Ejercicios resueltos

Representación de funciones

by S3r4

BACH CCNN

Guión para dibujar estudiar la gráfica de una función

1. Hallar el dominio de la función.
2. Calcular los puntos de corte de la función con los ejes OX y OY.
3. Simetrías y signos de la función.(Opcional)
4. Calcular las asíntotas de la función.
   a) Asíntotas Horizontales
   b) Asíntotas Verticales
   c) Asíntotas Oblícuas
5. Estudiar la monotonía de la función y hallar sus extremos relativos.
   a) Hallar la primera derivada f'
   b) Igualar a 0 para hallar puntos críticos(máximos y mínimos)..
   c) Estudio de los signos de la f' para saber las zonas de crecimientos y decrecimiento o bien aplicar criterio de segunda derivada.
6. Estudiar la curvatura de la función y hallar sus puntos de inflexión.
   a) Estudio de la primera derivada f''
   b) Igualar a 0 para hallar posibles puntos de inflexión.
   c) Estudio de los signos de la f'' para saber las zonas de concavidad y convexidad.
7. Representar en la gráfica los puntos de corte, las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión, y luego trazar la función.

Representar $f(x) = x^2 - x^4$

1. Dominio: R, es continua y derivable en R
2. Puntos de corte con los ejes
   a) Con el eje de las ordenadas, OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0$, $(0,0)$
   b) Con el eje de las ordenadas, OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2\left(1 - x^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0,\ 0) \\ x = \pm 1 & (1,0)\,,\ (-1,\ 0) \end{cases}$
3. Simetrías: $\begin{cases} f(-x) = (-x)^2 - (-x)^4 = x^2 - x^4 \\ f(x) = x^2 - x^4 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = f(x) \ \Rightarrow$ f es una función par y por lo tanto es simétrica respecto del eje OY.
4. Asíntotas**:** No tiene por ser una función polinómica.
5. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:
   a) Calculo de la derivada $f'(x) = 2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{1/2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}/2 \end{cases}$

Dominio		$-\sqrt{2}/2$		0		$-\sqrt{2}/2$	
f	creciente		decreciente		creciente		creciente
f'	+	0		0		0	+
		max		min		max	

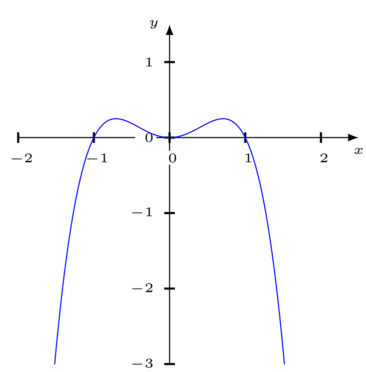
Mínimo relativo en el punto $(0,0)$, y máximos relativos en los puntos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$

6. Concav., convex., puntos de inflexión: $f'' = 2 - 12x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

   Puntos de inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$

Dom		$\frac{-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{-\sqrt{6}}{6}$		**0**		$\frac{\sqrt{6}}{6}$		$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	
		máx				**MíN**				**MÁX**	
	convexa			**Inflex**	**cóncava**			**Inflexión**	**convexa**		
f	↗		↘				↗				↘
f'	+	**0**	**-**			**0**	+			**0**	**-**
f''	**-**	**-**	**-**	**0**	+	+	+	**0**	**-**	**-**	**-**

   a) Dibujo



Represntar $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

1. Dominio: $R-0$
2. Puntos de corte con los ejes: no tiene.
3. Simetrías: $f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-x}=\frac{x^2+1}{-x}=-\frac{x^2+1}{x}=-f(x)\Rightarrow$ f es impar y por lo tanto es simétrica respecto al origen de coordenadas.
4. Asíntotas
   a) Asíntotas verticales:$x=0$
   b) Asíntotas Horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x}=\pm\infty$. No tiene
   c) Asíntotas oblicuas: $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\frac{x^2+1}{x^2}=1; n=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x}-x=0$ =>Asíntota oblicua $y=x$
5. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y^{'}=\frac{x^2-1}{x^2}=0\Rightarrow x^2-1=0\ \Rightarrow x=\pm1$

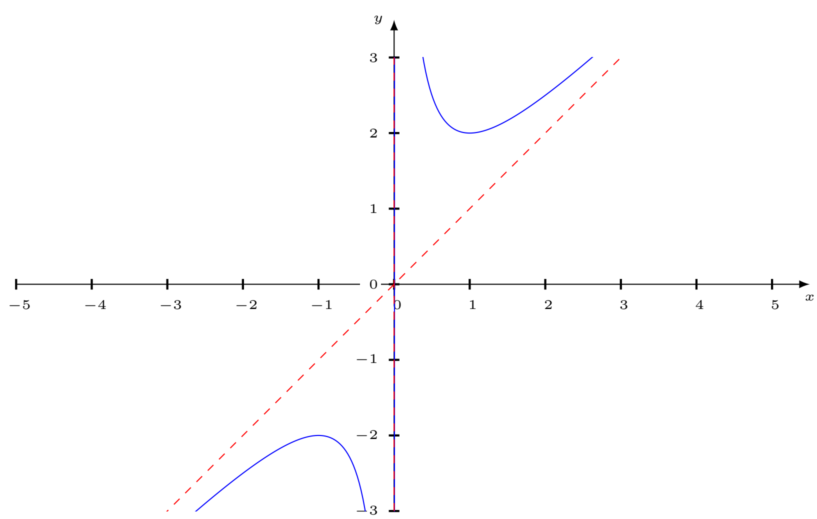
Dominio	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1,\infty)$
f	crece		decrece	NO DEF	decrece		crece
f'	+	0	-	NO DEF	-	0	+
		max				Min	

   Tiene un máximo en el punto: $(-1,2)$ y un mínimo en $(1,2)$

6. Concavidad, convexidad, puntos de inflexión:
   a) $f^{''}=\frac{2}{x^3}\neq0\ \Rightarrow$ no tiene puntos de inflexión

Dominio	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1,\infty)$
f	creciente		decreciente	NO DEF	decreciente		creciente
f'	+	0	-	NO DEF	-	0	+
f"	-			NO DEF	+		
	convexa			NO DEF	cóncava		

7. Gráfica:



Representar $f(x) = \frac{-x}{x^2-4}$

1. Dominio: R $- \{\pm 2\}$

2. Puntos de corte con los ejes:

   a) Con el eje de las ordenadas, OY: Si $x = 0$ entonces $y = 0$, luego pasa por $A(0,0)$

   b) Con el eje de abscisas, OX :
   Si $y = 0$ entonces $\frac{-2x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, Vemos que da el punto (0, 0) de nuevo, esto quiere decir que la gráfica de f(x) corta a los ejes solamente en el origen de coordenadas.

3. Simetrías: $f(-x) = \frac{x}{(-x)^2-4} = \frac{x}{x^2-4} = -f(x) \Rightarrow$ impar, simétrica respecto del origen

4. Asíntotas

   a) Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{-x}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{-x}{x^2-4} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = -2$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-x}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-x}{x^2-4} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2$

   b) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{-x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow y = 0$

   c) Asíntotas oblicuas: No tiene

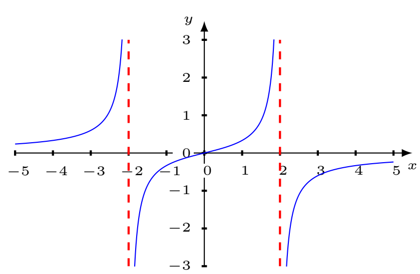
5. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y' = \frac{x^2+4}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \ \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \notin R$. No tiene

Dominio	$(-\infty,-2)$	-2	(-2,2)	2	$(2,\infty)$
f	decreciente	No def	decreciente	No def	decreciente
f'	-	No def	-	No def	-
		No def		No def	

6. Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f'' = -\dfrac{2x\cdot\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2+12) = 0 \Rightarrow x = 0; x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-12} \notin R$

Dominio	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
f	decreciente	No def	decreciente			No def	decreciente
f'	-	No def	-			No def	-
	-	No def	+	0	-	No def	+
	convexa		conc	inflexión	conv		cóncava

7. Gráfica:



Representar $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1. Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

2. Puntos de corte con los ejes:

   a) Con el eje de las ordenadas, OY: Si $x = 0$ entonces $y = \sqrt{-1}$, luego No hay corte en eje Y

   b) Con el eje de abscisas, OX :
   Si $y = 0$ entonces $\sqrt{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = +1, x = -1, \Rightarrow (-1\ ,\ 0)\ ,\ (1\ ,\ 0)$

3. El signo es siempre positivo.Simetrías: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = f(x)$, es simétrica respecto del eje OY.

4. Asíntotas

   a) Asíntotas verticales: No tiene

   b) Asíntotas horizontales: No tiene

   c) Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

      1) $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1\ ,\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right) = 0 \Rightarrow y = xm = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{-x} =$

      2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) = -1\ ,\ n = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right) = 0 \Rightarrow y = -x$

5. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $f' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \text{Dom } f$.

Dominio	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
f	decreciente	No def	creciente
f'	-	No def	+

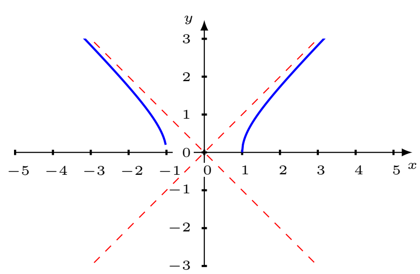
   En el intervalo $(-\infty, -1)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente ;En el intervalo $(1\ ,\ +\infty)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente

6. Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \neq 0$,

Dominio	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
f	decreciente	No def	creciente
f''	-	No def	-
	$\frown$		$\frown$

   la derivada segunda es negativa en todo su dominio$\Rightarrow$ es siempre convexa

7. Gráfica:



Representar $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$
Solución

1. Estudio de $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

   a) Dominio de f :Como f es una función racional, pertenecen al dominio son todos los números reales menos los que anulan al denominador, es decir: $D = R - \{+1, -1\}$

2. Puntos de corte

   a) Con el eje de las ordenadas, OY: Si $x = 0$ entonces $y = 0$, luego pasa por $A(0, 0)$

   b) Con el eje de abscisas, OX :

      1) Si $y = 0$ entonces $\frac{2x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, Vemos que da el punto (0, 0) de nuevo, esto quiere decir que la gráfica de f(x) corta a los ejes solamente en el origen de coordenadas.

3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

   a) Para estudiar el signo de f se señalan en la recta los puntos donde no hay función (es decir los q no pertenecen al dominio) y los puntos donde la función es 0, esto nos da los puntos {-1,0,1} es decir la recta queda dividida en 4 regiones $(-\infty, -1)(-1, 0)(0, 1)(1, +\infty)$ donde puede cambiar el signo, basta tomar un punto en cada una de ellas para saber el signo de toda la región

Dominio	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
f		-	$\nexists$	$+$		$-$	$\nexists$	$+$	

   b) Simetrías $f(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2-1} = -f(x)$Hay simetría impar

4. Asíntotas

   a) Horizontales

      1) $\lim\limits_{x->+\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$ Hay Asíntotas horizontal

      2) $\lim\limits_{x->-\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$ Hay Asíntotas horizontal

   b) Verticales

      1) $\lim\limits_{x->-1^-} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$; $\lim\limits_{x->-1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$ Asíntota vertical en $x = -1$

      2) $\lim\limits_{x->1^-} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x->-1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$.Asíntota vertical en $x = +1$

   c) Oblicuas:No existen al haber Horizontales.

5. Monotonía

   a) Calculo de la derivada $f'(x) = \frac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2}$

   b) $f'(x) = 0 \Rightarrow -2-2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -2$ =>No existe solución$\Rightarrow$No hay puntos singulares.Ni máximos, ni mínimos

   c) Estudio de signos de f'

Dominio	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
f		decrece		decrece		decrece		decrece	
f’		$-$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$	

6. Estudio de la concavidad y convexidad

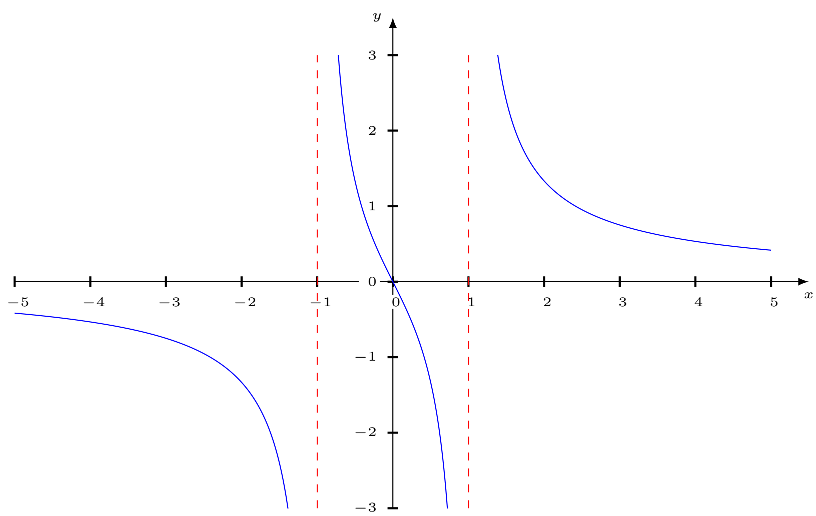
   a) $f''(x) = \dfrac{4x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$

   b) $f''(x) = 0 => x = 0;$

Dominio	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
f		decrece		decrece		decrece		decrece	
f'		$-$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$	
f''		-		+	0	-		+	
		$\frown$		$\smile$	inflexión	$\frown$		$\smile$	

Como en el 0 cambia la concavidad f tiene (en $x = 0$) un puntode inflexión (0,0)

7. Dibujo



Represetar $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Solución

1. Dominio: La función es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que el denominador no se anula nunca.

2. Puntos de corte

   a) Con el eje de las ordenadas, OY: Si $x = 0$ entonces $y = 0$, luego pasa por $A(0,0)$

   b) Con el eje de abscisas, OX :

      1) Si $y = 0$ entonces $\frac{x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0$, Vemos que da el punto $(0,0)$ de nuevo, esto quiere decir que la gráfica de f(x) corta a los ejes solamente en el origen de coordenadas.

3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

   a) Para estudiar el signo de f se señalan en la recta los puntos donde no hay función (es decir los que no pertenecen al dominio) y los puntos donde la función es 0, esto nos da solo el punto 0 es decir la recta queda dividida en 2 regiones $(-\infty, 0)(0, +\infty)$ donde puede cambiar el signo, basta tomar un punto en cada una de ellas para saber el signo de toda la región

Dominio	$-\infty$			0		$+\infty$
f		$-$			$+$	

   $f(-1) = \frac{-1}{2} < 0$ y $f(1) = \frac{1}{2} > 0$,

4. Asíntotas

   a) Horizontales

      1) $\lim\limits_{x->+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ Hay Asíntota horizontal;

      2) $\lim\limits_{x->-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ Hay Asíntota horizontal

   b) No hay verticales La función es continua en todo $\mathbb{R}$

   c) Oblicuas:No existen al haber Horizontales.

5. Monotonía

   a) Calculo de la derivada $f'(x) = -\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

   b) $f'(x) = -\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -1$

   c) Estudio de signos de f'

	$-\infty$		$\overset{-1}{mínimo}$		$\overset{1}{máximo}$		$+\infty$
f		$\searrow$ *decreciente*		$\nearrow$ *creciente*		$\searrow$ *decreciente*	
f'		-	0	+	0	-	

   La función tiene un mínimo relativo en $(-1, -\frac{1}{2})$ y un máximo relativo en $(1, \frac{1}{2})$

   La función decrece en el $(-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$ y crece en el intervalo $(-1, 1)$

6. Estudio de la concavidad y convexidad

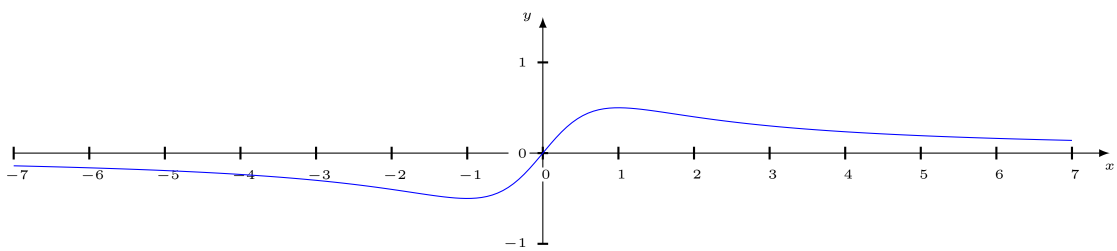
a) $f''(x) = \dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$

b) $f''(x) = 0 => x = 0; x = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}$

Dominio	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		0		1		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
f		decrece				decrece				decrece		decrece	
f'		$-$	-	-	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f''		$-$	0	$+$			0	-			0	$+$	
	$\frown$		inflexión	$\smile$			inflexión	$\frown$			inflexión	$\smile$	

Como en el 0 ,$\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$cambia la concavidad f tiene 3 puntos de inflexión. B($\sqrt{3}$, 0,43);C($-\sqrt{3}$, -0,43); $D(0,0)$

7. Dibujo



Representar $f(x)) = \frac{Lnx}{x}$
Solución

1. Estudio de $f(x)\frac{Lnx}{x}$
   a) Dominio de f :$D = R^{+} = (0, +\infty)$
2. Puntos de corte
   a) Con el eje de las ordenadas, OY: No existe valor para $x = 0$
   b) Con el eje de abscisas, OX :
      1) Si $y = 0$ entonces $\frac{Lx}{x} = 0 \Rightarrow Lx = 0 \Rightarrow x = 1$, Vemos que da el punto (1, 0) .
3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)
   a) Para estudiar el signo de f se señalan en la recta los puntos donde no hay función (es decir los q no pertenecen al dominio) y los puntos donde la función es 0, esto nos da e punto $\{1\}$ es decir la recta queda dividida en 2 regiones $(0, 1)(1, +\infty)$ donde puede cambiar el signo, basta tomar un punto en cada una de ellas para saber el signo de toda la región

Dominio	0		+1		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

   b) Simetrías:No existen
4. Asíntotas
   a) Horizontales
      1) $\lim\limits_{x->+\infty} \frac{Lx}{x} = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{1}{x}$=0 Hay Asíntotas horizontal
   b) Verticales
      1) $\lim\limits_{x->0^{+}} \frac{Lnx}{x} = \frac{-\infty}{0^{+}} = -\infty$;Asíntota vertical en $x = 0$
   c) Oblicuas:No existen al haber Horizontales.
5. Monotonía
   a) Calculo de la derivada $f'(x) = \frac{1-Lx}{x^2}$
   b) $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - Lx = 0 => x = e$
   c) Estudio de signos de f'

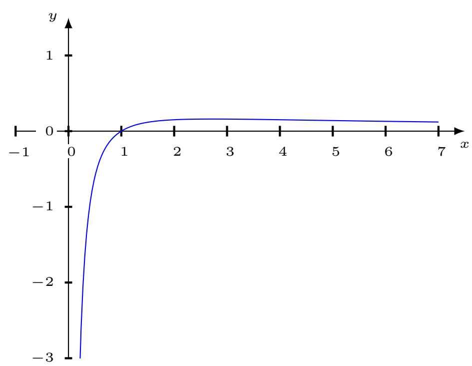
Dominio	0		e		$+\infty$
f		crece		decrece	
f’		$+$	0	$-$	

   En $x = e$ hay un máximo $(e, \frac{1}{e})$
6. Estudio de la concavidad y convexidad
   a) $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 3}{x^3}$
   b) $f''(x) = 0 => x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$;

Dominio	0		e		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f		decrece				decrece	
f'	$-$	$-$	0			$-$	
f''			$-$		0	$+$	
			$\frown$			$\smile$	

Como en el 0 cambia la concavidad f tiene (en $x = e^{\frac{3}{2}}$) un puntode inflexión $(e^{\frac{2}{3}}, 0{,}33)$

7. Dibujo



Representar $f(x)) = e^{\frac{1}{x}}$
Solución

1. Estudio de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

   a) Dominio de f :$D = R - \{0\}$

2. Puntos de corte

   a) Con el eje de las ordenadas, OY: No existe valor para $x = 0$

   b) Con el eje de abscisas, OX :

      1) Si $y = 0$ entonces $e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow$La exponencial nunca se anula.

3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

   a) $f(x)$ es siempre positiva

   b) Simetrías:No existen

4. Asíntotas

   a) Horizontales

      1) $\lim\limits_{x->+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ Hay Asíntotas horizontal $y = 1$

      2) $\lim\limits_{x->-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ Hay Asíntotas horizontal $y = 1$

   b) Verticales

      1) $\lim\limits_{x->0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty$;Asíntota vertical en $x = 0^+$

      2) $\lim\limits_{x->0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$;No hay Asíntota vertical en $x = 0^-$

   c) Oblicuas:No existen al haber Horizontales.

5. Monotonía

   a) Calculo de la derivada $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

   b) $f'(x) = 0 \Rightarrow e^{1/x} = 0$ =>nunca se anula=>No hay puntos críticos

   c) Estudio de signos de f'

Dominio	$-\infty$		0		$+\infty$
f		decrece		decrece	
f'		$-$	$\nexists$	$-$	

   Siempre decrece

6. Estudio de la concavidad y convexidad

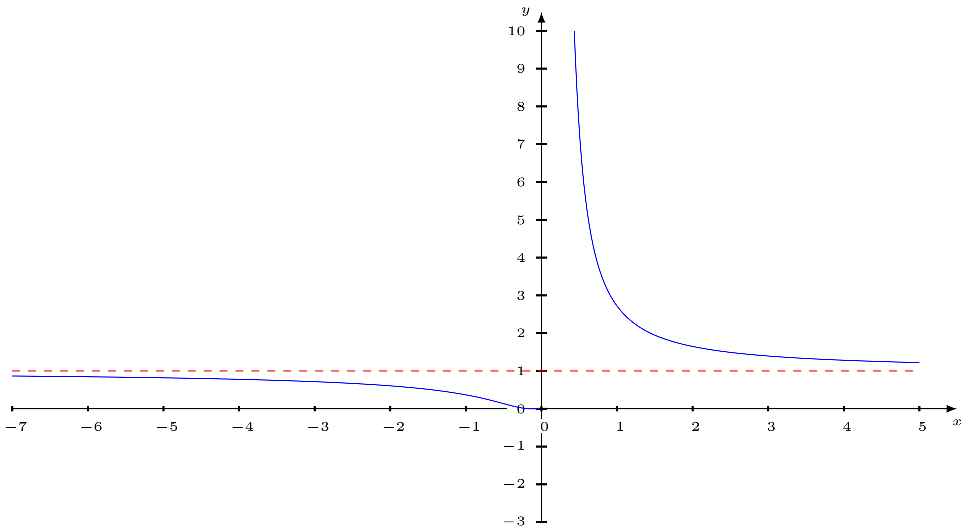
   a) $f''(x) = \dfrac{(2x+1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^4}$

   b) $f''(x) = 0 => x = -\frac{1}{2}$;

Dominio	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
f		decrece			$\nexists$	decrece	
f’	$-$	$-$			$\nexists$	$-$	
f''		$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	
	$\frown$			$\smile$		$\smile$	

Como en el -1/2 cambia la concavidad f tiene un puntode inflexión $(-1/2, f(-1/2)) = (-1/2, 0{,}135335)$

7. Dibujo



Representar $f(x)) = xe^{-x}$
Solución

1. Estudio de $f(x) = xe^{-x}$

   a) Dominio de f :$D = R$

2. Puntos de corte

   a) Con el eje de las ordenadas, OY: para $x = 0$ $f(0) = 0 => (0,0)$
   b) Con el eje de abscisas, OX :
      1) Si $y = 0$ entonces $xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$ Vemos que da el punto $(0,0)$ de nuevo, esto quiere decir que la gráfica de f(x) corta a los ejes solamente en el origen de coordenadas.

3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

Dominio	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

   a) Simetrías:No existen

4. Asíntotas

   a) Horizontales
      1) $\lim\limits_{x->+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{x}{e^x} = (L'H\hat{o}pital) = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ Hay Asíntotas horizontal $y = 0$
      2) $\lim\limits_{x->-\infty} xe^{-x} = +\infty$ No Hay Asíntotas horizontal

   b) Verticales :No hay
   c) Oblicuas:No existen

5. Monotonía

   a) Calculo de la derivada $f'(x) = -(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$
   b) $f'(x) = 0 \Rightarrow -(x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 => x = 1$
   c) Estudio de signos de f'

Dominio	$-\infty$		1		$+\infty$
f		crece		decrece	
f’		$+$	0	$-$	

   en $A(1, e^{-1})$. Hay un máximo

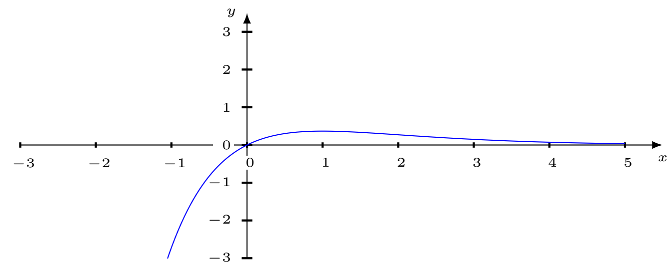
6. Estudio de la concavidad y convexidad

   a) $f''(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$
   b) $f''(x) = 0 => x = 2$;

Dominio	$-\infty$	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$	$+\infty$	
f''		$-$	0	$+$		s
		$\frown$		$\smile$		

Como en el 2 cambia la concavidad f tiene un puntode inflexión $(2, f(2)) = (-1/2, 0{,}270671)$

7. Dibujo



Representar $f(x)) = e^{1-x^2}$
Solución

1. Estudio de $f(x) = e^{1-x^2}$
   a) Dominio de f :$D = R$
2. Puntos de corte
   a) Con el eje de las ordenadas, OY: para $x = 0$ $f(0) = 0 => (0, e)$
   b) Con el eje de abscisas, OX :
      1) Si $y = 0$ entonces $e^{1-x^2} = 0 \Rightarrow$No existe soluciónNo hay corte con eje OX
3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

Dominio	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$+$	0	$+$	

La gráfica siempre es positiva

   a) Simetrías:$f(-x) = f(x)$.Es simétrica par.
4. Asíntotas
   a) Horizontales
      1) $\lim\limits_{x->+\infty} e^{1-x^2} = e^{-\infty} = 0$ Hay Asíntotas horizontal $y = 0$
      2) $\lim\limits_{x->-\infty} e^{1-x^2} = e^{-\infty} = 0$ Hay Asíntotas horizontal
   b) Verticales :No hay
   c) Oblicuas:No existen
5. Monotonía
   a) Calculo de la derivada $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{1-x^2}$
   b) $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x\mathrm{e}^{1-x^2} = 0 => x = 0$
   c) Estudio de signos de f'

Dominio	$-\infty$		0		$+\infty$
f		crece		decrece	
f'		$+$	0	$-$	

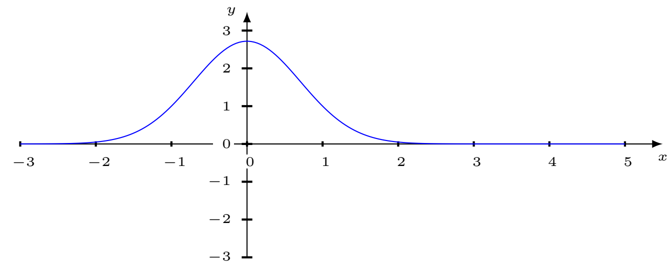
en $A(0, e)$. Hay un máximo

6. Estudio de la concavidad y convexidad
   a) $f''(x) = 2\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{1-x^2}$
   b) $f''(x) = 0 => x = +\frac{1}{\sqrt{2}}; x = -\frac{1}{\sqrt{2}};$

Dominio		$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$
		$\smile$		$\frown$		$\smile$

Cambia la concavidad f en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, f(-\frac{1}{\sqrt{2}}));(\frac{1}{\sqrt{2}}, f(\frac{1}{\sqrt{2}}));$

7. Dibujo



Junio 2005-Representar $f(x)) = e^x + lnx$
Solución

1. Estudio de $f(x) = e^x + lnx$

   a) Dominio de f :$D = (0, +\infty)$

2. Puntos de corte

   a) Con el eje de las ordenadas, OY: $x = 0$ no está en el dominio.

   b) Seguro hay un valor de x donde $f(x) = 0$(ver apartado 4).La función pasa de $-\infty$ a $+\infty$ de forma continua=>por Bolzano existe un $c\ tal\ que\ f(c) = 0$

3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

Dominio	$-\infty$				$+\infty$
f		+		+	

   La gráfica siempre es positiva

   a) Simetrías:No hay

4. Asíntotas

   a) Horizontales

      1) $\lim\limits_{x->+\infty} e^x + lnx = +\infty$ No hay

   b) Verticales : $\lim\limits_{x->0^+} e^x + lnx = -\infty$

   c) Oblicuas: $y = mx + n$ No existen
   $m = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{e^x+lnx}{x} = (LH\hat{o}pital) = +\infty$

5. Monotonía

   a) Calculo de la derivada $f'(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$

   b) No hay raices de $f' = 0$

   c) Estudio de signos de f'

Dominio	0	$(0, +\infty)$	$+\infty$
f		crece	
f'		+	

   Siempre creciente

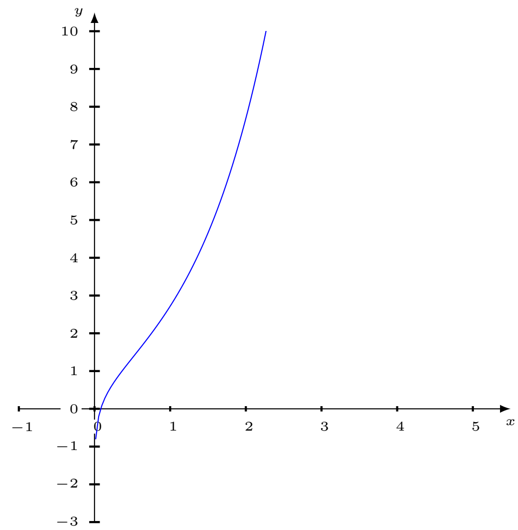
6. Estudio de la concavidad y convexidad

   a) $f''(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^2}$

   b) Veamos que en el intervalo $[1/2, 1]$ se anula $f\acute{}\acute{}(x)$, para eso aplicamos Bolzano a la función $f\acute{}\acute{}(x)$:

      1) $f\acute{}\acute{}(x)$ es continua en $[1/2, 1]$, ya que 0 no pertenece a este intervalo $f\acute{}\acute{}(1/2) < 0$; $f\acute{}\acute{}(1) > 0$ Luego al cumplir Bolzano existe un punto $c \in (1/2, 1)$ tal que $f\acute{}\acute{}(c) = 0$.

7. Dibujo



Junio 2005-Representar $f(x)) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$
Solución

1. Estudio de $f(x)) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$
   a) Dominio de f :$D = R - \{+1\}$
2. Puntos de corte
   a) Con el eje de las ordenadas, OY: $x = 0 => (0, 0)$.
   b) $f(x) = 0 => x^3 = 0 => x = 0$
3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

Dominio	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

   La gráfica es positiva en $(0, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, 0)$

   a) Simetrías:No hay
4. Asíntotas
   a) Horizontales
      1) $\lim_{x->+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$ No hay
      2) $\lim_{x->-\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty$ No hay

   b) Verticales :
      1) $\lim_{x->1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$
      2) $\lim_{x->1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$

   c) Oblicuas: $y = mx + n$
      1) $m = \lim_{x->+\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x->+\infty} \frac{x^3}{x^3-2x^2+x} = 1; n = \lim_{x->+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} - 1 \cdot x = \lim_{x->+\infty} \frac{x^3-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1} = 2$. La asíntota oblicua es $y = x + 2$ en $+\infty$
      2) $m = \lim_{x->-\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x->+\infty} \frac{x^3}{x^3-2x^2+x} = 1; n = \lim_{x->-\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} - 1 \cdot x = \lim_{x->-\infty} \frac{x^3-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1} = 2$.La asíntota oblicua es $y = x + 2$ en $-\infty$
5. Monotonía
   a) Calculo de la derivada $f'(x) = \dfrac{(x-3)\,x^2}{(x-1)^3}$
   b) Raices de $f' = 0 => x = 0; x = 3$
   c) Estudio de signos de f'

Dominio	$(-\infty$,0)	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f							
f'	$+$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Hay un mínimo en $x = 3 \Rightarrow (3, 6{,}75)$

6. Estudio de la concavidad y convexidad

   a) $f''(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^3} - \dfrac{3\,(x-3)\,x^2}{(x-1)^4} + \dfrac{2\,(x-3)\,x}{(x-1)^3} = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$

   b) $f''(x) = 0 => x = 0$

Dominio	$(-\infty{,}0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
f							
f’	$+$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f''	-	0	$+$		$+$	$+$	$+$
	$\frown$		$\smile$	$\nexists$	$\smile$		

7. Dibujo