Análisis Matemático

Ejercicios resueltos

Evau 2021

by S3r4

1. **(Modelo)**Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & si \quad x \neq -1; x \leq 1 \\ \frac{ln\ x}{x-1} & si \qquad x > 1 \end{cases}$$

   a) (0.5 puntos) Estudia la continuidad de la función
   b) (1 punto) Halla las asíntotas de f.
   c) (1 punto) Determina el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. Escribe la ecuación de dicha recta tangente.

Solución

a) Esta función es discontinua en $x = -1$ ya que no está definida en -1. Para estudiar la continuidad, estudiamos los límites laterales en los puntos conflictivos, en este caso solo en $x = 1$

   Continuidad en $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{lnx}{x-1} = \frac{0}{0} \underset{\Rightarrow}{L'H\hat{o}pital} \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{2} = 1$;$f(1) = 1$ $\Rightarrow f$ es continua en $x = 1 \Rightarrow f$ continua en $R - \{-1\}$.

b) Asíntotas

   1) Horizontales
   Tiene asíntota horizontal ($y = 0$) cuando $x- > -\infty$ ya que $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{-\infty}$=0

   Tiene asíntota horizontal ($y = 0$)cuando $x- > \infty$ ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{Lnx}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \underset{\Rightarrow}{L'H\hat{o}pital} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

   2) Verticales
   Tiene asíntota vertical en $x = -1$ ya que $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2}{x+1} = \pm\infty$

   No hay A.Vertical en $x = 1$ ya que hemos visto en a) que $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{lnx}{x-1} = \frac{0}{0} \underset{\Rightarrow}{L'H\hat{o}pital} \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$;

   3) A.Oblicuas: No existen al existir A.Horizontales.

c) $f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(x+1)^2} & si \quad x \neq -1; x \leq 1 \\ -\frac{x\cdot ln\ x - x + 1}{x(x-1)^2} & si \qquad x > 1 \end{cases}$

   Como hay que determinar un valor $x_0 < 1$ usamos $f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = -3; \cancel{x_0 = 1}$.

   Solo vale $x_0 = -3 \Rightarrow f(-3) = \frac{2}{-3+1} = -1$

   La ecuación de la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$=$(-3, -1)$ será

   $y - (-1) = -\frac{1}{2}(x - (-3)) \Rightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$

2. **(Modelo)**Dada la función $f(x) = x^6 - 4x^4$, se pide:

   a) (0.5 puntos) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   b) (1 punto) Encontrar sus máximos y mínimos locales, y determinar si son o no globales.

   c) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje $y = 0$ y la grafica de f.

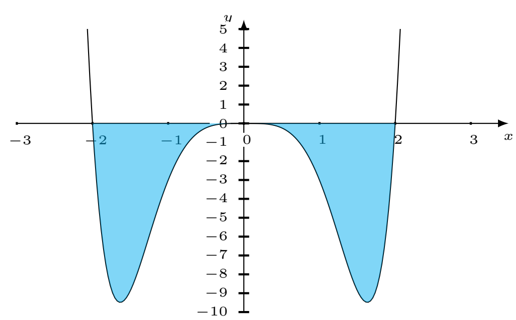
   Solución

   a)Para estudiar la monotonía de la función debemos estudiar los signos de la primera derivada.

   $f'(x) = 6x^5 - 16x^3 = 2x^3(3x^2 - 8); f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

	$-\infty$		$\frac{2\sqrt{6}}{3}$		0 *máximo*		$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ *mínimo*		$+\infty$
f		$\searrow$ *decreciente*		$\nearrow$ *creciente*		$\searrow$ *decreciente*		$\nearrow$ *creciente*	
f'		$-$	0	$+$	0	-	0	+-	

La función presenta un mínimo en $\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$ y un máximo en $x = 0$. Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ no hay máximo absoluto. Si hay mínimos absolutos en $\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$. La función es simétrica par , por tanto vale lo mismo en $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ y en $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$



c)La función $f(x) = x^6 - 4x^4$ corta al eje en $x = +2; x = -2$ y $x = 0$ Como hay simetría par y la función es negativa en [0,2]

$$A = 2|\int_0^2 x^6 - 4x^4 dx| = 2\left|\left[\frac{x^7}{7} - \frac{4x^5}{5}\right]\right| = 2| - \frac{256}{35}| = \frac{512}{35}u^2$$

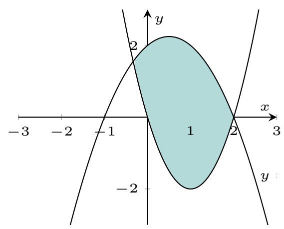
3. **(Ordinaria)** Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2 + x - x^2$, $g(x) = 2x^2 - 4x$.

Solución

a) Debemos calcular los puntos de corte de las dos funciones que determinan el recinto, para ello igualamos las dos funciones

$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2 + x - x2 = 2x2 - 4x \Rightarrow -3x2 + 5x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-1}{3}, x = 2;$



$A = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} (2 + x - x^2) - (2x^2 - 4x)dx =$

$= \int_{-\frac{1}{3}}^{2} (-3x^2 + 5x + 2)dx = \left[-x^3 + 5x^2 + 2\right]_{x=-\frac{1}{3}}^{x=2} = \frac{343}{54} \Rightarrow A = \frac{343}{54}u^2$

4. **(Ordinaria)** Se considera la funcion: $f(x) = \begin{cases} sen\ x & si \quad x < 0 \\ xe^x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

   a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

   b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

   c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$

Solución

a) Para estudiar la continuidad, estudiamos los límites laterales en los puntos conflictivos, en este caso solo en $x = 0$. Es el único punto de estudio ya que *sen x* es continua yderivable $\forall x < 0$ y xe^x lo es $\forall x > 0$

Continuidad en $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} xe^x = 0 \cdot 1 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} sen\ x = 0$;$f(0) = 0 \Rightarrow f$ es continua en $x = 0 \Rightarrow f$ continua en R.

Derivabilidad en $x = 0$;$f'(x) = \begin{cases} cos\ x & si \quad x < 0 \\ e^x + xe^x & si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$f'(0^-) = 1$;$f'(0^+) = \lim\limits_{x->0^+} e^x + xe^x = e^0 + 0e^0 = 1 => f$ es derivable en $x = 0$

b) Monotonía $(-\pi, 2)$:$f'(x) = 0$ en $x = -\frac{\pi}{2}$ en el intervalo $(-\pi, 0)$ y además $e^x(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \notin [0, 2]$

	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		2
f		$\searrow$ *decreciente*		$\nearrow$ *creciente*		$\nearrow$ *creciente*	
f'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	

Como $f(x)$ es continua en $[0, 1]$ y $f(0) = 0$ y $f(1) = e > 2$, entonces por el Teorema del valor intermedio existe al meno un valor x_0 / $f(x_0) = 2$(existencia).Pero este valor es único ya que en el intervalo $[0, 2]$ la función solo crece, es decir si alcanza un valor $f(x_0) = 2$, como la función es creciente no puede volver a valer 2 en otro punto(unicidad) .

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sen\ xdx + \int_{0}^{1} xe^x dx$

$\int xe^x dx$ a realizar con la técnica de integración por partes

$u = x; du = dx \ \ ; dv = e^x dx; v = e^x$

Así pues $\int xe^x dx$=$xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} senxdx = [(cos\ x)]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=0} = -1$;$\int_{0}^{1} xedx = [(x-1)e^x]_{x=0}^{x=1} = 1$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = -1 + 1 = 0$$

5. **(Convocatoria Extraordinaria)**(2.5 puntos)

   a) (1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

      1) (0.5 puntos) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-senx}$ ii) (0.75 puntos) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sen\frac{1}{x}}\right)$(Indicación : use el cambio de variable $t=1/x$ donde sea necesario).

   b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

      1) (0.5 puntos) $\int\frac{x}{x^2-1}dx$ ii) (0.75 puntos) $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$(Extraordinaria 2021 Modelo)-Opción A)

Solución

a.i) Confirmamos la existencia de intederminación:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-senx}=\frac{0}{0}$ Aplicamos la regla de L'Hôpital ya que tanto $x^2(1-2x)$ como $x-2x^2-senx$ están bajo las hipótesis del teorema de L'Hôpital (son continuas y derivables en un entorno de $x=0$, entonces

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-senx}\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-6x^2}{1-4x-cosx}=\frac{0}{0}$ Volviendo a aplicar L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-6x^2}{1-4x-cosx}\overset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-12x}{-4+senx}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

a.ii)Aplicamos el cambio de variable sugerido primero y la regla de l´Hôpital después

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sen\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{t\to 0}t\left(3t-\frac{2}{sen\ t}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{3t^2sen\ t-2t}{sen\ t}\right)=\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{3t^2sen\ t-2t}{sen\ t}\right)\overset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{6tsen\ t+3t^2cost-2}{cost}\right)=-2$

b.i)$\int\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}Ln|x^2-1|+C$

b.ii)$\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ Es una integral a realizar con la técnica de integración por partes

$u=x^2; du=2xdx\ \ ; dv=e^{-x}dx; v=-e^{-x}$

Así pues $\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}+\int 2e^{-x}xdx$ .Otra ves por partes

$u=x; du=dx\ \ dv=e^{-x}dx; v=-e^{-x}$

$=-x^2e^x+2(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx)=-x^2e^x-2xe^x-2e^x=-e^{-x}(x^2+2x+2)=F(x)$.Entonces por la regla de Barrow

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx=F(1)-F(0)=2-\frac{5}{e}$$

6. **(Convocatoria Extraordinaria)**Sea la función $f(x) = x^3 - |x| + 2$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución

Para el estudio de la continuidad nos basamos en $f(x)$ *es continua en* $x = a \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

$$f(x) = x3 - |x| + 2 = \begin{cases} x^3 + x + 2 & si\ x < 0 \\ x^3 - x + 2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Calculando los límites laterales en $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} x^3 + x + 2 = 2$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 - x + 2 = 2$; $f(0) = 0$. La función es continua en $x = 0$.

$$f(x)\, es\, derivable\, en\, x = a \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)\ es\ continua\ en\ x = a \\ \lim\limits_{x\to a^-} f\,'(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f\,'(x) \end{cases}$$

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & si\ x < 0 \\ 3x^2 - 1 & si\ x > 0 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f\,'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 3x^2 + 1 = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f\,'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2 - 1 = -1 \Longrightarrow f$es continua pero no es derivable, ya que la derivada no existe $\nexists f'(0)$ al alcanzar valores diferentes en los límites de la derivada por la izq y dcha en $x = 0$.

b)Nos basamos en $\begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow f\ crece \\ f'(x) < 0 \Rightarrow f\ decrece \end{cases}$ Entonces

Si $x < 0$ $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ $\Rightarrow$f creciente;

Si $x > 0$ $f'x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ Nos da como valores criticos $x^2 = \frac{1}{3}; x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.Como $f''(\frac{\sqrt{3}}{3}) > 0 \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$ *mínimo relativo.*

Así pues

	$-\infty$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f		$\nearrow$ *creciente*		$\searrow$ *decreciente*	*mínimo*	$\nearrow$ *creciente*	
f'		$+$	$\nexists$	-	0	$+$	

En $x = 0$ existe un punto de máximo, pero no es derivable , solo es continua.

a) Como en $x = -1$ $f(-1) = 0$ y $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) > 0$; $f(x)$ va por encima del eje de abscisas en $(-1, 1)$, entonces

b) Área$=\displaystyle\int_{-1}^{0} x^3{+}x{+}2dx + \int_{0}^{1} x^3{-}x{+}2dx{=}\frac{x^4}{4}{+}\frac{x^2}{2}{+}2x\,\Big|_{x=-1}^{x=0} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x\,\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3u^2$