Ejercicios resueltos

Álgebra

by S3r4

Evau 2022

2022.Álgebra

(Modelo) En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60 % del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

Solución:
Llamamos
x= número de alumnos de inglés,
y = al número de alumnos de francés
z= al número de alumnos de alemán.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{rcl} 0.6(x+y+z) & = & x \\ y-10 & = & z+10 \\ \frac{x}{4} & = & 2(y-z)+8 \end{array}\right\} => \left.\begin{array}{rcl} 2x-3y-3z & = & 0 \\ y-z & = & 20 \\ x-8y+8z & = & 32 \end{array}\right\}$$

Resolviendo por Cramer

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

Entonces

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 20 & 1 & -1 \\ 32 & -8 & 8 \end{vmatrix}}{6} = \frac{1152}{6} = 192$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 20 & -1 \\ 1 & 32 & 8 \end{vmatrix}}{6} = \frac{444}{6} = 74$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 20 \\ 1 & -8 & 32 \end{vmatrix}}{6} = \frac{324}{6} = 54$$

(Modelo) Sean las matrices

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

b) (1 punto) Para a = 1, calcular la inversa de la matriz A.

c) (1 punto) Para a = 2, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$

Solución:

a)Hallamos $|A| = a^2 + a$; No existe inversa si $a^2 + a = 0$, es decir si $a = 0$ ó $a = -1$;

b)Si $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;$|A| = 2$; $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c)Si $a = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;$|A| = 6$ Por lo que existe inversa $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Entonces solucionando la ecuación matricial

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(Opción A 2022) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2my+z &=& 1 \\ mx+2y-z &=& -1 \\ x-y+z &=& 1 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para m

Solución:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$|A| = 2m^2 + m - 1$=0;$m = -1$ ó $m = \frac{1}{2}$

- $a \neq -1, a \neq \frac{1}{2}$;$|A| \neq 0$ $rang(A) = 3 = rang(A^*) \Rightarrow$ *Compatible Determinado*. Una única solución

- $a = -1$

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;$rang(A) = 2$ ya que $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right| \neq 0$ Menor de orden 2 diferente de 0. La matriz A^* no tiene mas rango ya que la columna 4 es igual a la tercer=> $rango(A*) = 2$

  El sistema es Compatible Indeterminado(tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro).

- $a = \frac{1}{2}$

  - $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $rang(A) = 2$ ya que $\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\right| \neq 0$ Menor de orden 2 diferente de 0.La matriz A* no tiene mas rango ya que la columna 4 es igual a la tercer=> $rango(A^*) = 2$.El sistema es Compatible Indeterminado(tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro).

b) La solución para $m = \frac{1}{2}$ es:

Como $rang(A) = 2 = rang(A^*)$ y $\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\right| \neq 0$ podemos eliminar la tercera fila por ser dependiente de la 1ª y 2ª. Así, el sistema es

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 1 \\ \frac{1}{2}x+2y-z &=& -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x-y &=& 1-z \\ x+4y &=& -2+2z \end{array}\right\}$$

$$\overset{restando}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{rcl} x-y &=& 1-z \\ -5y &=& 3-3z \end{array}\right\}$$

Entonces la solución es $(x, y, z) = (\frac{2-2\lambda}{5}, \frac{3-3\lambda}{-5}, \lambda)$

(Opción B 2022) Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Solución:

Llamamos

x= la edad de Pablo,

y =la edad de Alejandro

z= la edad de Alicia.

El reparto proporcional a la edad es el siguiente :si $x+y+z=45$, entonces $\frac{x}{45}+\frac{y}{45}+\frac{z}{45}=\frac{45}{45}$.

$$\frac{x}{45}+\frac{y}{45}+\frac{z}{45}=1$$

.

Así tendremos el siguiente sistema:

«la edad de los tres primos juntos es de 45 años» :$x+y+z=45$

«la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros»:$\frac{9450x}{45}-\frac{9450z}{45}=420$

«la suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia» $x+y=2z+3$

El sistema es :

$$\left.\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 45 \\ \frac{9450x}{45}-\frac{9450z}{45} & = & 420 \\ x+y-2z & = & 3 \end{array}\right\} => \left.\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 45 \\ x-z & = & 2 \\ x+y-2z & = & 3 \end{array}\right\}$$

Resolvemos usando Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=3$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 45 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{3}=16;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 45 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{3}=15;\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 45 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{3}=14$$

La solución es $(x,y,z)=(16,15,14)$

(Coincidencia 2022) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parametro real m:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 0 \\ mx+(m+1)y-z & = & m-1 \\ -x-2y+(2m-1)z & = & 1-m \end{array}\right\}.$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en funcion de los valores de m.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m=1$.

Solución:

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ m & m+1 & -1 \\ -1 & -2 & 2m-1 \end{pmatrix} A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & -1 & m-1 \\ -1 & -2 & 2m-1 & 1-m \end{pmatrix};$

$|A|=2m^2+4m-6$=0;$m=1$ ó $m=-3$

- $m\neq 1, m\neq -3$;$|A|\neq 0\, rang(A)=3=rang(A^*)\Rightarrow Compatible\ Determinado.$ Una única solución

- $m=1$

  $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;$rang(A)=2$ ya que $\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right|\neq 0$ Menor de orden 2 diferente de 0. La matriz A^* no tiene mas rango ya que la columna 4 es de ceros=> $rango(A^*)=2$

  El sistema es Compatible Indeterminado(tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro).

- $m=-3$

  $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$;$rang(A)=2$ ya que $\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right|\neq 0$ Menor de orden 2 diferente de 0. Si todos los menores de orden 2 en A^*son 0 el rango sería 2 , pero como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$=-16 Hay un menor diferente de 0 en A^* => $rango(A)=3$.Sistema Incompatible

b)$m=1$ El sistema es $\left.\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 0 \\ x+2y-z & = & 0 \\ -x-2y+z & = & 0 \end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 0 \\ x+2y-z & = & 0 \end{array}\right\}.$

Si restamos las ecuaciones nos quedamos con $\left.\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right\}$

Cuya solución es $(x,y,z)=(\lambda,\lambda,3\lambda)$

(Coincidencia 2022) Sean las matrices

$A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sea compatible.

b) (1.5 puntos) Calcular los valores de a, b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

Solución:

$A^* = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; |A^*| = a+1 = 0; \Rightarrow a = -1$

Si $a \neq -1 \Rightarrow rango(A^*) = 3 \neq rango(A) \leq 2$ Sistema incompatible

Si $a = -1 \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \; rango(A^*) = 2 = rango(A)$=número incognitas $\Rightarrow$Sistema Compatible Determinado

b)Para que se cumpla que el producto de dos matrices sea igual a la tercera debe cumplirse la relacion en columnas y filas siguiente:$B_{2\times 3} \cdot C_{3\times 2} = A_{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$$

Con lo que $\begin{pmatrix} a+11 & 8 \\ 5a+3c+8 & 2(a+c+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{array}{cc} a+11 & = c \\ 5a+3c+8 & = 1 \\ 2(a+c+3) & = b+c \end{array} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a-c = 11 \\ 5a+3c = -7 \\ 2a-b+c = -6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = -5 \\ b = 2 \\ c = 6 \end{array} \right.$$

(Extraordinaria 2022) En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciseis libros de la estantería son ensayos. Si retiraramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el numero de libros de cada clase que hay en la estantería

---

Solución:

Llamamo x número de ensayos,

y número de novelas

z número de biografías. El total de libros es $x + y + z$

«Tres de cada dieciseis libros de la estantería son ensayos»$\frac{3}{16}(x + y + z) = x$

«Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas»$z + \frac{x}{3} = y + 2$

«Si retiraramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros.» $\frac{x}{2} + \frac{4y}{5} + z = 105$.

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{3}{16}(x+y+z) = x \\ \frac{x}{3} - y + z = 2 \\ \frac{x}{2} + \frac{4y}{5} + z = 105 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -13x + 3y + 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 6 \\ 5x + 8y + 10z = 1050 \end{array}\right.$$

Ressolviendo por Cramer

$$\begin{vmatrix} -13 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 5 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 786$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 6 & -3 & 3 \\ 1050 & 8 & 10 \end{vmatrix}}{786} = \frac{18864}{786} = 24;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -13 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 3 \\ 5 & 1050 & 10 \end{vmatrix}}{786} = \frac{43230}{786} = 55;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -13 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \\ 5 & 8 & 1050 \end{vmatrix}}{786} = \frac{38514}{786} = 49;$$

La estantería contiene 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías

(Extraordinaria 2022)(2,5 puntos) Se consideran las matrices reales

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{;B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcule para qu´e valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de $A \cdot B$ para $k = 1$.

b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

c) (0,5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA

Solución:

a)$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k-1} \end{pmatrix}$

$|AB| = k^2 - 3k = 0 \Longleftrightarrow k = 0 \; y \; k = 3$

Si $k = 1 \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.La inversa es $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

b)$BA = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k+1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k-1} \\ \boldsymbol{1-k} & \mathbf{-2} & \boldsymbol{k+1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$

$|BA| = 0 \forall k$

Para saber el rango sabiendo que rango(BA)<3, calculamos un menor de orden 2, por ejemplo $\begin{vmatrix} k+1 & 0 \\ 1-k & -2 \end{vmatrix} = -2k - 2 = 0 \Rightarrow k = -1$

Luego

Si $k \neq -1 \Rightarrow rango(BA) = 2$

Si $k = -1$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$tiene rango 2 ya que el meno$r$ $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ $rango(BA) = 2$

Así pues $rang(BA) = 2$ sea cual sea el valor $k \in R$.

c)Con $k = 1$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Como hay una combinación lineal en BA entre las dos primeras filas que da la segunda ya que rango = 2. Basta poner una relación entre a ,b c que no cumpla esa relación

$f_3 = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$. Así que basta tomar por ejemplo $a = 1; b = 1; c = 9$ .Haciendo que los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada no coincidan$\Rightarrow$ Sistema incompatible