Análisis Matemático

Ejercicios resueltos

Evau 2022

BY S3R4

1. **(Modelo)** Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{senx}{x} \; si \; x < 0 \\ \\ xe^{4-x^2} \; si \; x \geq 0 \end{cases}$

   a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

   b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0, \infty)$.

   c) (0.75 puntos) Calcule $\int_0^2 f(x)dx$.

Solución

a) El punto donde debemos estudiar la continuidad es en el punto $x = 0$, en cualquier otro punto la función es continua. Así que estudiamos los límites laterales en $x = 0$ y el valor de $f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} 1 - \frac{senx}{x} = 1 - \frac{0}{0}$,aplicando la Regla de L'Hopital a la expresión $\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{x} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{cosx}{1}$ luego $\lim\limits_{x\to 0^-} 1 - \frac{senx}{x} = 1 - \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{cosx}{1} = 1 - 1 = 0$;

Por otra parte el límite lateral derecho $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{4-x^2} = 0 = f(0)$.

Por tanto, f es continua en 0.

En cuanto a la derivabilidad,

$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{xcosx - senx}{x^2} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0^-} -\frac{\cancel{cosx} - xsenx - \cancel{cosx}}{2x} = 0,$$

aplicando la Regla de L'Hopital;

$f\prime(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1 - 2x^2)e^{4-x^2} = e^4$.

Al ser diferentes las derivadas laterales, f no es derivable en $x = 0$.

Los puntos críticos de f en $(0, \infty)$ verifican

$$0 = f\prime(x) = (1 - 2x^2)e^{4-x^2}$$

, es decir, $x^2 = \frac{1}{2}$. Por ser $x > 0$, el punto crítico es $x = \frac{1}{\sqrt{2}=} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A su izquierda, $f\prime(1/2) = (1/2)e4 - (1/2) > 0$; a su derecha, $f\prime(2) = -7 < 0$.

0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $máximo$	
f	$\nearrow$ $creciente$		$\searrow$ $decreciente$
f'	+	0	-

a) Por tanto, es un maximo relativo.

b) Puesto que $\int xe^{4-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{4-x^2} + C$, aplicando la regla de Barrow obtenemos que

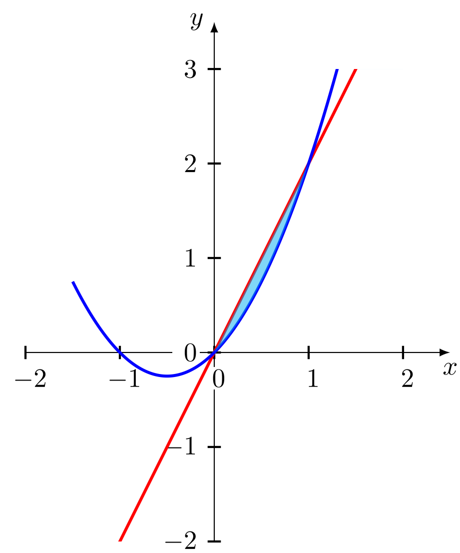
$$\int_0^2 f(x)dx = -\frac{1}{2}(e^{4-4} - e^4) = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

2. **(Modelo)**Sea $f(x) = x + x^2$. Se pide:

   a) (1 punto) Hallar el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y la recta $y = 2x$.

   b) (1.5 puntos) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de f. En el punto $(1, f(1))$ la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en que punto choca con la recta vertical $x = 2$.(Junio 2022)

Solución



a) Calculamos los puntos de corte de las dos gráficas $x + x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ .Luego el área será la integral definida de la resta de las dos funciones $2x$ y $x + x^2$ entre estos dos valores

Área=$\displaystyle\int_0^1 2x - (x + x^2)dx = \int_0^1 x - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

b) La partícula en movimiento en el punto $(1, f(1))$ tendrá una pendiente en la trayectoria rectilínea de $f\prime(x) = 1 + 2x\,|_{x=1}$, de modo que $f'(1) = 3$.

Hay que hallar donde corta la recta tangente con la recta $x = 2$.Por tanto la recta tangente en el punto $(1, f(1)) = (1, 2)$ tiene ecuación $y = 2 + 3(x - 1) = 3x - 1$, por lo que cuando $x = 2$ debe ser $y = 5$.

3. **(Ordinaria)** Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ En $x < 0$ $f'(x) = 1$ nunca vale 0

En $x > 0$ $f'(x) = 0 => Lnx = -1 => x = \frac{1}{e}$

Dominio	$-\infty$		0		$1/e$ $mínimo$		$+\infty$
f		$\nearrow$ $creciente$		$\searrow$ $decreciente$		$\nearrow$ $creciente$	
f'		+	$\nexists$	-	0	+	

La función presenta en $x = \frac{1}{e}$ un mínimo $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$. En $x = 0$ a pesar de no haber derivabilidad hay un máximo relativo.

1. (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

   a) (0.5 puntos) Estudie si $f(x)$ presenta algun tipo de simetría par o impar.

   b) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx$.

Solución

a) Para el estudio de la continuidad nos basamos en $f(x)$ *es continua en* $x = a \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$
Continuidad $f(0) = 0$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0e^{-\infty} = 0$;f es continua en $x = 0$
Derivabilidad $f'(x) = \{\ (3x^2+2)e^{-\frac{1}{x^2}} \quad si\ x \neq 0$. En $x = 0 \Rightarrow f'(0^-) = \lim_{x \to 0^\pm} (3x^2 + 2)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \Rightarrow f$ es derivable en $x = 0$.

b) $f(-x) = (-x)^3 e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = f(-x) = -(x)^3 e^{-\frac{1}{(x)^2}} = -f(x) \Rightarrow f$ es **impar**, simétrica respecto al origen.

c) $\int \frac{f(x)}{x^6} dx = \int \frac{x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} dx = \int \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$. Resolveremos por cambio de variable
$t = -\frac{1}{x^2}; dt = \frac{2}{x^3} dx; dx = x^3 \frac{dt}{2} \Rightarrow \int \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx = \int \frac{e^t}{\cancel{x^3}} \frac{\cancel{x^3} dt}{2} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Luego

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx = \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} \right]_1^2 = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{4}} - e^{-1})$$

2. **(Ordinaria)**Sea $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

   a) (0.5 puntos) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$.

   b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$

   c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$

Solución

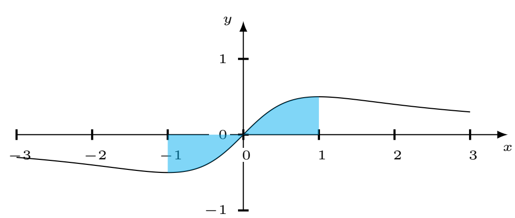
a) La función es continua en todo $\mathbb{R}$ por lo tanto también en el intervalo $[-1, 1]$ ya que el denominador no se anula nunca.
$f(-1) = \frac{-1}{2} < 0$ y $f(1) = \frac{1}{2} > 0$, Por lo tanto cumple las condiciones del teorema de Bolzano $\Rightarrow$que afirma que $\exists c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

b) Para calcular los puntos singulares igualamos la derivada a 0
$f'(x) = -\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -1$

	$-\infty$		$\overset{-1}{mínimo}$		$\overset{1}{máximo}$		$+\infty$
f		$\searrow$ *decreciente*		$\nearrow$ *creciente*		$\searrow$ *decreciente*	
f'		-	0	+	0	-	

La función tiene un mínimo relativo en $(-1, -\frac{1}{2})$ y un máximo relativo en $(1, \frac{1}{2})$
La función decrece en el $(-\infty, -1)\bigcup(1, \infty)$ y crece en el intervalo $(-1, 1)$

c) Veamos el comportamiento en signo de la función f.Igualamos a 0 la función $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 0$
la función es negativa en R^- y positiva para $\mathbb{R}^+$. Ademas es simétrica impar , por lo que el área se puede hallar de la manera siguiente
$$A = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[Ln|x^2+1|\right]_{x=0}^{x=1} = Ln2 - Ln1 = Ln2$$



3. **(Extraordinaria)** Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & si\ x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

   a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.
   b) (0.25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.
   c) (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.
   d) (0.75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuacion de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algun extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

Solución

a) Para el estudio de la continuidad nos basamos en $f(x)$ *es continua en* $x = a \iff \underset{x\to a^-}{lim} f(x) = f(a) = \underset{x\to a^+}{lim} f(x)$

   1) Continuidad $f(0) = 3$; $\underset{x\to 0^-}{lim} \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{0} = -\infty$; $\underset{x\to 0^+}{lim} x^2 - 4x + 3 = 3$; f no es continua en $x = 0$.Hay discontinuidad salto infinito.

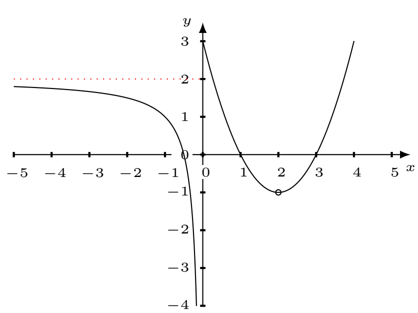
b) No puede ser derivable en $x = 0$ ya que no es continua en $x = 0$

c) En $x = 0$ hay Asíntota vertical (ver apartado a).
En $x > 0$ no hay Asíntota Horizontal ni oblicua ya que está definida por un polinomio.
En $x < 0$ hallamos $\underset{x\to -\infty}{lim} \frac{2x+1}{x} = 2 \Rightarrow$Existe Asíntota horizontal $y = 2$. Al haber horizontal no puede haber oblicua.

d) Para que en $(0, +\infty)$ la tangente se de pendiente nula derivamos e igualamos a 0
$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.La ecuación de la tangente es $y - f(2) = f'(2)(x - 2) =>$ $y - (-1) = 0 => y = -1$

	0		2 *mínimo*		$+\infty$
f		$\searrow$ *decreciente*		$\nearrow$ *creciente*	
f'		-	0	+	

Hay un mínimo relativo en $(2, f(2)) = (2, -1)$



4. **(Extraordinaria)** Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq 0 \\ xLn\, x & si\ x > 0 \end{cases}$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

c) (1 punto) Calcule $\int_1^2 f(x)dx$.

Solución

a) Para el estudio de la continuidad nos basamos en $f(x)$ *es continua en* $x = a \iff \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Continuidad $f(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} xLnx = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{Lnx}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \underset{=}{L'Hopital} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0 \Rightarrow f$ es continua en $x = 0$

1) Derivabilidad $f'(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ Ln\, x\ +1 & si\ x > 0 \end{cases}$;$f'(0^-) = 1$, pero $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} xLx = +\infty$ luego NO es derivable en $x = 0$

b) Para calcular los puntos singulares igualamos la derivada a 0

En $x < 0$ $f'(x) = 1$ nunca vale 0

En $x > 0$ $f'(x) = 0 => Lnx = -1 => x = \frac{1}{e}$

Dominio	$-\infty$		0		$1/e$ *mínimo*		$+\infty$
f		$\nearrow$ *creciente*		$\searrow$ *decreciente*		$\nearrow$ *creciente*	
f'		+	$\nexists$	-	0	+	

La función presenta en $x = \frac{1}{e}$ un mínimo $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$. En $x = 0$ a pesar de no haber derivabilidad hay un máximo relativo.

c) $\int f(x)dx = \int xLxdx$ Se realiza por partes

$u = Lx$; $dv = xdx$

$du = 1/x$ $v = \frac{x^2}{2}$

$F(x) = \int f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}Lx\right] - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}Lx - \frac{x^2}{2} + C$

$\int_1^2 f(x)dx.$=F(2)-F(1)=$2ln2 - \frac{3}{4}$