Ejercicios resueltos

Aplicación de la derivada

by S3r4

2022

1. **En una obra cae arena sobre un montón cónico de arena a razón de** $10\ dm^3/min$ **. El radio de la base del cono es siempre igual a la mitad de la altura. ¿A qué velocidad crece la altura de la pila cuando tiene** $5\ dm$ **de altura?.**

   Solución:

   Se tiene :$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{h^2}{4} \cdot h$ ya que $r = \frac{h}{2}$ de donde $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$,

   De
   $$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

   Si Sustituimos por los valores del enunciado
   $$10 = \frac{1}{4}\pi 5^2 \frac{dh}{dt} = \frac{25}{4}\pi \frac{dh}{dt}$$

   Como $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dh}{dt}$ .Entonces
   $$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{5\pi} dm/min$$

   la velocidad de crecimiento de la altura cuando esta es de 5 dm .

2. **El radio de una esfera crece uniformemente con una velocidad de** $3cm/s$ **. Hallar la velocidad de crecimiento del área y del volumen de la esfera en el instante en que su radio es** $2\ m$**.**

   Solución:

   La fórmula del volumen de la esfera en función del radio es V=$\frac{4}{3}\pi r^3$

   Por lo tanto derivando con respecto al tiempo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

   por la regla de cadena.

   Sustituyendo ahora por los valores del enunciado $r = 200cm$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(200)^2 = 160000\pi cm^3/s$$

   En el caso de la superficie S=$4\pi r^2$

   Por lo tanto derivando con respecto al tiempo

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

   Se tiene que $\frac{dr}{dt} = 3cm/s$. Sustityendo, $r = 200cm$,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 8\pi \cdot 200 \cdot 3 = 4800\pi \cdot cm^2/s$$

3. **El lado de un cubo crece uniformemente a razón de $4\ cm/s$. Hallar la velocidad de crecimiento del área y del volumen del cubo en el instante en que su lado valo $5\ m$.**

   Solución:

   La fórmula del volumen del cubo $V = x^3$ donde x es la medida del lado

   Por lo tanto derivando con respecto al tiempo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

   por la regla de cadena

   Sustituyendo ahora por los valores del enunciado $x = 500cm$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(x)}{dr} \cdot \frac{dx}{dt} = 3 \cdot 500^2 \cdot 4 = 12 \cdot 250000cm^3/s = 3000000cm^3/s$$

   El área del cubo viene dada por :$S(x) = 6x^2$.

   Se tiene que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 12x \frac{dx}{dt}$$

   Sustituyendo ahora por los valores del enunciado $x = 500cm$

$$\frac{dS}{dt} = 12 \cdot 500 \cdot 4cm^2/s = 24000cm/s$$

4. **La altura de un cono de revolución es de** $100\ m$ **y decrece con una velocidad de** $10\ m/s$**. El radio de la base es de** $50\ m$ **y crece arazón de** $5\ m/s$**. Estudiar la variación del volumen en cada instante.**

   Solución:

   La variación del radio en función del tiempo es : $r = 50 + 5t$

   La variación de la altura en función del tiempo es $h = 100 - 10t$.

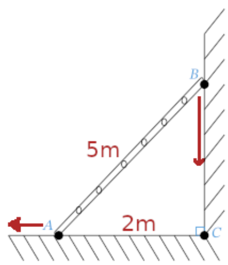
   Entonces el volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot h$ por tanto, su Volumne en función del tiempo es

   $V = \frac{1}{3}\pi(50 + 5t)^2(100 - 10t) = \frac{1}{3}\pi(250000 + 25000t - 2500t^2 - 250t^3)$

   por tanto la variación será:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi(25000 - 5000t - 750t)$$

5. **Una escalera se encuentra apoyada en una pared vertical. La escalera tiene** $5\ m$ **de longitud.En un momento dado la escalera resbala y la parte inferior se aleja de la pared a una velocidad de** $0,75\ m/s$ **. Si el extremo inferior se encuentra a** $2\ m$ **,¿a qué velocidad desciende el extremo superior en ese punto?.**



Solución:

Consideremos la figura adjunta. La relación que relaciona las variables x e y, es $x^2 + y^2 = 25$

Como las variables x e y dependen del t es decir, , resulta $0 = \frac{d(x^2)}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d(y^2)}{dy}.\frac{dy}{dt}$ .Es decir $0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt}$

Ahora para x=2; $y = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$; $\frac{dx}{dt} = 0,75m/s$.Con lo que

$0 = 4 \cdot 0,75 + 2\sqrt{21}\frac{dy}{dt}$

Y despejando $\frac{dy}{dt} = \frac{-1,5}{\sqrt{21}}m/s$

6. **¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de** $3000\ litros/minuto$ **?**

   Solución:

   Sea r el radio del cilindro y h la altura medidos en decímetros. $V = \pi r^2 h$. El radio es constante , pero h es una función del tiempo $h(t)$, ya que al vaciar agua, el nivel del agua (altura) va cambiando.

   Sea $V(t)$ el volumen de agua, medido en litros (dm^3), que hay en el cilindro en el tiempo t medido en minutos.

   La información que nos dan es una tasa de variación $V(t+1) - V(t) = -3000\, l/min$

   En este tipo de ejercicios la tasa de variación se interpreta como una derivada: $V'(t) = -3000\, l/min$

   Como $V(t + t_o) - V(t) \approx V'(t) \cdot t$, la interpretación es razonable.

   El signo negativo de la derivada es obligado ya que el volumen disminuye con el tiempo. Como el radio es constante pero la altura del agua depende del tiempo, tenemos

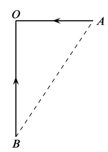
   $V(t) = \pi r^2 h(t)$ y deducimos $V'(t) = \pi r^2 h'(t)$

   Por tanto $-3000 = \pi r^2 h'(t)$ .Y despejando $h'(t) = \frac{-3000}{\pi r^2}$ decímetros por minuto

   Si expresamos las medidas en metros, entonces $h'(t) = \frac{-300}{\pi r^2}$ metros por minuto.

   Observa que lo que realmente hemos calculado es: $V(t+1) - V(t) = \pi r^2 (h(t+1) - h(t)) = -\frac{3000}{\pi r^2}\ dm/s$que es la tasa de variación de la altura en un intervalo de 1 minuto. Pero, como ya se ha dicho, en estos ejercicios se identifica la tasa de variación con una derivada, lo cual es, claro está, una aproximación.

7. **Un barco** A **se desplaza hacia el oeste con una velocidad de** 20 *millas* **por hora y otro barco** B **avanza hacia el norte a** 15 *millas* **por hora. Ambos se dirigen hacia un punto** O **del océano en el cual sus rutas se cruzan. Sabiendo que las distancias iniciales de los barcos** A **y** B **al punto** O **son, respectivamente, de** 15 **y de** 60 *millas*, **se pregunta: ¿A qué velocidad se acercan (o se alejan) los barcos entre sí cuando ha transcurrido una hora? ¿Y cuando han transcurrido** 2 *horas*? **¿En qué momento están más próximos uno de otro?**



Solución:

Tomamos el punto O como origen de coordenadas, tal como se indica en la figura.

Llamemos $x(t)$ a la distancia, medida en millas, que separa el barco A de O. Nos dicen que $x(0) = 15$ y $x'(t) = -20$ millas por hora.

Observa que como la función $x(t)$ es decreciente su derivada debe ser negativa.

Análogamente, sea $y(t)$ la distancia que separa al barco B de O

Nos dicen que $y(0) = -60$ y $y'(t) = -15$ millas por hora.

La distancia entre los dos barcos viene dada por $f(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$;Tenemos $f'(t) = \frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}}$

Cuando ha pasado una hora $x(1) = 15 - 20 = -5; y(1) = 60 - 15 = -45.$

Deducimos que$f'(1) = \frac{x(1)x'(1)+y(1)y'(1)}{\sqrt{x(1)^2+y(1)^2}} = \frac{(-5)(-20)+(45)(-15)}{\sqrt{(-5)^2+(45)^2}} = -\frac{115}{\sqrt{82}} m/h$

El signo negativo indica que se están acercando (la distancia entre ellos está disminuyendo).

Cuando han pasado dos horas $x(2) = 15 - 40 = 25, y(2) = 60 - 30 = 30.$

Deducimos que $f'(2) = \frac{x(2)x'(2)+y(2)y'(2)}{\sqrt{x(2)^2+y(2)^2}} = \frac{(25)(-20)+(30)(-15)}{\sqrt{(25)^2+(30)^2}} = \frac{10}{\sqrt{61}}$ *millas*/*h* .El signo positivo indica que se están alejando (la distancia entre ellos está aumentando).

La distancia entre los dos barcos es mínima cuando la derivada es nula (fíjate que la derivada pasa de negativa a positiva).

La condición f'(t_o)=0 equivale a la igualdad $20x(t_0) - 15y(t_0) = 0$.

Sustituyendo en ella $x(t_0) = 15 - 20t_0$, $y(t_0) = 60 - 15t_0$, obtenemos $t_0 = \frac{48}{25}$

Entonces $x(\frac{48}{25}) = \frac{117}{5}$, $y(\frac{48}{25}) = \frac{156}{5}$.

La distancia mínima a que se cruzan los barcos es $f(\frac{48}{25}) = 39$ *millas*.

8. **Una bola esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme en toda la superficie, a razón de** $50cm^3$ **por minuto.**

   ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide $15\ cm$**?**

   Solución:

   El volumen de la bola en el instante t minutos viene dado por

$$V(t) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r(t)^3$$

   en centímetros cúbicos.

   Nos dicen que $V'(t) = -50$.

   Entonces igualados -50 a la derivada del volumen $V'(t) = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \cdot \pi r(t)^2 r'(t) =$

$$-50 = 4\pi r(t)^2 r'(t)$$

   Si $r(t_0) = 15$, se sigue que $r'(t_0) = -\frac{50}{4\pi(15^2)} = -\frac{1}{18\pi} cm/min$

   La derivada es negativa, como debe ser, ya que el radio está disminuyendo

9. **Un punto P se mueve sobre la parte de la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de $5\ cm/sg$. Calcular la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando $x = 9$.**

   Solución:

   Consideremos las coordenadas del punto genérico P de la parábola en función del tiempo $(x(t), y(t))$, medidas en centímetros, t medido en segundos.

   $y(t) > 0$ ya que estamos en primer cuadrante y que $x(t) = y(t)^2$.

   La distancia del punto P al origen viene dada por $f(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, por lo que

   $$f'(t) = \frac{x(t)x(t) + y'(t)y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

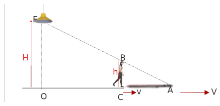
   Lo que nos piden es $f'(t_0)$ sabiendo que $x(t_0) = 9$.

   En tal caso ha de ser $y(t_0) = 3$.

   Sabemos que $x'(t_0) = 5$ .Con lo que $y'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{2y(t_0)} = \frac{5}{6}$. Con lo que

   $$f'(t) = \frac{x(t)x(t) + y'(t)y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = \frac{45 + 3(5/6)}{\sqrt{81 + 9}} = \frac{95}{6\sqrt{10}} m/s$$

10. **Un foco de luz está colocado a una altura de H metros sobre el suelo. Una persona que mide h metros pasa por la vertical del foco moviéndose a velocidad velocidad constante $v\ m/s$.**



   a) Calcula la velocidad V con que se mueve el extremo A de su sombra, en función de H, h y v.

   b) ¿ Cuál es esa velocidad si el foco luminoso está situado a $4m$ del nivel de la calle, la persona mide 1,75 de altura y camina a una velocidad de $1m/s$?

   c) Supongamos ahora que una segunda persona camina acompañando a la anterior. Investiga si es posible que la velocidad del extremo de la sombra de esta segunda persona sea doble de la velocidad V de la primera .

Solución:

De acuerdo a las notaciones elegidas tendremos $OC = y$;$OA = x$

$V = \frac{dx}{dt}$; $v = \frac{dy}{dt}$

Usando la semejanza de los triángulos ABC y AFO $\frac{x}{H} = \frac{x-y}{h}$

Despejo x: $x = \frac{Hy}{H-x}$

Derivemos la expresión (1) respecto de t : $\frac{dx}{dt} = \frac{H}{H-h}\frac{dy}{dt}$

Por lo que : $V = \frac{H-h}{H}v$ (*)

Como H y h son constantes la relación anterior indica que la velocidad de la sombra es proporcional a la de la persona y por tanto constante , con lo que el punto A se mueve con movimiento rectilíneo uniforme.

Como $H > h > 0$ $\frac{H}{H-h} > 1; V > v$ lo que explica porqué la sombra va aumentando su longitud a medida que la persona se aleja del foco luminoso.

Siendo $H = 4m$;$h = 1{,}75m$;$v = 1m/s$ obtenemos , sustituyendo : $V \approxeq 1{,}78m/s$.

Para responder a la pregunta tratemos de hallar la altura h de esta segunda persona. Despejando h de la expresión (*) obtenemos:

$h = H(1 - \frac{v}{V})$.

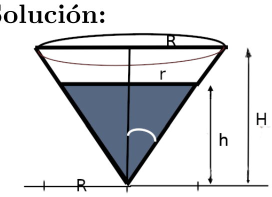
Aplicándose a la segunda persona será $H = 4m$;$v = 1m/s$;$V = 2 \cdot (1,28)m/s = 2,56m/s$; $h = 2{,}88m$ No es posible.

11. **Una tolva con forma de cono recto circular invertido de radio de base R y altura H se llena con líquido a una velocidad de $Q = 0{,}5 m^3/min$ .A medida que se produce el llenado el nivel del líquido en la tolva sube. Si $R = 2m$ y $H = 3m$: Q**

   a) **Calcula la velocidad del nivel del liquido. Calcula el valor de la velocidad cuando la altura del líquido en la tolva es de $1,5m$.**

   b) **¿Qué condición crees que debería cumplir el recipiente para que el nivel subiera a velocidad constante? Justifica mediante cálculo en el caso que el recipiente sea un cilindro recto.**

   Solución:



El cálculo de la velocidad $v(t) = \frac{dh}{dt}$
Consideremos que el líquido, en un instante t, ocupa el volumen sombreado. Calculemos ese volumen, que será el volumen ingresado al recipiente en el tiempo t. Hemos considerado $t = 0$ en el instante en que se comienza el llenado($h = 0$).
Tratemos de encontrar ahora la relación entre r y h . (semejanza de triángulos) $\frac{R}{H} = \frac{r}{h} \Longrightarrow r = \frac{Rh}{H}$.
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} pi \frac{R^2 h^2}{H^2} h$ donde evidentemente V y h son funciones de t
Si derivo la expresión con respecto al tiempo, quedará

$$V'(t) = \frac{R^2}{2H^2}\pi 3h(t)^2 h'(t)$$

$v(t) = h'(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{QH^2}{\pi R^2 h^2}$.
Al derivar la velocidad $v' = -\frac{QH^2}{\pi R^2} \cdot \frac{2}{h(t)^3}$ lo que confirma que $v(t)$ (velocidad de la altura del líquido) es una función de decreciente (Cuánto mas se llena el tolva, mas lento sube el nivel de la altura.
Como $Q = \frac{dV}{dt} = 0,5m^3/min$.Para los valores dados $v = \frac{0{,}5(3)^2}{\pi 2^2 1{,}5^2} = 16cm/min$
b)El recipiente debería tener sección horizontal constante$r = R$ cte. En el caso de cilindro circular tendremos:$V = \pi.R^2.h$ con R constante.
Derivando respecto de (t): $\frac{dV}{dt} = \pi.R^2 \frac{dh}{dt}$
Finalmente: $\frac{dh}{dt} = \frac{Q}{\pi R^2} \Longrightarrow v$ constante.