Ejercicios resueltos

Álgebra

BY S3R4

Evau 2023

2023.Álgebra

(Ordinaria) En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraí do de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Solución:

Sea x = nº de camiones tipo A, y = nº de camiones tipo B, z = nº de camiones tipo C.

Las ecuaciones son $x+1=y+z$ ya que *«Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes»*

$\frac{10}{100}\cdot 24y=\frac{1}{7}\cdot 28z$ ya que *«El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje»*

$14x+24y+28z=302$ ya que «realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraí do de la obra 302 toneladas de tierra»

Luego el sistema es $\left.\begin{array}{c} x+1=y+z \\ \frac{10}{100}\cdot 24y=\frac{1}{7}\cdot 28z \\ 14x+24y+28z=302 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 7x+12y+14z=151 \end{array}\right\}$

Resolviendo el sistema por el método de Cramer ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 7 & 12 & 14 \end{vmatrix} = 158 \neq 0$$

Entonces

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 151 & 12 & 14 \end{vmatrix}}{158}=\frac{1106}{158}=7; y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 7 & 151 & 14 \end{vmatrix}}{158}=\frac{790}{158}=5; z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 12 & 151 \end{vmatrix}}{158}=\frac{474}{158}=3$$

Como pedían la tierra transportada por cada uno, multiplicamos el número de camiones de cada tipo por la capacidad de los camiones de ese tipo.

Cantidad transportada por A: 7x14=98 toneladas

Cantidad transportada por B: 5x24=120 toneladas.

Cantidad transportada por C: 3x28=84 toneladas.

(Ordinaria) Dado el sistema
$$\left.\begin{array}{rrrcl}(a+1)x & +4y & & = & 0\\ & (a-1)y & +z & = & 3\\ 4x & +2ay & +z & = & 3\end{array}\right\}$$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a = 3$.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

Solución:

a) Sea $A = \begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0\\ 0 & a-1 & 1\\ 4 & 2a & 1\end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A' = \begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 & 0\\ 0 & a-1 & 1 & 3\\ 4 & 2a & 1 & 3\end{pmatrix}$ la matriz ampliada,

$|A| = -(a^2+2a-15) = 0 \Leftrightarrow a = -5$ ó $a = 3$.

Si $a \neq 3$ y $a \neq -5 \Rightarrow rango(A) = rango(A\prime) = 3 =$ nº de incógnitas$\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si a $= 3 \Rightarrow$ rangoA $=$ rangoA´ $= 2 <$nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si a $= -5 \Rightarrow$ rangoA $=$ rangoA´ $= 2 <$nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Para a $= 3$, resulta $\left.\begin{array}{rrrcl}4x & +4y & & = & 0\\ & 2y & +z & = & 3\\ 4x & +6y & +z & = & 3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{rrrcl}4x & +4y & & = & 0\\ & 2y & +z & = & 3\end{array}\right\}$
$\Rightarrow x = \lambda, y = -\lambda, z = 3+2\lambda, \forall\lambda \in R.$

c) Para $a = 5$, como $|A| = -20$,

Resolviendo por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0\\ 3 & 3 & 1\\ 3 & 10 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 10 & 1\end{vmatrix}} = \frac{0}{-20} = 0;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 10 & 1\end{vmatrix}} = \frac{0}{-20} = 0;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 3\\ 4 & 10 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 10 & 1\end{vmatrix}} = \frac{-60}{-20} = 3$$

2022

(Modelo) En la liga de fútbol profesional de Libertonia compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres, y no más, han de ser porteros. Se sabe que la tercera parte del número de defensas coincide con la diferencia entre el número de centrocampistas y el número de delanteros. Por otro lado, la suma de la mitad del número de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al numero de defensas. Calcule el número de defensas, el número de centrocampistas y el número de delanteros que juegan en la liga.

Solución:

Llamamos

$x=$ número de defensas,

y = número de centrocampistas

$z=$ número de delanteros.

Entonces se tiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = & 440 \\ x & -3y & +3z & = & 0 \\ -2x & +y & +4z & = & 50 \end{array}\right\}$$

440 son el número de jugadores totales descontados los porteros (22 jugadores no porteros) $\Rightarrow 20 \cdot 22 = 440$

Resolviendo por Cramer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \text{-30}$$

Entonces

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 440 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 50 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-6300}{-30} = 210$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 440 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 50 & 4 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-4500}{-30} = 1150$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 440 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 50 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-2400}{-30} = 80$$

Por lo tanto, el número de defensas es 210, el de centrocampistas es 150 y el de delanteros 80.

(Modelo)

Dadas las matrices reales: $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se verifica que $A^t B = C$.

b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de m para los que existe la inversa de AC y calcular para m = 0 la inversa de AC.

c) (0.75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2

Solución:

a)$A^t B = \begin{pmatrix} m & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2 - 2 & -m \\ -2m & 1 \\ 3m & -1 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $m = 1$.

b)$AC = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & -m+2 \end{pmatrix}$

AC tendrá inversa siempre que el determinante sea diferente de 0

$\Rightarrow |AC| = 3m^2 + m + 10 = 0$. Esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto,$\forall m \in R$ existe la matriz inversa de AC.

Para $m = 0$, se tiene que $(AC)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{Adj^t}{|\mathrm{A}|} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c)$B^2 = \begin{pmatrix} 4m^2 - 1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix}$y $B - I = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, $2m = 1; m = \frac{1}{2}$

(Extraordinaria) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de $A^t A$.

b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.

c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para b = 2.

d) (0.75 puntos) Para b = 1, calcular B^5

Solución:

a) Se tiene

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A^t A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 0 + 0 - 4 - 0 - 16 = 0.$$

b) $BA = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}$.

El menor de las dos últimas columnas es $2b^2$, por lo que :

Si $b \neq 0$ entonces el rango de BA es 2.

Si $b = 0$ entonces la primera fila se anula y la segunda no, por lo que el rango es 1.

c) Para $b = 2$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

d) Para b = 1, $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;$B^5 = (B^2)^2 B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

2.Sean las matrices

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

b) (1 punto) Para a = 1, calcular la inversa de la matriz A.

c) (1 punto) Para a = 2, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$

Solución:

a)Hallamos $|A| = a^2 + a$; No existe inversa si $a^2 + a = 0$, es decir si $a = 0$ ó $a = -1$;

b)Si $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;$|A| = 2$; $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c)Si $a = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;$|A| = 6$ Por lo que existe inversa $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Entonces solucionando la ecuación matricial

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(Extraordinaria 2023)

Dado el sistema
$$\left.\begin{array}{rcl} -2x+y+kz &=& 1 \\ kx-y-z &=& 0 \\ -y+(k-1)z &=& 3 \end{array}\right\}$$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para k = 3.

c) (0.75 puntos) Resolverlo para k = 3/2 y especificar, si es posible, una solución particular con x = 2.

Solución

a) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada,

$|A| = 3k - 2k^2$, que se anula para $k = 0$, $k = \frac{3}{2}$.

Para $k \neq 0$ y $k \neq \frac{3}{2} \Rightarrow rangoA = rangoA\prime = 3$= no de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Para $k = 0 \Rightarrow rangoA = 2 \neq rangoA\prime = 3$$\Rightarrow$ Sistema incompatible.

Para $k = \frac{3}{2} \Rightarrow rangoA = rangoA\prime = 2 < n^{\underline{o}}\ \ de\ \ incógnitas \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Para $k = 3$ se tiene que
$$\left.\begin{array}{rcl} -2x+y+3z &=& 1 \\ 3x-y-z &=& 0 \\ -y+2z &=& 3 \end{array}\right\}$$

Por Cramer
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -9$$

Entonces
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{15}{-9} = -\frac{5}{3}$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$$

c) Para $k = \frac{3}{2}$ la solución del sistema compatible indeterminado es
$$\left.\begin{array}{rcl} -2x+y+\frac{3}{2}z &=& 1 \\ \frac{3}{2}x-y-z &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} -2x+y+\frac{3}{2}z &=& 1 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z &=& 1 \end{array}\right\}$$

$x = \lambda, y = \frac{1}{2}\lambda - 2, z = 2 + \lambda, \forall\lambda \in R$. Si queremos que x = 2, tomamos λ = 2 y obtenemos la solución particular $x = 2, y = -1, z = 4$.