Análisis Matemático

Ejercicios resueltos

Evau 2024

by S3r4

1. **Dada la función real de variable real $f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2}$, se pide:**

   a) **(0.75 puntos) Hallar el dominio de definición de $f(x)$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de las asíntotas de su gráfica.**

   b) **(1 punto) Determinar los extremos relativos de la función, así como sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

   c) **(0.75 puntos) Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la recta de ecuacion $9x - 8y = 6$ (Modelo 2024)**

   Solución

   La función está definida siempre que el denominador $(x-1)^2$ no sea cero.

$$(x-1)^2 = 0 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1$$

   Por lo tanto, el dominio de definición de $f(x)$ es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, o en notación de intervalos $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

   Una asíntota vertical puede existir en $x = 1$. Analizamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^+} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} \right)$$

   Cuando $x \to 1^+$, $(x-1)^2 \to 0^+$, por lo que $\frac{4}{(x-1)^2} \to +\infty$.

   $\lim_{x \to 1^+} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} \right) = 1 - (+\infty) = -\infty$

   $\lim_{x \to 1^-} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} \right) = 1 - (+\infty) = -\infty$

   Dado que los límites laterales tienden a infinito, existe una asíntota vertical en $x = 1$.

   Asíntotas horizontales:Analizamos el límite de la función cuando $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} x - 0 = \pm\infty$$

   Como el límite no es finito, no existen asíntotas horizontales.

   Asíntotas oblicuas:Buscamos una asíntota de la forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - \frac{4}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{4}{x(x-1)^2} \right)$$

   Cuando $x \to \pm\infty$, $\frac{4}{x(x-1)^2} \to 0$.

$$m = 1 - 0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} - 1 \cdot x \right)$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{4}{(x-1)^2} \right) = 0$$

Por lo tanto, existe una asíntota oblicua con ecuación $y = 1x + 0$, es decir, $y = x$.

b) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento

Primero, calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f(x) = x - 4(x-1)^{-2}$$

$$f'(x) = 1 - 4(-2)(x-1)^{-3}(1) = 1 + 8(x-1)^{-3} = 1 + \frac{8}{(x-1)^3}$$

Para encontrar los extremos relativos, igualamos la derivada a cero:

$$1 + \tfrac{8}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow \tfrac{8}{(x-1)^3} = -1 \Rightarrow 8 = -(x-1)^3 \Rightarrow -8 = (x-1)^3$$

Tomando la raíz cúbica de ambos lados:

$$\sqrt[3]{-8} = x - 1 \Rightarrow -2 = x - 1 \Rightarrow x = -2 + 1 = -1$$

Ahora analizamos el signo de la derivada en los intervalos definidos por el punto crítico $x = -1$ y la discontinuidad $x = 1$: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$.

Intervalo $(-\infty, -1)$: Tomamos un punto de prueba, por ejemplo $x = -2$.

$$f'(-2) = 1 + \tfrac{8}{(-2-1)^3} = 1 + \tfrac{8}{(-3)^3} = 1 + \tfrac{8}{-27} = 1 - \tfrac{8}{27} = \tfrac{19}{27} > 0$$

La función es creciente en $(-\infty, -1)$.

Intervalo $(-1, 1)$: Tomamos un punto de prueba, por ejemplo $x = 0$.

$$f'(0) = 1 + \tfrac{8}{(0-1)^3} = 1 + \tfrac{8}{(-1)^3} = 1 + \tfrac{8}{-1} = 1 - 8 = -7 < 0$$

La función es decreciente en $(-1, 1)$.

Intervalo $(1, \infty)$:Tomamos un punto de prueba, por ejemplo $x = 2$.

$$f'(2) = 1 + \tfrac{8}{(2-1)^3} = 1 + \tfrac{8}{(1)^3} = 1 + 8 = 9 > 0$$

La función es creciente en $(1, \infty)$.

En $x = -1$, la derivada cambia de positiva a negativa, por lo que hay un máximo relativo en $x = -1$. El valor de la función en este punto es:

$$f(-1) = -1 - \frac{4}{(-1-1)^2} = -1 - \frac{4}{(-2)^2} = -1 - \frac{4}{4} = -1 - 1 = -2$$

Por lo tanto, hay un máximo relativo en el punto $(-1, -2)$.

Crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;Decrecimiento: $(-1, 1)$

Máximo relativo: $(-1, -2)$;Mínimos relativos: No hay.

c) Recta tangente paralela a $9x - 8y = 6$

La pendiente de la recta $9x - 8y = 6$ se puede obtener despejando y : $8y = 9x - 6 \Rightarrow y = \frac{9}{8}x - \frac{6}{8} = \frac{9}{8}x - \frac{3}{4}$

La pendiente de esta recta es $m = \frac{9}{8}$.

Buscamos un punto x_0 en la gráfica de $f(x)$ donde la pendiente de la recta tangente sea igual a $\frac{9}{8}$, es decir, $f'(x_0) = \frac{9}{8}$.

$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} + 1 = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8} \Rightarrow (x-1)^3 = 8 \cdot 8 = 64$

Tomando la raíz cúbica de ambos lados:

$x - 1 = \sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow x = 4 + 1 = 5$

El punto de tangencia es $x_0 = 5$. Calculamos el valor de la función en este punto:

$$f(5) = 5 - \frac{4}{(5-1)^2} = 5 - \frac{4}{(4)^2} = 5 - \frac{4}{16} = 5 - \frac{1}{4} = \frac{20-1}{4} = \frac{19}{4}$$

El punto de tangencia es $\left(5, \frac{19}{4}\right)$.

La ecuación de la recta tangente en este punto con pendiente $\frac{9}{8}$ es:

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{19}{4} = \frac{9}{8}(x-5)$

Multiplicando por 8 para eliminar denominadores:$\Rightarrow 8y - 8 \cdot \frac{19}{4} = 9(x-5)$

$\Rightarrow 8y - 2 \cdot 19 = 9x - 45 \Rightarrow 8y - 38 = 9x - 45 \Rightarrow 9x - 8y - 45 + 38 = 0$

$$9x - 8y - 7 = 0$$

La ecuación de la recta tangente paralela a $9x - 8y = 6$ es $9x - 8y - 7 = 0$.

2. **Sea la función** $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

   a) **(0.75 puntos) Halle** $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}}$.

   b) **(1.75 puntos) Halle el área, en el primer cuadrante, comprendida entre la recta** $y = x$ **y la gráfica de la función** $f(x)$.**(Modelo 2024)**

   Solución

   Consideremos la función $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

   Queremos calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}}$.

   Descomposición de $f(x)$

   Primero, descomponemos la función $f(x)$. Usamos la factorización $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, por lo que tenemos:

   $f(x) = x\sqrt[3]{((x-1)(x+1))^2} = x \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

   Esto nos da la forma: $f(x) = x \cdot (x-1)^{2/3} \cdot (x+1)^{2/3}$.

   Queremos encontrar el comportamiento de $f(x)$ cuando x se acerca a 1. Consideramos cada uno de los factores de $f(x)$:

   -$(x-1)^{2/3}$ tiende a 0 cuando $x \to 1$,

   -$(x+1)^{2/3}$ se aproxima a $2^{2/3}$ cuando $x \to 1$,

   - x se aproxima a 1 cuando $x \to 1$.

   Por lo tanto, cerca de $x = 1$, tenemos la siguiente aproximación:

$$f(x) \approx 1 \cdot (x-1)^{2/3} \cdot 2^{2/3}.$$

   Sustituyendo esta aproximación de $f(x)$ en el límite original, obtenemos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^{2/3} \cdot 2^{2/3}}{(x-1)^{2/3}}.$$

   Los términos $(x-1)^{2/3}$ se cancelan, y nos queda:$\lim_{x\to 1} 2^{2/3}$.

   El valor del límite es: $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$.

3. **Para la función** $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$ **, se pide:**

   a) **(0.5 puntos) Calcular la ecuacion de la recta tangente a la gráfica de** $f(x)$ **en** $x = \pi$.

   b) **(1 punto) Probar que** $f(x)$ **tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo** $(-\pi, 0)$ **utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmacion utilizando adecuadamente, esta´ vez, el teorema de Bolzano.**

   c) **(1 punto) Si** $g(x) = f(-x)$**, calcular el area entre las gráficas de** $f(x)$ **y** $g(x)$ **en el intervalo** $[0, \pi]$**.(Ordinaria 2024 Modelo A)**

Solución

a)Cálculamos $f(\pi)$ .Sustituyamos $x = \pi$ en la función:

$f(\pi) = \pi^4 + \pi(\pi^3) + \pi^2(\pi^2) + \pi^3(\pi) + \pi^4 = \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 = 5\pi^4$.

luego el punto donde debemos calcular la tangente es $A = (\pi, 5\pi^4)$

Cálculo de la derivada $f'(x)$= $4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$.

Para hallar la pendiente de la recta tangente en π

Sustituyendo $x = \pi$ en $f'(x)$:

$f'(\pi) = 4\pi^3 + 3\pi(\pi^2) + 2\pi^2(\pi) + \pi^3 = 4\pi^3 + 3\pi^3 + 2\pi^3 + \pi^3 = 10\pi^3$.

La ecuación de la recta tangente en $x = \pi$ está dada por la fórmula:

$y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \Rightarrow y - 5\pi^4 = 10\pi^3(x - \pi)$

Despejamos y: $y = 10\pi^3 x - 10\pi^4 + 5\pi^4 \Rightarrow y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$.

b)Para aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo $(-\pi, 0)$, verificamos sus hipótesis:

La función $f(x)$ es polinómica, por lo que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, incluyendo $(-\pi, 0)$.

Evaluamos $f(-\pi)$ y $f(0)$:

$f(-\pi) = (-\pi)^4 + \pi(-\pi)^3 + \pi^2(-\pi)^2 + \pi^3(-\pi) + \pi^4 = \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 = \pi^4$.

$f(0) = 0^4 + \pi(0)^3 + \pi^2(0)^2 + \pi^3(0) + \pi^4 = \pi^4$.

Como $f(-\pi) = f(0)$, se cumple la condición de Rolle.

Por lo tanto, existe un $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$.

El Teorema de Bolzano establece que si una función continua cambia de signo en un intervalo, entonces tiene al menos un cero en ese intervalo.

Evaluamos $f'(x)$ en dos puntos dentro de $(-\pi, 0)$:

$f'(-\pi) = 4(-\pi)^3 + 3\pi(-\pi)^2 + 2\pi^2(-\pi) + \pi^3 = -4\pi^3 + 3\pi^3 - 2\pi^3 + \pi^3 = -2\pi^3$.

$f'(0) = 4(0)^3 + 3\pi(0)^2 + 2\pi^2(0) + \pi^3 = \pi^3$.

Dado que $f'(-\pi) < 0$ y $f'(0) > 0$, por el Teorema de Bolzano, existe un $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$.

Se ha demostrado mediante los teoremas de Rolle y Bolzano que existe al menos un punto $c \in (-\pi, 0)$ donde la derivada de $f(x)$ es cero.

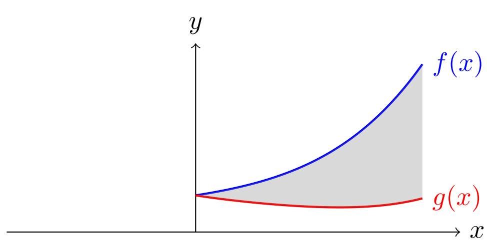
c)Cálculo del Área Entre $f(x)$ y $g(x)$

Dado que $g(x) = f(-x)$, calculamos el área entre las curvas en el intervalo $[0, \pi]$ mediante:

$$A = \int_0^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Calculamos la diferencia:
$f(x) - g(x) = \left(x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4\right) - \left((-x)^4 + \pi(-x)^3 + \pi^2(-x)^2 + \pi^3(-x) + \pi^4\right)$
$= x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 - (x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4)$
$= x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 - x^4 + \pi x^3 - \pi^2 x^2 + \pi^3 x - \pi^4$
$= 2\pi x^3 + 2\pi^3 x.$

Así, el área es:
$A = \int_0^{\pi} (2\pi x^3 + 2\pi^3 x)\, dx = 2\pi \int_0^{\pi} x^3\, dx + 2\pi^3 \int_0^{\pi} x\, dx.$
Calculamos las integrales:
$\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}, \quad \text{y} \quad \int x\, dx = \frac{x^2}{2}.$
Evaluamos en $[0, \pi]$:
$\int_0^{\pi} x^3\, dx = \frac{\pi^4}{4} - 0, \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi^2}{2} - 0.$
Por lo tanto,
$A = 2\pi \cdot \frac{\pi^4}{4} + 2\pi^3 \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{2\pi^5}{4} + \frac{2\pi^5}{2} = \frac{\pi^5}{2} + \pi^5 = \frac{3\pi^5}{2}.$



4. **Calcule:**

   a) **(1.25 puntos)** $\int_1^e (x+2)\ln x\, dx$

   b) **(1.25 puntos)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.**(Ordinaria 2024 Modelo B)**

Solución

Utilizamos el método de integración por partes, eligiendo:

$$u = \ln x, \qquad dv = (x+2)dx,$$
$$du = \frac{1}{x}dx, \qquad v = \frac{x^2}{2} + 2x.$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

Sustituyendo: $I = \left(\ln x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\right)\Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\frac{1}{x}dx.$

Simplificamos la integral restante: $\int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\frac{1}{x}dx = \int_1^e \left(\frac{x}{2} + 2\right)dx.$

Resolvemos cada término:$\int \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2-1),$

$\int_1^e 2dx = 2x\Big|_1^e = 2(e-1).$

Por lo tanto$\int_1^e \left(\frac{x}{2} + 2\right)dx = \frac{e^2-1}{4} + 2(e-1).$

Sustituyendo en la expresión original: $I = \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x\right]_1^e - \left(\frac{e^2-1}{4} + 2(e-1)\right).$

Evaluamos los límites:
$\left(\frac{e^2}{2} + 2e\right)\ln e - \left(\frac{1}{2} + 2\right)\ln 1 = \left(\frac{e^2}{2} + 2e\right)(1) - 0 = \frac{e^2}{2} + 2e.$

Finalmente: $I = \frac{e^2}{2} + 2e - \frac{e^2-1}{4} - 2(e-1).$

Reordenamos términos:
$I = \frac{2e^2}{4} + \frac{8e}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} - 2e + 2 = \frac{e^2}{4} + 2 + \frac{9}{4} = \frac{e^2+9}{4}.$

La integral evaluada es: $I = \frac{e^2+9}{4}.$

b)Queremos calcular el siguiente límite:

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\cos x}}.$$

Evaluamos directamente en $x = \frac{\pi}{2}$:

$-\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Esto da una forma indeterminada 1^∞, por lo que aplicamos logaritmos para resolver el límite.

Definimos el límite como L: $L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

Aplicamos el logaritmo natural:

$$\ln L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\cos x}.$$

En $x = \frac{\pi}{2}$, tenemos:

$-\tan\left(\frac{x}{2}\right) \to 1, \text{por lo que } \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \to 0, -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Esto nos da una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que aplicamos la regla de L'Hôpital.

Aplicamos la regla de L'Hôpital, diferenciando el numerador y el denominador:

- La derivada de $\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ es:

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- La derivada de $\cos x$ es $-\sin x$.

Entonces, el límite se convierte en:

$$\ln L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{-\sin x \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Evaluamos el límite en $x = \frac{\pi}{2}$:

$-\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Sustituyendo estos valores, obtenemos: $\ln L = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{-1\cdot 1} = -1$.

Finalmente, tenemos que $\ln L = -1$, lo que implica que: $L = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Por lo tanto, el límite es:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\cos x}} = \frac{1}{e}.$$

5. **Dada la función $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$, se pide:**

   a) **(1.25 ptos) Hallar su dominio y las asíntotas de su gráfica.**

   b) **(0.75 ptos) Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, \frac{7}{3})$.**

   c) **(0.5 ptos) Encontrar, si es posible, algun punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1.(Ordinaria 2024 Coincidentes Mod A)**

   Solución

   a)$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$

   El dominio de la función $f(x)$ son todos los números reales excepto aquellos valores de x que anulan el denominador $x^2 - 1$.

$$x^2 - 1 = 0 \implies (x-1)(x+1) = 0 \implies x = 1 \text{ o } x = -1$$

   Por lo tanto, el dominio de la función es:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

   Las asíntotas verticales pueden ocurrir en los valores de x que anulan el denominador. Factorizamos el numerador:$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

   Para $x \neq 1$, la función se simplifica a:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

   Analizamos los límites:

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

   El numerador tiende a $(-1)^2+(-1)+1 = 1$, y el denominador tiende a 0. Por lo tanto, hay una asíntota vertical en $x = -1$.

   $\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+x+1}{x+1} = +\infty$ y $\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+x+1}{x+1} = -\infty$

   En $x = 1$, hay una discontinuidad evitable:

   $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$

   Hay un agujero en el punto $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

   Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \pm\infty$

   Como el grado del numerador (3) es mayor que el grado del denominador (2), no existe asíntota horizontal.

   Asíntotas oblicuas: Buscamos una asíntota de la forma $y = mx + n$.

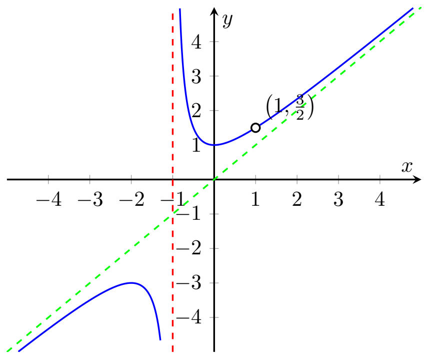
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-1}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-1}{x^3-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2-1} - 1 \cdot x\right)$$

$$n = \text{lím}_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3-1-x(x^2-1)}{x^2-1}\right) = \text{lím}_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-1-x^3+x}{x^2-1}$$

$$n = \text{lím}_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2-1} = 0$$

Por lo tanto, la asíntota oblicua es $y = 1x + 0$, es decir, $y = x$.



Cálculo de la recta tangente en el punto $\left(2, \frac{7}{3}\right)$

Dada la función $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$, que para $x \neq 1$ se simplifica a $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

Verificación del punto Sustituimos $x = 2$ en la función:

$$f(2) = \frac{2^2+2+1}{2+1} = \frac{4+2+1}{3} = \frac{7}{3}$$

El punto $\left(2, \frac{7}{3}\right)$ pertenece a la gráfica de la función.

Derivamos la forma simplificada de la función $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ utilizando la regla del cociente:

$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)(1)}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x^2+2x+x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{2x^2+3x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

Cálculo de la pendiente en $x = 2$

La pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es: $m = f'(2) = \frac{2^2+2(2)}{(2+1)^2} = \frac{4+4}{3^2} = \frac{8}{9}$

Utilizamos la ecuación punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ con $(x_1, y_1) = \left(2, \frac{7}{3}\right)$ y $m = \frac{8}{9}$: $y - \frac{7}{3} = \frac{8}{9}(x - 2)$

Simplificando la ecuación: $y - \frac{7}{3} = \frac{8}{9}x - \frac{16}{9}$

Multiplicando por 9 para eliminar las fracciones:

$9y - 21 = 8x - 16 \Rightarrow y = \frac{8}{9}x + \frac{5}{9}$

c)Dada la función $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$, con derivada (para $x \neq 1$ y $x \neq -1$):$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

Buscamos valores de x_0 tales que la pendiente de la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ sea 1, es decir, $f'(x_0) = 1$.

$\frac{x_0^2+2x_0}{(x_0+1)^2} = 1$. Multiplicando ambos lados por $(x_0+1)^2$ (con $x_0 \neq -1$):
$x_0^2 + 2x_0 = (x_0+1)^2 \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 = x_0^2 + 2x_0 + 1$
Restando $x_0^2 + 2x_0$ de ambos lados:

$$0 = 1$$

Esta igualdad es falsa, lo que indica que no existe ningún valor de x_0 que satisfaga la condición $f'(x_0) = 1$.

6. **Sea** $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$

   a) **(1.5 puntos) Analice la monotonía y los extremos relativos de $f(x)$.**

   b) **(1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$.**

Solución

La función se puede definir a trozos como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculamos la derivada en cada intervalo:

Para $x < 0$: $f'(x) = \frac{(-1)(x^2+1)-(-x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-1+2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

Para $x > 0$: $f'(x) = \frac{(1)(x^2+1)-(x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

En $x = 0$, analizamos las derivadas laterales:

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = \frac{0^2-1}{(0^2+1)^2} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-0^2}{(0^2+1)^2} = 1$$

Como las derivadas laterales son diferentes, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Ahora analizamos el signo de la derivada en los intervalos:

Para $x < 0$: $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

* $x^2 - 1 > 0 \implies x < -1$ o $x > 1$. En el intervalo $x < 0$, esto implica $x < -1$. Por lo tanto, $f'(x) > 0$ si $x < -1$.

* $x^2 - 1 < 0 \implies -1 < x < 1$. En el intervalo $x < 0$, esto implica $-1 < x < 0$. Por lo tanto, $f'(x) < 0$ si $-1 < x < 0$.

* $x^2 - 1 = 0 \implies x = -1$ (ya que $x < 0$). En $x = -1$, $f'(-1) = 0$.

Para $x > 0$: $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

* $1 - x^2 > 0 \implies -1 < x < 1$. En el intervalo $x > 0$, esto implica $0 < x < 1$. Por lo tanto, $f'(x) > 0$ si $0 < x < 1$.

* $1 - x^2 < 0 \implies x < -1$ o $x > 1$. En el intervalo $x > 0$, esto implica $x > 1$. Por lo tanto, $f'(x) < 0$ si $x > 1$.

* $1 - x^2 = 0 \implies x = 1$ (ya que $x > 0$). En $x = 1$, $f'(1) = 0$.

Tabla de monotonía:

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	(0,1)	$(1,\infty)$
Signo de $f'(x)$	+	-	+	-
Monotonía de $f(x)$	$\nearrow$ creciente	$\searrow$ decreciente	$\nearrow$ creciente	$\searrow$ decreciente

Extremos relativos:

* En $x=-1$, hay un máximo relativo ya que la función pasa de creciente a decreciente.

$f(-1)=\frac{|-1|}{(-1)^2+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$. Máximo en $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

* En $x=0$, hay un mínimo relativo ya que la función pasa de decreciente a creciente (aunque no sea derivable).

$f(0)=\frac{|0|}{0^2+1}=\frac{0}{1}=0$. Mínimo en $(0,0)$.

* En $x=1$, hay un máximo relativo ya que la función pasa de creciente a decreciente.

$f(1)=\frac{|1|}{1^2+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$. Máximo en $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

b) Área de la región acotada por $y=\frac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$

Buscamos los puntos de intersección entre $y=\frac{|x|}{x^2+1}$ e $y=\frac{1}{2}$.

Para $x\geq 0$:

$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=x^2+1\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow (x-1)^2=0\Rightarrow x=1$

El punto de intersección es $(1,\frac{1}{2})$.

Para $x<0$:

$\frac{-x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow -2x=x^2+1\Rightarrow x^2+2x+1=0\Rightarrow (x+1)^2=0\Rightarrow x=-1$

El punto de intersección es $(-1,\frac{1}{2})$.

La región acotada está entre $x=-1$ y $x=1$, y la función $f(x)$ está por encima de la recta $y=\frac{1}{2}$ en este intervalo (excepto en los puntos de intersección). Debido a la simetría de la función $f(x)$ alrededor del eje y ($f(-x)=f(x)$), podemos calcular el área en el intervalo $[0,1]$ y multiplicarla por 2.

El área es:

$$A=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}-\frac{|x|}{x^2+1}\right)dx$$

Debido a la simetría, podemos escribir:$A=2\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx\Rightarrow A=2\left[\int_0^1\frac{1}{2}dx-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx\right]$

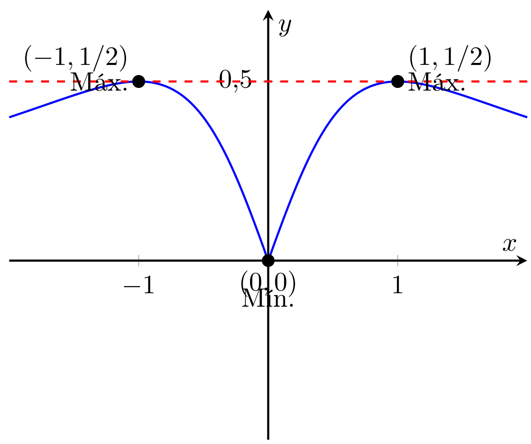
Usamos la sustitución $u=x^2+1$, $du=2xdx$, $\frac{1}{2}du=xdx$. Los límites cambian de 0 a 1 para x a 1 a 2 para u.

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \int_1^2 \frac{1}{u}\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}[\ln|u|]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln(2) - \ln(1)) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Para la otra integral: $\int_0^1 \frac{1}{2}dx = \left[\frac{1}{2}x\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}$

Sustituyendo estos resultados en la expresión para el área: $A = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)\right) = 1 - \ln(2)$

El área de la región acotada es $1 - \ln(2)$ u^2



7. **Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta y = x en el punto (0, 0).**

   a) **(1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto (1, 1).**

   b) **(0,5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en R(Extrordinaria 2024)**

Solución

a)Una función polinómica de grado 2 tiene la forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola.

Para que la gráfica de $f(x)$ sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$, se deben cumplir dos condiciones:

-El punto $(0, 0)$ debe pertenecer a la gráfica de $f(x)$: $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c$

Como el punto es $(0, 0)$, debemos tener $f(0) = 0$, por lo tanto, $c = 0$.

La función toma la forma $f(x) = ax^2 + bx$.

-La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$ debe ser igual a la pendiente de la recta $y = x$, que es 1. La pendiente de la recta tangente está dada por la derivada de $f(x)$:$f'(x) = 2ax + b$

Evaluando en $x = 0$: $f'(0) = 2a(0) + b = b$

Para que la pendiente sea 1, debemos tener $b = 1$.

Por lo tanto, una función polinómica de grado 2 cuya gráfica es tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$ es de la forma $f(x) = ax^2 + x$, donde a puede ser cualquier número real diferente de cero.

Ejemplo: Si elegimos $a = 1$, obtenemos $f(x) = x^2 + x$.

b) Función con un máximo relativo en $(1, 1)$

Para que la función polinómica de grado 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$, tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$, se deben cumplir las siguientes condiciones:

-El punto $(1, 1)$ debe pertenecer a la gráfica de $f(x)$:

$$f(1) = a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$$

Como el punto es $(1, 1)$, debemos tener $f(1) = 1$, por lo tanto, $a+b+c = 1$.

-En un máximo relativo, la derivada de la función debe ser cero en ese punto:

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 2a(1) + b = 2a + b$$

Para un extremo relativo en $x = 1$, debemos tener $f'(1) = 0$, por lo tanto, $2a + b = 0$, lo que implica $b = -2a$.

-Para que sea un máximo relativo, la segunda derivada debe ser negativa:$f''(x) = 2a$

Para tener un máximo, necesitamos $f''(1) = 2a < 0$, lo que implica $a < 0$.

Sustituyendo $b = -2a$ en la primera ecuación:

$a + (-2a) + c = 1 \Rightarrow -a + c = 1 \Rightarrow c = 1 + a$

Por lo tanto, una función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$ es de la forma $f(x) = ax^2 - 2ax + (1 + a)$, donde a es cualquier número real negativo.

Ejemplo: Si elegimos $a = -1$, obtenemos $f(x) = -x^2 + 2x + (1 - 1) = -x^2 + 2x$.

Verificamos: $f(1) = -(1)^2 + 2(1) = -1 + 2 = 1$. $f'(x) = -2x + 2$, $f'(1) = -2(1) + 2 = 0$. $f''(x) = -2 < 0$, lo que confirma que es un máximo.

c) Una función polinómica de grado 2 tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Para encontrar los extremos relativos, necesitamos analizar su primera derivada:

$$f'(x) = 2ax + b$$

Los extremos relativos ocurren en los puntos donde la derivada es igual a cero:

$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Como $a \neq 0$, esta ecuación tiene una única solución para x. Esto significa que una función polinómica de grado 2 tiene un único punto crítico.

Para determinar si este punto crítico corresponde a un máximo o a un mínimo relativo, analizamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 2a$$

La segunda derivada es una constante diferente de cero (ya que $a \neq 0$).

- Si $a > 0$, entonces $f''(x) = 2a > 0$ para todo x. Esto implica que la función es cóncava hacia arriba y el único punto crítico corresponde a un mínimo relativo.
- Si $a < 0$, entonces $f''(x) = 2a < 0$ para todo x. Esto implica que la función es cóncava hacia abajo y el único punto crítico corresponde a un máximo relativo.

En ambos casos, una función polinómica de grado 2 tiene exactamente un extremo relativo en $\mathbb{R}$ (ya sea un máximo o un mínimo). Por lo tanto, una función polinómica de grado 2 no puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

8. **Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:**

a) (0,75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) (1,75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x-3)$(Extraordinaria 2024)

Solución

a) Paridad e intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para estudiar si la función es par o impar, analizamos $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$$

Como $f(-x) = -f(x)$, la función $f(x)$ es **impar**. Esto significa que su gráfica es simétrica con respecto al origen.

Calculamos la primera derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Para encontrar los puntos críticos, igualamos la derivada a cero:

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Los puntos críticos son $x = -1$ y $x = 1$. Estos puntos dividen la recta real en tres intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, y $(1, \infty)$. Analizamos el signo de $f'(x)$ en cada intervalo:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	-	$+$
Monotonía de $f(x)$	$\nearrow$ creciente	$\searrow$ decreciente	$\nearrow$ creciente

b) Área de la región acotada por $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x(x-3) = x^2 - 3x$

Para calcular el área de la región acotada, primero necesitamos encontrar los puntos de intersección entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. Igualamos las dos funciones:

$x^3 - 3x = x^2 - 3x \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0$

Las soluciones son $x = 0$ (con multiplicidad 2) y $x = 1$. Los puntos de intersección son en $x = 0$ y $x = 1$.

Ahora necesitamos determinar cuál función está por encima de la otra en el intervalo $[0, 1]$. Tomamos un punto de prueba dentro del intervalo, por ejemplo $x = 0{,}5$:

$$f(0{,}5) = (0{,}5)^3 - 3(0{,}5) = 0{,}125 - 1{,}5 = -1{,}375$$

$$g(0{,}5) = (0{,}5)^2 - 3(0{,}5) = 0{,}25 - 1{,}5 = -1{,}25$$

Como $g(0{,}5) > f(0{,}5)$, la función $g(x)$ está por encima de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

El área de la región acotada se calcula mediante la integral definida:

$A = \int_0^1 |g(x) - f(x)|dx = \int_0^1 (g(x) - f(x))dx \Rightarrow A = \int_0^1 ((x^2 - 3x) - (x^3 - 3x))dx \Rightarrow A = \int_0^1 (x^2 - 3x - x^3 + 3x)dx \Rightarrow A = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx$

Ahora calculamos la integral:

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \Rightarrow A = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - (0 - 0) \Rightarrow A = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

El área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ es $\frac{1}{12}$ unidades cuadradas.