A| = -m - 1$

$|A| = 0 \iff m = -1 \Rightarrow \exists A^{-1} \forall m \in R - \{-1\}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj)^t = \frac{1}{-m-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

b. $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B => A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

Si $m \neq = -1$ rango(A)=rango(A*)=3 Sistema Ccompatible determinado ya que el número incognitas=$3 = rango(A) = rango(A^*)$

si $m = -1; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $rango(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ Hallamos el rango de A^* calculando $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 10 \end{vmatrix} \neq 0$ entonces $rango(A^*) = 3$ y el sistema será incompatible.

c. Si $m = 2$

$AX = B => X = A^{-1}B$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

(Extraordinaria 2021) Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25 % de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Solución:
Llamamos:
x = número de seguidores de Sara
y = número de seguidores de Cristina
z = número de seguidores de Jimena
«tienen un total de 15000 seguidores en una red social» $x + y + z = 15000$
«Jimena perdiera el 25 % de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara.» $0.75z = 3x$
«la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena» $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$

$$=> \left.\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 15000 \\ 0.75z & = & 3x \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{5} & = & \frac{z}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 15000 \\ 4x-z & = & 0 \\ 10x+4y-5z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos usando Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 10 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 30$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15000 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{30} = \frac{60000}{30} = 2000 \text{ seguidores ed Sara}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15000 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 10 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{30} = \frac{150000}{30} = 5000 \text{ seguidores de Cristina;}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 15000 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{30} = \frac{224000}{30} = 8000 \text{ seguidores de Jimena}$$

(Extraordinaria 2022)

a. Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $x = 1, y = 2$ y $x = 0, y = 0$.

b. (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en funcion del parámetro λ ∈ R:

$$x = \lambda; y = \lambda - 2; z = \lambda - 1$$

c. (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incognitas, x e y, que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$

Solución:

Si tiene dos soluciones tendrá infinitas, por lo que debe tener las dos ecuaciones proporcionales.

Bastará encontrar una ecuación con dos incógnitas que cumplan las dos soluciones que nos dicen.

Como hay una dependencia de una incógnita respecto a la otra por ejemplo la y con respecto a x, la ecuación es $y = 2x$ y la segunda ecuación puede ser esta multiplicada por "k" → 2k x =ky .

El sistema es $\left.\begin{array}{ccc} y & = & 2x \\ ky & = 2 & kx \end{array}\right\}$

b) $\begin{array}{ccc} x = & & \lambda \\ y & = & \lambda - 2 \\ z & = & \lambda - 1 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} y = x - 2 \\ z = x - 1 \end{array} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{array} \right.$

c) $\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$ .Esto no puede ser mas fácil. Construimos en principio un sistema dde dos ec y dos incognitas comptatible deter $\begin{array}{c} x - 2y = -3 \\ x + y = 3 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} x - 2y = -3 \\ x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array}$ .La tercera ecuacion es la suma de las dos primeras