Ejercicios resueltos

Álgebra

by S3r4

Evau 2024

2024.Álgebra

(Ordinaria) Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en $17cm$ la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir $7cm$ para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Solución:

Sea $x =$ la longitud (en centímetros) de cada liston largo, $y=$ la longitud de los intermedios, y z la de los cortos,

Las ecuaciones son $2x + 4y = 3y + 15z$, ya que *«con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos»*

$x = y + z + 17$ ya que *«Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto»*

$9z + 7 = x + y$, ya que *« nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo»*

Luego el sistema es $\left.\begin{array}{c} 2x + 4y = 3y + 15z \\ x = y + z + 17 \\ 9z + 7 = x + y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2x + y - 15z = 0 \\ x - y - z = 17 \\ x + y - 9z = 7 \end{array}\right\}$

Resolviendo por el método de Cramer ya que $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -15 \\ 1 & -1 & -1 \\ 9 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Entonces

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -15 \\ 17 & -1 & -1 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-214}{-2} = 107;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -15 \\ 1 & 17 & -1 \\ 9 & 7 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-142}{-2} = 71;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 17 \\ 9 & -1 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-38}{-2} = 19$$

La solución del sistema nos dice que los listones largos miden $107cm$, $71cm$ los intermedios, y $19cm$ los cortos.

(Ordinaria) Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$.

Se pide:

a) (1.25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) (0.75 puntos) Calcular el determinante de la matriz AA^t .

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

Solución:

a) La matriz B es igual a $B = b \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ por lo tanto invertible . Así pues B será invertible salvo para $b = 0$ y será $B^{-1} = \frac{1}{b} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Entonces si $b \neq 0 \Rightarrow BCB^{-1} = A \Longleftrightarrow BC = AB \Longleftrightarrow$

$$b \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir que para todo $b \neq 0$ se verifica $BCB^{-1} = A$.

b)$|A| = |BCB^{-1}| = |C| = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ al ser diagonal. Entonces $|AA^t| = |A||A^t| = 12^2 = 144$

c)Para $b = 1$ tenemos el sistema

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ que se puede resolver mediante multiplicación por la inversa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Con lo que $x = -6, y = 2; z = 4$

(Modelo) La primera interpretación en EE.UU. de la octava sinfonía de Mahler tuvo lugar en Filadelfia en 1916 con la participación de una orquesta, dos coros con el mismo número de miembros, un tercer coro infantil y, además, ocho cantantes solistas invitados especialmente y que no pertenecían a ninguno de los coros. La décima parte del número total de interpretes de los tres coros era menor en 15 unidades al de miembros de la orquesta. Los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta. El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la doceava parte del total de interpretes. ¿Cuántos intérpretes tenía la orquesta y cada uno de los coros? ¿Cuantos intérpretes había en total?

Solución:

Llamamos

x= número de miembros de la orquesta,

y = número de miembros de cada uno de los coros con igual numero de miembros

z= número de miembros del coro infantil.

Las ecuaciones son :

$\frac{2y+z}{10} + 15 = x$ ya que «*La décima parte del número total de interpretes de los tres coros era menor en 15 unidades al de miembros de la orquesta*»

$y = x + z + 140$ ya que *«Los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta»*

$x - 21 = \frac{x+2y+z+8}{12}$ ya que «*El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la doceava parte del total de interpretes*»

Entonces se tiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 10x & -2y & -z & = & 150 \\ x & -y & +z & =- & 140 \\ 11x & -2y & -z & = & 260 \end{array}\right\}$$

Resolviendo por Cramer ya que $\begin{vmatrix} 10 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & -2 & -1 \end{vmatrix}$=-3

Entonces

$x = \frac{\begin{vmatrix} 150 & -2 & -1 \\ -140 & -1 & 1 \\ 260 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-330}{-3} = 110; y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 150 & -1 \\ 1 & -14 & 1 \\ 11 & 20 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-1200}{-3} =$ $400; z = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & 150 \\ 1 & -1 & -140 \\ 11 & -2 & 260 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-450}{-3} = 150$

Es decir , la orquesta tenía 110 intérpretes , cada uno de los coros no infantiles 400 personas y el coro infantil 150 niños para un total de 1068 intérpretes.

(Modelo)

Consideremos las matrices reales :$A=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar si existe algún valor de m para el cual la matriz BA tiene inversa.

b) (0.75 puntos) Estudiar el rango de la matriz AB en función del parámetro m.

c) (1 punto) Para $m=1$, discutir el sistema $(A^tA)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$ según los valores de a.

Solución:

a)$BA=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m & m^2+1 & 3m+1 \\ 0 & m^2 & 3m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$;

Como $|BA|=0$ para todo valor de $m \Rightarrow BA$ nunca tendrá inversa sea cual sea el valor de m

b)$AB=\begin{pmatrix} m & m^2+m+1 \\ 0 & m^2+3 \end{pmatrix}$

$|AB|=m(m^2+3)$

Entonces

Si $m=0 \Rightarrow rango(AB)<2$; $rango(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix})=1$

Si $m \neq 0 \Rightarrow rango(AB)=2$

c)Para $m=1$

$A^tA=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$

Resolviendo por Gauss

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 4 & 10 & a^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & a^2-a \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a \end{pmatrix}$

Será compatible si a $a=0$ ó $a=1$ que son los casos donde el rango de la matriz ampliada coincide con el rango de A.

Si $a=0$ tendremos un Sistema compatible indeterminado

Si $a=1$ también tendremos un sistema compatible indeterminado

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ El sistema será incompatible ya que rango de la matriz será diferente al rango de la matriz ampliada del sistema.

(Extraordinaria) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

se pide:

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

Solución:

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes del sistema y $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

la matriz ampliada. |

$|A| = 1 + (\lambda-1)^2 - 1 - (\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda = 2\ y\ \lambda = 1.$

Caso 1:Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 1 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = n = 3 \Rightarrow SCD.$

Si $\lambda = 1 \Rightarrow Rango(A) = 2 = Rango(A^*) = Rango(A^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} < 3 \Rightarrow SCI.$

Si $\lambda = 2 \Rightarrow Rango(A) = rango \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq Rango(A^*) = 3$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow SI$

b) Si $\lambda = 1$, tenemos un SCI $\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ y+z=1 \\ x+z=0 \end{array}\right\}$cuyas soluciones son de la forma $(x, y, z) = (-t, 1-t, t)$ con$t \in R.$

La solución para la que $x = 5 \Rightarrow t = -5$ es por tanto $(x, y, z) = (5, 6, -5)$.

(Extraordinaria) Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes $det(A+B) = detA + detB$

no es cierta en general.

a) (0.75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $det(A+B) = detA + detB$, pruebe que entonces

$det(A+B)^2 = det(A^2) + det(B^2) + 2det(AB)$.

b) (1 punto) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $det(C+D) = detC + detD$.

c) (0.75 puntos) Para el valor $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Solución:

a)Si $det(A+B) = detA + detB$

Entonces

$|(A+B)^2| = |(A+B)(A+B)| = |(A+B)||(A+B)| = (|A|+|B|)(|A|+|B|)$

$= |A|^2 + |A||B| + |A||B| + |B|^2 = |A^2| + |B^2| + 2|A||B| == |A^2| + |B^2| + 2|AB| = det(A^2) + det(B^2) + 2det(AB)$.

b)El determinante de $C+D$ es $|C+D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = 4a+4-4a = 4\alpha$.

El determinante de C es $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha+2$, y el determinante de D es $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ =2.

La igualdad $4\alpha = 2\alpha + 2 + 2$ es válida únicamente $\iff \alpha = 2$.

c)Para $\alpha = -1$ Tenemos $\left.\begin{array}{c} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array}\right\}$ Tenemos un SCI ya que es homogéneo y rango $C = rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 < n^{\underline{o}}$ incognitas

La solución es $(x,y,z) = (\lambda, \lambda, \lambda)$ $\lambda \in R$

(Coincidencias) Tras una gran cosecha de sandías en una comarca, la producción se mete en cajas cúbicas de 1m de lado que se amontonan en una gran pila compacta en forma de ortoedro. Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto. Pero el largo supera en 8m al ancho menos el alto. El perímetro de la base es 54m. ¿Cuántas cajas de sandías ha producido esta cosecha?

Solución:

Sean x, y, z las dimensiones del ancho, largo y alto del ortoedro respectivamente, medidas en metros.

El sistema que se deduce del enunciado es el formado por las siguientes ecuaciones

$x \quad + \quad z \quad = \quad 2y+2$ ya que *«doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto»*

$x - z = y - 8$ ya que *«el largo supera en 8m al ancho menos el alto»*

$2(x+y) = 54$ ya que *«perímetro de la base es 54m»*

Por lo que el sistema queda

$$\left.\begin{array}{cccrr} x & -2y & +z & = & 2 \\ x & -y & -z & = & -8 \\ 2(x & +y) & & = & 54 \end{array}\right\}$$

Resolviendo por Cramer ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$=10 Es un sistema compatible determinado

Entonces

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -8 & -1 & -1 \\ 54 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{10} = \frac{150}{10} = 15;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -8 & -1 \\ 2 & 54 & 0 \end{vmatrix}}{10} = \frac{120}{10} = 12;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & 54 \end{vmatrix}}{10} = \frac{110}{10} = 11$$

La solucion es $x = 15, y = 12, z = 11$.

La respuesta al problema es $15 \cdot 12 \cdot 11 = 1980$ cajas.

(Coincidencias) Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X - 3Y = A$ y $3X + 6Y = B$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Hallar X, Y y X^{-1} .

b) (1 punto) Calcular A^{127}

Solución:

a)Resolviendo el sistema matricial, por ejemplo por reducción en Y ,

$\left\{ \begin{array}{lcl} 5X - 3Y = A & & 10X - 6Y = 2A \\ & \Rightarrow & \\ 3X + 6Y = B & & 3X + 6Y = B \end{array} \right.$ se obtienen las matrices X e Y :

$X = \frac{1}{13}(2A + B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $Y = \frac{1}{3}(5X - A) = \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{3} \\ -2 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ 51/3 − 25/3

.

Finalmente se obtiene que $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

b) Se observa que $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$ y por tanto $A^{127} = (A^2)^{63}A = (-I_2)^{63}A = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$