Ejercicios resueltos

Álgebra

BY S3R4

Evau 2025

2025.Álgebra

(Ordinaria)(2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- **El equipo anotó 80 puntos con un acierto del** 80 **en tiros de uno, del 50 % en tiros de dos y del 40 % en tiros de tres.**
- **La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.**
- **El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos**

Solución:

Para empezar, definimos nuestras incógnitas:

x: Número de lanzamientos de un punto intentados.

y: Número de lanzamientos de dos puntos intentados.

z: Número de lanzamientos de tres puntos intentados.

Como el equipo anotó un total de 80 puntos

Puntos de tiros de 1: $x \times 0{,}80$ (acierto) $\times 1$ (valor) $= 0{,}80x$

Puntos de tiros de 2: $y \times 0{,}50$ (acierto) $\times 2$ (valor) $= 1{,}00y$

Puntos de tiros de 3: $z \times 0{,}40$ (acierto) $\times 3$ (valor) $= 1{,}20z$

La suma total de estos puntos es 80:

$$0{,}80x + 1{,}00y + 1{,}20z = 80$$

Para trabajar con números enteros, multiplicamos toda la ecuación por 10:

$$8x + 10y + 12z = 800$$

Y, para simplificarla, dividimos por 2: $4x + 5y + 6z = 400$ **(Ecuación 1)**

Condición 2: «La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.» El resto de lanzamientos"se refiere a la suma de los lanzamientos de un punto y tres puntos

$(x+z)$. $\frac{y}{3} = \frac{x+z}{5} \Rightarrow 5y = 3(x+z)5y = 3x+3z$

Reorganizando los términos, tenemos: $3x - 5y + 3z = 0$ **(Ecuación 2)**

Condición 3: El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.»

Aquí, el resto de lanzamientos.^{es} la suma de los de un punto y dos puntos $(x+y)$.

$$2z = (x+y) - 5$$

Reorganizando los términos para formar la ecuación: $x+y-2z = 5$ **(Ecuación 3)**

Resolución del Sistema de Ecuaciones

Tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} 4x + 5y + 6z &= 400 \\ 3x - 5y + 3z &= 0 \\ x + y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

Expresamos este sistema en su forma matricial$A\mathbf{X} = \mathbf{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz A utilizando la regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 121$$

Dado que $|A| = 121 \neq 0$, el sistema tiene una solución única y la Regla de Cramer es aplicable.

Ahora, calculamos el valor de x:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 400 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3025}{121} = 25$$

El valor de y ;

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 400 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3630}{121} = 30$$

Finalmente, calculamos el valor de z:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 400 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3025}{121} = 25$$

Conclusión Final

Mediante la aplicación de la Regla de Cramer, hemos determinado el número de lanzamientos para cada tipo de canasta:

- El número de lanzamientos de un punto (x) fue: **25**
- El número de lanzamientos de dos puntos (y) fue: **30**
- El número de lanzamientos de tres puntos (z) fue: **25**

Estos resultados son enteros y coherentes con el contexto del problema.

(Ordinaria)Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:**

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio P (λ) = det (A − λ I) y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda = 5$**, calcular un vector no nulo** $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **que satisfaga que** $(A - \lambda I)\overrightarrow{v} = 0$**.**

Solución

Calcular el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y hallar sus raíces reales.

Primero, construimos la matriz $(A - \lambda I)$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos el determinante de esta matriz para obtener el polinomio característico $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Podemos simplificar el cálculo desarrollando el determinante por la tercera columna, ya que contiene dos ceros:

$$P(\lambda) = (2-\lambda) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)[(4-\lambda)(3-\lambda) - (1)(2)]$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)[(12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2) - 2]$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 10]$$

Para hallar las **raíces reales** del polinomio, igualamos $P(\lambda)$ a cero:

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0$$

De aquí obtenemos dos factores que pueden ser cero:

1. $2 - \lambda = 0 \implies \lambda_1 = 2$
2. $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

Resolvemos la ecuación cuadrática $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_2 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\lambda_3 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Las **raíces reales** del polinomio $P(\lambda)$ son $\lambda = 2$ (con multiplicidad 2) y $\lambda = 5$.

b) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A - \lambda I)v = 0$.

Sustituimos $\lambda = 5$ en la matriz $(A-\lambda I)$: $A-5I = \begin{pmatrix} 4-5 & 1 & 0 \\ 2 & 3-5 & 0 \\ 3 & 2 & 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Ahora, planteamos el sistema de ecuaciones $(A - 5I)v = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} & -x + y = 0 \\ & 2x - 2y = 0 \\ & 3x + 2y - 3z = 0 \end{aligned}$$

De la Ecuación 1, obtenemos directamente:

$$-x + y = 0 \implies y = x$$

Observamos que la Ecuación 2 es un múltiplo de la Ecuación 1 ($2x - 2y = 0 \implies 2(x-y) = 0 \implies x - y = 0 \implies y = x$), por lo que no nos proporciona información adicional.

Sustituimos $y = x$ en la Ecuación 3:

$3x + 2(x) - 3z = 0 \Rightarrow 3x + 2x - 3z = 0 \Rightarrow 5x - 3z = 0$

Despejamos z: $3z = 5x \Rightarrow z = \frac{5}{3}x$

Así, el vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ toma la forma: $v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \frac{5}{3}x \end{pmatrix}$

Para obtener un **vector no nulo** y evitar fracciones, podemos elegir un valor conveniente para x.

Si elegimos $x = 3$: $y = 3; z = \frac{5}{3}(3) = 5$

Por lo tanto, un vector no nulo que satisface la condición para $\lambda = 5$ es: $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Coincidencias

Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\lambda x - y + 3z = 2$$
$$3x - 2y - z = 9$$
$$5x - 3y + \lambda z = 11$$

a) (1.5 puntos) Decida en función de los valores del parámetro real $\boldsymbol{\lambda}$ en qué casos el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (1 punto) Resuelva el sistema en el caso $\boldsymbol{\lambda = 2}$.

Solución

Para analizar la compatibilidad del sistema, utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius. Este teorema establece que un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y solo si el rango de la matriz de coeficientes (A) es igual al rango de la matriz ampliada (A'). Además, si este rango es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado; si es menor, es compatible indeterminado.

Primero, definimos la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A':

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & \lambda \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & \lambda & 11 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes ($|A|$).

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & \lambda \end{vmatrix}$$

Aplicando la regla de Sarrus: $|A| = -2\lambda^2 + 8$

Paso 2: Encontrar los valores de λ que anulan $|A|$.

Igualamos el determinante a cero para encontrar los valores críticos de λ:

$$-2\lambda^2 + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

Estos valores ($\lambda = 2$ y $\lambda = -2$) son los puntos donde el rango de A podría ser menor que 3.

Paso 3: Analizar los casos según los valores de λ.

Caso 1: Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$ En este caso, $|A| \neq 0$. Por lo tanto, el rango de la matriz de coeficientes A es 3 (rango$(A) = 3$). Dado que la matriz ampliada A' es de dimensión 3×4, su rango máximo posible es 3. Como rango$(A) = 3$, el rango de A' también debe ser 3 (rango$(A') = 3$). El número de incógnitas es 3. Como rango(A) = rango(A') = número de incógnitas = 3, el sistema es **compatible determinado**. Esto significa que el sistema tiene una única solución.

Caso 2: Si $\lambda = 2$ Sustituimos $\lambda = 2$ en las matrices A y A':

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ para $\lambda = 2$, sabemos que rango$(A) < 3$. Buscamos un menor de orden 2 no nulo en A. Consideramos el menor formado por las dos primeras filas y columnas:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2) - (-1)(3) = -4 + 3 = -1$$

Como $M_{12} = -1 \neq 0$, entonces rango$(A) = 2$.

Ahora, debemos calcular el rango de la matriz ampliada A'. Para ello, consideramos los menores de orden 3 que incluyen la columna de términos independientes. Calculamos el determinante de la submatriz formada por las columnas 1, 2 y 4 de A':

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 9 \\ 5 & -3 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

Dado que el determinante de este menor de orden 3 es 0, y el rango de A es 2, el rango de A' también es 2 (rango$(A') = 2$). Como rango$(A) =$ rango$(A') = 2 <$ número de incógnitas (3), el sistema es **compatible indeterminado**. Esto implica que el sistema tiene infinitas soluciones.

Caso 3: Si $\lambda = -2$ Sustituimos $\lambda = -2$ en las matrices A y A':

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & -2 & 11 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ para $\lambda = -2$, sabemos que rango$(A) < 3$. De nuevo, buscamos un menor de orden 2 no nulo. El menor M_{12} que usamos antes funciona:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(-2) - (-1)(3) = 4 + 3 = 7$$

Como $M_{12} = 7 \neq 0$, entonces rango$(A) = 2$.

Ahora, para A', calculamos el determinante de la submatriz formada por las columnas 1, 2 y 4 de A':

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 9 \\ 5 & -3 & 11 \end{vmatrix} = -20$$

Como este determinante es $-20 \neq 0$, entonces rango$(A') = 3$. Como rango$(A) = 2 \neq$ rango$(A') = 3$, el sistema es **incompatible**. Esto significa que el sistema no tiene ninguna solución.

Valor de λ	Rango de A y A'	Tipo de Sistema
$\lambda \neq \pm 2$	rango(A) = rango(A') = 3	Compatible Determinado (Solución única)
$\lambda = 2$	rango(A) = rango(A') = 2	Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)
$\lambda = -2$	rango$(A) = 2$, rango$(A') = 3$	Incompatible (Sin solución)

—

b) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 2$.

Para $\lambda = 2$, hemos determinado que el sistema es compatible indeterminado. Sustituyendo $\lambda = 2$ en el sistema original, obtenemos:

$$2x - y + 3z = 2 \quad \textbf{(Ecuación 1)}$$
$$3x - 2y - z = 9 \quad \textbf{(Ecuación 2)}$$
$$5x - 3y + 2z = 11 \quad \textbf{(Ecuación 3)}$$

Como el rango del sistema es 2, podemos usar dos ecuaciones linealmente independientes (por ejemplo, la Ecuación 1 y la Ecuación 2) para resolver el sistema y expresar las incógnitas en función de un parámetro. Dejaremos z como parámetro.

De la Ecuación 1, despejamos y:

$-y = 2 - 2x - 3z \Rightarrow y = 2x + 3z - 2$ **(Expresión para y)**

$3x - 2(2x + 3z - 2) - z = 9 \Rightarrow 3x - 4x - 6z + 4 - z = 9 \Rightarrow x = -7z - 5$ **(Expresión para x)**

Finalmente, sustituimos la expresión para x de nuevo en la expresión para y:$y = -11z - 12$ **(Expresión final para y)**

Si asignamos a z el parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ (cualquier número real), las soluciones del sistema para $\lambda = 2$ son:

$$(x, y, z) = (-7\alpha - 5, -11\alpha - 12, \alpha)$$

Estas expresiones representan las infinitas soluciones del sistema cuando $\lambda = 2$.

Una matriz cuadrada se dice estocástica si todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada columna de la matriz es igual a 1.

a) (1.5 puntos) Consideremos la matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ **. Calcule todas las matrices diagonales,** $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$**, tales que DA sea una matriz estocástica.**

b) (1 punto) Sea B una matriz estocástica de orden 3. ¿Existe alguna matriz diagonal D, distinta de la identidad, de tal forma que BD sea estocástica?

Solución

Una matriz cuadrada se define como **estocástica** si cumple dos condiciones:

1. Todos sus elementos son no negativos ($a_{ij} \geq 0$).
2. La suma de los elementos de cada columna de la matriz es igual a 1.

a) Calcular todas las matrices diagonales, D, tales que DA sea una matriz estocástica.

Consideremos la matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ y una matriz diagonal genérica $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$.

Primero, calculamos el producto matricial DA:

$$DA = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot (1/3) & x \cdot 0 & x \cdot (1/2) \\ y \cdot (1/3) & y \cdot (1/2) & y \cdot (1/4) \\ z \cdot (1/3) & z \cdot (1/2) & z \cdot (1/4) \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} x/3 & 0 & x/2 \\ y/3 & y/2 & y/4 \\ z/3 & z/2 & z/4 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz DA sea estocástica, debe satisfacer las dos condiciones de la definición:

Condición 1: Todos los elementos de DA deben ser no negativos.

Dado que los elementos de A son no negativos, para que los elementos de DA sean no negativos, es necesario que los elementos de la diagonal de D también lo sean.

$$x \geq 0 \ ;y \geq 0 \ ; \ z \geq 0$$

Condición 2: La suma de los elementos de cada columna de DA debe ser igual a 1.

Planteamos un sistema de ecuaciones sumando los elementos de cada columna:

1. **Columna 1:** $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \implies \frac{1}{3}(x + y + z) = 1 \implies x + y + z = 3$
2. **Columna 2:** $0 + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1 \implies \frac{1}{2}(y + z) = 1 \implies y + z = 2$
3. **Columna 3:** $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \implies \frac{x}{2} + \frac{1}{4}(y + z) = 1$

Ahora, resolvemos este sistema de ecuaciones: Sustituimos la ecuación (2) en la ecuación (1): $x + (y + z) = 3 \implies x + 2 = 3 \implies x = 1$

Sustituimos la ecuación (2) en la ecuación (3) (como verificación): $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}(2) = 1 \implies \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 1 \implies \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \implies x = 1$ Ambas sustituciones confirman que $x = 1$.

Finalmente, volvemos a la ecuación (2) para encontrar la relación entre y y z: $y + z = 2$

Considerando también las condiciones de no negatividad ($y \geq 0, z \geq 0$), las matrices diagonales D que satisfacen las condiciones son aquellas donde $x = 1$ y la suma de y y z es 2, con ambos no negativos.

Por lo tanto, la forma general de las matrices diagonales D es:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 2 - y \end{pmatrix} \quad \text{donde } 0 \leq y \leq 2$$

b) Sea B una matriz estocástica de orden 3. ¿Existe alguna matriz diagonal D, distinta de la identidad, de tal forma que BD sea estocástica?

Sea B una matriz estocástica de orden 3. Esto implica que sus elementos $b_{ij} \geq 0$ y que la suma de los elementos de cada columna es 1:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Con las propiedades:

$$\begin{aligned} b_{i,j} \geq 0 \quad & \text{para todo } i, j \\ b_{11} + b_{21} + b_{31} = 1 & \\ b_{12} + b_{22} + b_{32} = 1 & \\ b_{13} + b_{23} + b_{33} = 1 & \end{aligned}$$

Consideramos una matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calculamos el producto BD:

$$BD = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x & b_{12}y & b_{13}z \\ b_{21}x & b_{22}y & b_{23}z \\ b_{31}x & b_{32}y & b_{33}z \end{pmatrix}$$

Para que BD sea una matriz estocástica, debe cumplir:

Condición 1: Todos los elementos de BD deben ser no negativos.

Dado que $b_{ij} \geq 0$, para que los elementos del producto BD sean no negativos, es imprescindible que $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$.

Condición 2: La suma de los elementos de cada columna de BD debe ser igual a 1.

- **Columna 1:** $b_{11}x + b_{21}x + b_{31}x = 1$ Factorizamos x: $(b_{11} + b_{21} + b_{31})x = 1$ Dado que B es estocástica, la suma de los elementos de su primera columna es 1. Así, $(1)x = 1 \implies x = 1$.
- **Columna 2:** $b_{12}y + b_{22}y + b_{32}y = 1$ Factorizamos y: $(b_{12} + b_{22} + b_{32})y = 1$ Dado que B es estocástica, la suma de los elementos de su segunda columna es 1. Así, $(1)y = 1 \implies y = 1$.
- **Columna 3:** $b_{13}z + b_{23}z + b_{33}z = 1$ Factorizamos z: $(b_{13} + b_{23} + b_{33})z = 1$ Dado que B es estocástica, la suma de los elementos de su tercera columna es 1. Así, $(1)z = 1 \implies z = 1$.

De estas condiciones, concluimos que los únicos valores posibles para los elementos diagonales de D son $x = 1, y = 1, z = 1$. Esto significa que la única matriz diagonal D que puede hacer que BD sea estocástica es la **matriz identidad**:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, **no existe ninguna matriz diagonal D distinta de la identidad** de tal forma que BD sea estocástica, si B es una matriz estocástica de orden 3.

(Extraordinaria)Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parametro real´ k:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:
a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k.
b) (1 punto) Resolver el sistema para k = 0.
Solución

Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema se puede reescribir en la forma estándar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada A' del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 0 \\ k+1 & 1 & -k & k \\ 1 & k+1 & 0 & 2k \end{array} \right)$$

a) Discutir el sistema en función de los valores de k.

Utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius, que compara el rango de la matriz de coeficientes (A) con el rango de la matriz ampliada (A').

Paso 1: Calcular el determinante de la matriz de coeficientes ($|A|$).

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{vmatrix} = k^3 + 2k^2 + k$$

Paso 2: Encontrar los valores de k que anulan $|A|$.

Igualamos el determinante a cero:

$$k^3 + 2k^2 + k = 0 \Rightarrow k(k^2 + 2k + 1) = 0$$

Reconocemos que $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$:

$$k(k+1)^2 = 0$$

Las raíces que anulan el determinante son: $k = 0$ y $k = -1$ (raíz con multiplicidad 2)

Paso 3: Análisis de los casos según los valores de k.

Caso 1: Si $k \neq 0$ **y** $k \neq -1$ En este caso, $|A| \neq 0$.

- $\text{rango}(A) = 3$
- $\text{rango}(A') = 3$ (ya que el rango de A es 3)
- Número de incógnitas = 3

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A') =$ número de incógnitas, el sistema es **compatible determinado**. Tiene una única solución.

Caso 2: Si $k = 0$ Sustituimos $k = 0$ en las matrices A y A': $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Para A, como $|A| = 0$, $\text{rango}(A) < 3$. Consideramos el menor de orden 2 formado por las filas 1 y 2, y las columnas 1 y 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

Así, $\text{rango}(A) = 2$. Para A', observamos que la tercera fila es idéntica a la segunda fila. Además, la columna de términos independientes es el vector nulo. Por lo tanto, el rango de A' no puede ser mayor que el rango de A. Entonces, $\text{rango}(A') = 2$. Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A') = 2 <$ número de incógnitas (3), el sistema es **compatible indeterminado**. Tiene infinitas soluciones.

Caso 3: Si $k = -1$ Sustituimos $k = -1$ en las matrices A y A':

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Para A, como $|A| = 0$, $\text{rango}(A) < 3$. Consideramos el menor de orden 2 formado por las filas 2 y 3, y las columnas 1 y 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

Así, $\text{rango}(A) = 2$. Para A', consideramos el menor de orden 3 formado por las columnas 1, 2 y 4:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

Como este menor de orden 3 es $1 \neq 0$, $\text{rango}(A') = 3$. Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A') = 3$, el sistema es **incompatible**. No tiene solución.

Valor de k	**Rango de A y A'**	**Tipo de Sistema**
$k \neq 0$ y $k \neq -1$	$\text{rango}(A) = \text{rango}(A') = 3$	Compatible Determinado (Solución única)
$k = 0$	$\text{rango}(A) = \text{rango}(A') = 2$	Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)
$k = -1$	$\text{rango}(A) = 2$, $\text{rango}(A') = 3$	Incompatible (Sin solución)

b) Resolver el sistema para $k = 0$.

Para $k = 0$, el sistema es compatible indeterminado. Sustituimos $k = 0$ en el sistema original:

$$
\begin{aligned}
0x + 1y + 1z &= 0 \\
1x + 1y + 0z &= 0 \\
1x + 1y + 0z &= 0
\end{aligned}
$$

Simplificando, obtenemos el subsistema equivalente:

$$
\begin{aligned}
y + z &= 0 \quad \textbf{(Ecuación A)} \\
x + y &= 0 \quad \textbf{(Ecuación B)}
\end{aligned}
$$

De la Ecuación A, despejamos z: $z = -y$ De la Ecuación B, despejamos x: $x = -y$ Podemos expresar las infinitas soluciones en función de un parámetro. Sea $y = \alpha$, donde α es cualquier número real. Entonces, las soluciones del sistema para $k = 0$ son:

$$
\begin{aligned}
x &= -\alpha \\
y &= \alpha \\
z &= -\alpha
\end{aligned}
$$

Así, la solución general es el vector $\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.

b) (1 punto) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$,

$A_3 = A_2^2 + A_2$,$A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025}.

Solución

Resolución de Problema con Matrices

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.

Sea B una matriz simétrica de orden 2, por lo que tiene la forma $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Primero, calculamos las matrices necesarias para la ecuación $BA = (A + A^2)B$:

1. Calcular A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 5-15 \\ -1+3 & -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Calcular $A + A^2$:

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 & 5-10 \\ -1+2 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcular BA (lado izquierdo de la ecuación):

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot (-1) & a \cdot 5 + b \cdot (-3) \\ b \cdot 1 + c \cdot (-1) & b \cdot 5 + c \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 5a-3b \\ b-c & 5b-3c \end{pmatrix}$$

4. Calcular $(A + A^2)B$ (lado derecho de la ecuación):

$$(A+A^2)B = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + (-5)b & -3b + (-5)c \\ 1a + 1b & 1b + 1c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-5b & -3b-5c \\ a+b & b+c \end{pmatrix}$$

5. Igualar los elementos correspondientes de BA y $(A + A^2)B$:

$$\begin{pmatrix} a-b & 5a-3b \\ b-c & 5b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-5b & -3b-5c \\ a+b & b+c \end{pmatrix}$$

Esto nos da el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

1. $a - b = -3a - 5b \implies 4a + 4b = 0 \implies a = -b$
2. $5a - 3b = -3b - 5c \implies 5a = -5c \implies a = -c$
3. $b - c = a + b \implies -c = a$
4. $5b - 3c = b + c \implies 4b - 4c = 0 \implies b = c$

De las ecuaciones (1) y (2), tenemos $a = -b$ y $a = -c$. Esto implica que $-b = -c$, lo que nos lleva a $b = c$. Esta misma relación ($b = c$) se obtiene directamente de la ecuación (4). La ecuación (3) ($a = -c$) es consistente con las anteriores.

Por lo tanto, las condiciones para a, b, c son $a = -b$ y $b = c$. Si tomamos c como un parámetro, digamos $c = k$ (donde k es un número real cualquiera), entonces $b = k$ y $a = -k$.

Las matrices simétricas B que verifican la ecuación son de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} -k & k \\ k & k \end{pmatrix} \quad \text{donde } k \in \mathbb{R}$$

b) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025}.

La sucesión de matrices se define recursivamente como $A_{n+1} = A_n^2 + A_n$. Necesitamos calcular los primeros términos para buscar un patrón. Recordemos que $A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A_1^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calcular A_2:

$$A_2 = A_1^2 + A_1 = A^2 + A = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+1 & -10+5 \\ 2-1 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcular A_3: Para calcular $A_3 = A_2^2 + A_2$, primero calculamos A_2^2:

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-5 & 15-5 \\ -3+1 & -5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ahora sumamos A_2:

$$A_3 = A_2^2 + A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 10-5 \\ -2+1 & -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Hemos observado un patrón: $A_3 = A_1$. Esto indica que la secuencia de matrices es cíclica con un período de 2. Es decir, $A_n = A_1$ si n es impar, y $A_n = A_2$ si n es par.

Queremos hallar A_{2025}. Dado que 2025 es un número impar, la matriz A_{2025} será igual a A_1.

Por lo tanto:

$$A_{2025} = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$