Álgebra

Ejercicios Selectividad

2000-2023

2º Bach MATII

by S3r4

MATEMATICAS (MATII)

2º Bachillerato

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA

SELECTIVIDAD Y PAU
MADRID 2000-2023

Departamento de Matemáticas

Ies Dionisio Aguado

1. (3 puntos) Sea el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+\lambda y+2z & = & \lambda \\ 2x+\lambda y+z & = & 2 \\ \lambda x-y+2z & = & \lambda \end{array}\right.$$

   (a) (1 punto) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ.

   (b) (1 punto) Resolver el sistema para λ = -1.

   (c) (1 punto) Resolver el sistema para λ = 2. (Modelo 2000 - Opción A)

2. (3 puntos)

   (a) (1 punto) Encontrar los valores de λ para los que la matriz $A=\left(\begin{array}{ccc} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{array}\right)$ es invertible.

   (b) (1 punto) Para λ = 2, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

   (c) (1 punto) Resolver el sistema

$$A\cdot\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

   para λ = 1 5(Modelo 2000 - Opción B)

3. (3 puntos) Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2 × 2.

   (a) (0,5 puntos) Comprobar que se verifica: $Traza(A+B)=Traza(A)+Traza(B)$

   (b) (1 punto) Comprobar que $Traza(A\cdot B)=Traza(B\cdot A)$

   (c) (1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB-BA=I$, donde I denota la matriz identidad.

   (d) d) (0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que: $Traza(AB)\neq Traza(A)\cdot Traza(B)$(Junio 2000 - Opción A)

4. (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & (a-1)(a+2) \\ x+ay+z & = & (a-1)^2(a+2) \\ x+y+az & = & (a-1)^3(a+2) \end{array}\right.$$

   (a) (1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de a.

   (b) (1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para a = 1 y para a = -2.

   (c) (1 punto) Resolverlo para a = -2. (Junio 2000 - Opción B)

5. (3 puntos) Considerar el sistema de ecuaciones

   y+ z =1

   (λ -1)x+ y+ z = λ

   x+ (λ -1)yz = 0

   (a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ.
   (b) (1 punto) Resolverlo para λ = 0.
   (c) (1 punto) Resolverlo para λ = 3. (Septiembre 2000 - Opción A)

6. (3 puntos)

   (a) (2 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+5z & = & 0 \\ 2x-kz & = & 0 \\ x-y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

   (a) (1 punto) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+5z & = & 0 \\ 2x-3z & = & 0 \\ x-y+z & = & 0 \\ x+2y+2\lambda z & = & \lambda \end{array}\right.$$

   (Septiembre 2000 - Opción B)

7. (2 puntos) Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \text{y}$$

$$B=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix} \text{(Modelo 2001 - Opción A)}$$

8. (2 puntos) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) calcular A^{-1}
   (b) Resolver el sistema

$$A\cdot\left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$$

   (Modelo 2001 - Opción A)

9. (3 puntos)

   (a) (1,5 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 3 \\ 2x-y+kz & = & 9 \\ x-y-6z & = & 5 \end{array}\right\}$$

   (b) (1,5 puntos) Si el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es 2 determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\overrightarrow{F1}, \overrightarrow{F2}$ y $\overrightarrow{F3}$, así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\overrightarrow{C}1$, $\overrightarrow{C2}, \overrightarrow{C3}$y $\overrightarrow{C4}$.

10. (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 2 \\ 2x-y+3z & = & 2 \\ 5x-y+az & = & 6 \end{array}\right.$$

   (a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro a.

   (b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones. (Junio 2001 - Opción A)

11. (2 puntos) Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) (1 punto) Calcular A^k .

   (b) (1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^k X = BC$. (Junio 2001 - Opción A)

12. (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real λ.

   (b) (1 punto) Resolverlo para λ = -3.

   (c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 1$. (Junio 2001 - Opción B)

13. (3 puntos) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+4z & = & 1 \\ -x+ay-2z & = & 1 \\ y+z & = & a \end{array}\right.$$

(a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

(b) (1 punto) Resolver el sistema para a = 2.

(c) (1 punto) Resolver el sistema para a = 1. (Septiembre 2001 - Opción A)

14. (3 puntos) Dada la matriz$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

se pide:

(a) (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

(b) (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1} .

(c) (1 punto) Calcular A 100 . (Septiembre 2001 - Opción B)

15. (3 puntos) Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

(a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($det(A) \neq 0$) y expresa A^{-1} en función de A e I.

(b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$

(c) (1 punto) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ cumple la relación de partida, calcular el valor de k. (Modelo 2002 - Opción A)

16. (3 puntos) Sean las matrices

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) (1 punto) CalcularA^{-1} .

(c) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$. (Modelo 2002 - Opción B)

17. (2 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ Para cada número real O definimos la matriz $B = A - OI$, donde I denota la matriz identidad 2 × 2.

(a) (1 punto) Hallar los valores de O que hacen que el determinate de B sea nulo.

(b) (1 punto) Resolver el sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$Para los diferente valores de O. (Modelo 2002 - Opción B)

18. (2 puntos) Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

19. (2 puntos) Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ (Junio 2002 - Opción A)

20. (3 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 2 \\ ax + y + 2z & = & 0 \\ x - y + az & = & 1 \end{array} \right.$$

(a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

(b) (0,5 punto) Resolver el sistema para a = -1.

(c) (1 punto) Resolver el sistema para a = 2. (Junio 2002 - Opción B)

21. (3 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + \lambda z & = & \lambda^2 \\ y - z & = & \lambda \\ x + \lambda y + z & = & \lambda \end{array} \right.$$

(a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.

(b) (1 punto) Resolver el sistema en los caso en que sea posible.

(c) (0,5 puntos) En el caso λ = 2, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema. (Septiembre 2002 - Opción A)

22. (3 puntos) Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n. Se pide:

(a) (1 punto) Expresar A^{-1} en térmninos de A

(b) (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.

(c) (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ (Septiembre 2002 - Opción B)

23. (3 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

(a) (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M . En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I.

(b) (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.

(c) (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que b a verifican la identidad del enunciado. (Modelo 2003 - Opción A)

24. (3 puntos) Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Modelo 2003 - Opción B)

25. (2 puntos) Para cada valor del parámetro real k, se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ 2x-3y & = & 2k \\ 3x-5y & = & k^2 \end{array}\right.$$

Se pide:

(a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k.

(b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible. (Modelo 2003 - Opción B)

26. (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} (m+2)x+(m-1)-z & = & 3 \\ mx-y+z & = & 2 \\ x+my-z & = & 1 \end{array}\right.$$

(a) (1 punto) Resolverlo para m $=1$.

(b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m. (Junio 2003 - Opción A)

27. (2 puntos) Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\left|\begin{array}{ccc} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = (a-b)^3$$ (Junio 2003 - Opción B)

28. (2 puntos) Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \left(\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{array}\right) = B \cdot \left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{array}\right)$$ (Junio 2003 - Opción B)

29. (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+4+3z & = & 9 \\ mx+2+z & = & 5 \\ x+y+z & = & 2 \end{array}\right.$$

(a) (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.

(b) (1,5 puntos) Resolverlo para m $=1$. (Septiembre 2003 - Opción A)

30. (2 puntos) Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

(a) (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.

(b) (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias. (Septiembre 2003 - Opción B)

31. (2 puntos)

    (a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B = AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula: $(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$ (Donde I denota la matriz identidad).

    (b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, hallar la matriz B para la cual se verifica $A+B = AB$. (Septiembre 2003 - Opción B)

32. (3 puntos) Discutir según los valores del parámetro λ, y resolver en los casos que sea posible el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x + 4y + 2\lambda z & = & 2 \\ \lambda x + y - z & = & 2 \\ 5x + 3y + 3z & = & 2\lambda \end{array}\right.$$

(Modelo 2004 - Opción A)

33. (3 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y - az & = & 4 \\ x + ay + z & = & 2 \\ x + 4y - 5z & = & 6\lambda \end{array}\right.$$

Se pide:

    (a) (2 punto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

    (b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones. (Modelo 2004 - Opción B)

34. (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} (1-a)x - 2y + 4z & = & 0 \\ x - (1+a)y + z & = & 0 \\ -x + ay - z & = & 0 \end{array}\right.$$

    (a) (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.

    (b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado. (Junio 2004 - Opción A)

35. (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

    (a) (1 punto) Hallar A^{-1} .

(b) (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A). (Junio 2004 - Opción B)

36. (2 puntos)

(a) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 1 \\ 3x - y & = & 2 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

(b) (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y - z & = & 1 \\ x + y + 2z & = & 1 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.(1 punto) (Junio 2004 - Opción B)

37. (2 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.

(b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$. (Septiembre 2004 - Opción A)

38. (2 puntos)

(a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; , ¿cuál es el valor del determinante de A?

(b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 2004 - Opción A)

39. (3 puntos)

(a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda x + 3y + z & = & \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z & = & 1 \\ x + y - z & = & 1 \end{array} \right.$$

(a) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$ (Septiembre 2004 - Opción B)

40. (3 puntos)

(a) (2 punto) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda x+2y+\lambda z & = & 1 \\ x+\lambda yz & = & 1 \\ 4x+3y+z & = & 2\lambda \end{array}\right.$$

(a) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible. (Modelo 2005 - Opción A)

41. (2 puntos) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{\begin{array}{rcr} -ax+4y+az & = & -a \\ 4x+ay-az & = & a \\ -x-y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

(a) (1 punto) Discutir el sistema

(b) (1 punto) Resolver el sistema para a = 1. (Modelo 2005 - Opción B)

42. (2 puntos) Sea la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) (1 punto) Comprobar que $A^3-2A^2=0$

(b) (1 punto) Hallar A^n. (Modelo 2005 - Opción B)

43. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcc} (m-1)x+y+z & = & 3 \\ mx+(m-1)y+3z & = & 2m-1 \\ x+2+(m-2)z & = & 4 \end{array}\right.$$

(a) (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m.

(b) (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado. (Junio 2005 - Opción A)

44. (2 puntos)

(a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 1 \\ 2x+yz & = & 2 \end{array}\right.$$

(b) (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: 5x + y + αz = β, el sistema resultante sea compatible indeterminado. (Junio 2005 - Opción B)

45. (2 puntos) Hallar una matriz X tal que: $A^{-1}XA=B$ siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$;$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(Junio 2005 - Opción B)

46. (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

(b) (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

(c) (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X) = A^2 - X^2$. (Septiembre 2005 - Opción A)

47. (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{(1 punto)}$$

(a) Hallar A^{10} .

(b) (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B.

(c) (1 punto) En el caso particular de k = 0, hallar B^{10} . (Septiembre 2005 - Opción B)

48. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x + 3yz & = & k \\ x + 2y + 3z & = & 2 \\ kx + ky4z & = & -1 \end{array} \right.$$

(a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

(b) (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado. (Modelo 2006 - Opción A)

49. (3 puntos) Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) (1,5 punto) Hallar$(A - I)^2$.

(b) (1,5 punto) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior. (Modelo 2006 - Opción B)

50. (2 puntos) Dado el sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + ky - z & = & 0 \\ kx - y + z & = & 0 \\ (k+1)x + y & = & 0 \end{array} \right.$$

(a) Averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de x = y = z = 0. Resolverlo en tales casos. (Junio 2006 - Opción A)

51. (2 puntos) Dada la matriz $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AP = PA$. (Junio 2006 - Opción A)

52. (3 puntos) Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

(b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcular dicha matriz inversa para a = 2. (Junio 2006 - Opción B)

53. (3 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) (1 punto) Comprobar que $|A^2| = |A|^2$, y que $|A + I| = |A| + |I|$

(b) (0,5 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $|M^2| = |M|^2$?. Razonar la respuesta.

(c) (1,5 puntos) Encontrar todas las matrices cuadradas M , de orden 2, tales que: $|M + I| = |M| + |I|$ (Septiembre 2006 - Opción A)

54. (2 puntos)

(a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:
x+ y3z = 0
2x+ 3yz = 5

(b) (1 punto) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4. (Septiembre 2006 - Opción B)

55. (2 puntos)

(a) (1 punto) Hallar todas las matrices $A = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ distintas de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tales que $A^2 = A$

(b) (1 punto) Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado 1.), calcular $M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10}$ (Septiembre 2006 - Opción B)

56. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky + k^2z &= 1 \\ x + ky - kz &= k^2 \\ -x + ky - k^2z &= k^2 \end{cases}$$

(a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

(b) (1 punto) Resolverlo para k = -1. (Modelo 2007 - Opción A)

57. (3 puntos) Dada la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

(b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M . Calcular dicha inversa para λ = 0. (Modelo 2007 - Opción B)

58. (2 puntos) Estudiar el rango de la matriz $M = \begin{bmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{bmatrix}$ según los valores del parámetro m. (Junio 2007 - Opción A)

59. (2 puntos) Sean las matrices$A = \begin{bmatrix} 2 & -0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;$B = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

(a) Hallar una matriz X tal que$XAX^{-1} = B$(Junio 2007 - Opción A)

60. (3 puntos) Dadas las matrices

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;$B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Se pide:

(a) (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique AB = BA.

(b) (1,5 puntos) Para a = b = c = 1, calcular B 10 .

61. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$\left\{ \begin{array}{rcl} x + (k+1)y + 2z & = & -1 \\ kx + y + z & = & k \\ (k1)x2yz & = & k+1 \end{array} \right.$ se pide:

(a) (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k.

(b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones. (Septiembre 2007 - Opción A)

62. (2 puntos) Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $A = XA^2 + BA = A^2$ siendo

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(Septiembre 2007 - Opción B)

63. (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones

$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & 3 \\ 2x + 3y + z & = & 5 \end{array} \right.$ se pide:

(a) (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma ax + y + bz = 1 el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

(b) (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4. (Septiembre 2007 - Opción B)

64. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+mz & = & m+2 \\ 2x+(m+1)y+(m+1)z & = & -m \\ (m+2)x+3y+(2m+1)z & = & 3m+4 \end{array}\right.$$

(a) (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

(b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones. (Modelo 2008 - Opción A)

65. (3 puntos) Sean las matrices: $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

(a) (1 punto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.

(b) (1 punto) Calcular A 10 .

(c) (1 punto) Hallar todas las matrices M que satisfacen $(A-M)(A+M) = A^2 - M^2$ (Modelo 2008 - Opción B)

66. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-ay & = & 2 \\ ax-y & = & a+1 \end{array}\right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

(b) (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que y = 2. (Junio 2008 - Opción A)

67. (3 puntos) Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & ... & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & ... & 1 & 9 \end{bmatrix} \text{ se pide:}$$

(a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2 .

(b) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3 .

(c) (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5 . (Junio 2008 - Opción B)

68. (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{bmatrix} \text{ se pide:}$$

(a) (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

(b) (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para a = 1. (Septiembre 2008 - Opción A)

69. (2 puntos) Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-2y+z-3v &=& -4 \\ x+2y+z+3v &=& 4 \\ 2x-4y+2z-6v &=& -8 \\ 2x+2z &=& 0 \end{array}\right.$$ (Septiembre 2008 - Opción B)

70. (2 puntos) El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros. (Septiembre 2008 - Opción B)

71. (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

    (a) $$\left\{\begin{array}{rcr} x-y &=& 3 \\ 2x-3y &=& 2k \\ 3x-5y &=& k \end{array}\right.$$

    (b) (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

    (c) (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible. (Modelo 2009 - Opción A)

72. (2 puntos) Resolver la ecuación:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{array}\right| = 0$$ (Modelo 2009 - Opción A)

73. (3 puntos) Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3 , y se sabe que det(A) = 4, se pide:

    (a) (1 punto) Calcular $det(A^3)$ y $det(3A)$.

    (b) (2 puntos) Calcular det(B) y det(B -1), siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son: $2C_3, C1 - C_2, 5C_1$(Modelo 2009 - Opción B)

74. (3 puntos) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rcr} 4x+4\lambda y+2z &=& 2\lambda \\ \lambda x+y-\lambda z &=& \lambda \\ 4\lambda x+4\lambda y+\lambda z &=& 9 \end{array}\right.$

    Se pide:

    (a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

    (b) (1 punto) Resolver el sistema para λ = -1. (Junio 2009 - Opción A)

75. (2 puntos) Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y &=& \lambda \\ \lambda x-2y &=& 4 \\ 3x-y &=& 2 \end{array}\right.$$

    (a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

    (b) (0,5 punto) Resolver el sistema cuando sea posible 25(Junio 2009 - Opción B)

76. (2 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \text{ se pide:}$$

   (a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a.

   (b) (1 punto) Obtener la matriz inversa de A para a = -1 (Junio 2009 - Opción B)

77. (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) (1,25 puntos) Determinar los valores del prámetro m para los cuales la matriz M es invertible.

   (b) (0,5 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.

   (c) (1,25 puntos) Para m = -1 calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M . (Septiembre 2009 - Opción A

78. (2 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z & = & 0 \\ \lambda x - y + 2z & = & 0 \\ x - \lambda y + 2z & = & 0 \end{cases} \text{ se pide:}$$

   (a) (1 punto) Obtener los valores de parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de: x = y = z =0

   (b) (1 punto) Resolver el sistema para λ = 5. (Septiembre 2009 - Opción B)

79. (2 puntos) Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$ (Septiembre 2009 - Opción B)

80. (2 puntos) Dado el sistema:

   (a) $\begin{cases} 2x - y & = & \sqrt{3} \\ 3x + 2z & = & 2\sqrt{5} \end{cases}$ se pide:

   (b) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.

   (c) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

   (Septiembre 2009 - Opción A (Reserv)

81. (2 puntos) Dadas las matrices:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$;$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ Hallar una matriz X que verifique la ecuación matricial $XB = A + B$

(Septiembre 2009 - Opción A (Reserv)

82. 1(3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} (m+1)x + y + z = 0 \\ x + (m+1)y + z = m \\ x + y + (m+1)z = m^2 \end{cases}$$

se pide:

(a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

(b) (1 punto) Resolver el sistema para m = 0.

(Septiembre 2009 - Opción B (Reserva))

83. (2 puntos) Obtener, para todo número natural n, el valor de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^n$$ (Modelo 2010 - Opción A)

84. (2 puntos) Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ky + z & = & k+2 \\ kx + y + z & = & k \\ x + y + kz & = & -2(k+1) \end{cases}$$

(a) (Modelo 2010 - Opción A)

85. (3 puntos) Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + \lambda y - z = 4 \\ -\lambda x - y - z = -5 \end{cases}$$

(a) (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ

(b) (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

(c) (1 punto) Resolverlo para λ = -2. (Modelo 2010 - Opción B)

86. (2 puntos) Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

(a) se pide:

(b) (1 punto) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de x = y = z = 0.

(c) (1 punto) Resolverlo para el casa de k = 3. (General-Junio 2010 - Opción A)

87. (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ se pide:}$$

(a) (1 punto) Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

(b) (1 punto) Sin calcular explícitamente A^3y A^4 , y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5. (General-Junio 2010 - Opción A)

88. (3 puntos) Dado el sistema:

(a) $\left\{ \begin{array}{rcr} x + ay - z & = & a \\ ax + 2z & = & -2 \\ x + z & = & -2 \end{array} \right.$

(b) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.

(c) (1 punto) Resolverlo en el caso de a = 0. (General-Junio 2010 - Opción B)

89. (3 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

(a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

(b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

(c) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix}$

(Específica-Junio 2010 - Opción A)

90. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones: $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + my + 3z & = & 3 \\ x + y - 2z & = & 0 \\ 5x + (m+1)y + z & = & 9 \end{array} \right.$

(a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

(b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para el caso de m = 0. (Específica-Junio 2010 - Opción B)

91. (2 puntos) Dada la matriz $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ estudiar a para que valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible. (Específica-Junio 2010 - Opción B)

92. (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) (2 puntos). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m

(b) (1 punto). En el caso de m = 0, resolver el sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(General-Septiembre 2010 - Opción A)

93. (2 puntos) Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2yz & = & 0 \\ 2x - y + z & = & 3 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema

(b) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.

(c) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta. (General-Septiembre 2010 - Opción B)

94. (2 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{bmatrix} \text{ Se pide:}$$

(a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a.

(b) (1 punto). ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para a = 1. (General-Septiembre 2010 - Opción B)

95. (3 puntos) El sistema AX = B, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B

(a) (1 punto). Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

(b) (0,5 puntos). Si a = 4, y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{bmatrix}$, determinar, si existen, el valor b o los valores de b para los que el sistema es incompatible.

(c) 0 (1,5 puntos). Si a = 4, y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{bmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema. (Específica-Septiembre 2010 - Opción A)

96. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+kz & = & k \\ x+ky+z & = & k^2 \\ kx+y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

se pide:

(a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro k.

(b) (1 punto). Resolverlo para k = 0. (Específica-Septiembre 2010 - Opción B)

97. (3 puntos) Dado el sistema:

(a) $\left\{\begin{array}{cccccc} \lambda x & & +\lambda z & = & 2 \\ x & +\lambda y & -z & = & 1 \\ x & +3y & +z & = & 2\lambda \end{array}\right.$

(b) se pide:

(c) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

(d) (1,5 puntos). Resolver el sistema para λ = 1. (Modelo 2011 - Opción A)

98. (3 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$

(b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\frac{1}{3}(4I - A)$.

(c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$. (Modelo 2011 - Opción B)

99. (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) (1 punto). Calcular el rango de A en función de los valores de a.

(b) (1 punto). En el caso de a = 2, discutir el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

(c) (1 punto). En el caso de a = 1, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;(Junio 2011 - Opción A)

100. (3 puntos)(1,5 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones AX = B, donde

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (m-1) \\ 0 & -m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+1 \end{pmatrix}$;$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; según los valores de m.

(b) (1,5 puntos). Resolver el sistema en los casos m = 0 y m = 1. (Junio 2011 - Opción B)

101. (2 puntos). Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a. (Septiembre 2011 - Opción A)

102. (2 puntos). Dada la matriz

(a) $A = \begin{pmatrix} sen(x) & cos(x) & 0 \\ cos(x) & -sen(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$se pide:

(b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz M .

(c) (1 punto). Hallar la matrizM^2.

(d) (0,5 puntos). Hallar la matriz M^25 . (Septiembre 2011 - Opción A)

103. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 2x & +4y & & = & 4k \\ -k^3x & +k^2y & +kz & = & 0 \\ x & +ky & & = & k^2 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 puntos). Discutirlo en función del valor del parámetro k.

(b) (0’5 puntos). Resolver el sistema para k = 1.

(c) (0’5 puntos). Resolver el sistema para k = 2. (Septiembre 2011 - Opción B)

104. 1.13. Año 2012 1 (3 puntos) Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 2 \\ -3x & +2y & +3z & = & -2 \\ 2x & +my & -5z & = & 4 \end{array}\right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

(b) (1 punto) Resolverlo para m = 1. (Modelo 2012 - Opción A)

105. (3 puntos) Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x & +2y & = & 1 \\ 3x & +y & = & -a \\ -3x & +2ay & = & 4 \end{array}\right. \text{ se pide:}$$

(a) (1,5 puntos). Discutir el sistema segun los valores del parámetro a.

(b) (1,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea compatible.. (Modelo 2012 - Opción B)

106. (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix};B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix};X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

se pide:

(a) (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k.

(b) (0,75 puntos) Para k = 2, hallar, si existe, la solución del sistema AX = B.

(c) (0,75 puntos) Para k = 1, hallar, si existe, la solución del sistema AX = C. (Junio 2012 - Opción A)

107. (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix};B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}; \text{se pide:}$$

(a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

(b) (1 punto). Para a = 0, calcular la matriz X que verifica AX = B. (Junio 2012 - Opción B)

108. (2 puntos) Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (Junio 2012 - Opción B)

109. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & +(a-1)z & = & 1 \\ -x & +ay & +z & = & 0 \\ 2x & +y & -2z & = & 3 \end{array}\right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 puntos). Discutir sus soluciones según los valores de a.

(b) (1 punto). Hallar la solución del sistema para a = 1. (Junio 2012 (coincidente)- Opción A)

110. (3 puntos) . Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$, calcular los siguientes determinantes:

(a) (1, 5 puntos) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

(b) (1, 5 puntos) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ (Junio 2012 (coincidente)- Opción B)

111. 8 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 3x & +ay & +4z & = & 6 \\ x & +(a+1)y & +z & = & 3 \\ (a-1)x & -ay & -3z & = & -3 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

(b) (1 punto). Resolverlo para a = -1. (Septiembre 2012 - Opción A)

112. (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & -2z & = & 2 \\ ax & -y & +z & = & -8 \\ 2x & & +az & = & 4 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

(b) (1 punto). Resolverlo para a = -5. (Septiembre 2012 - Opción B)

113. 1.14. Año 2013 1 (3 puntos) Dado el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & +2y & +(m+3)z & = & 3 \\ x & +y & +(4+m-m^2)z & = & 3 \\ 2x & +4y & +3(m+2)z & = & 8 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

(b) (1 punto). Resolverlo para m = 2. (Modelo 2013 - Opción A)

114. (2 puntos)

(a) (1 punto). Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ obtener las relaciones que deben cumplir x, y, z, t para que la matriz X verifique $AX = XA$.

(b) (0,5 puntos). Dar un ejemplo de matriz X distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.

(c) (0,5 puntos). Calcular la inversa de la matriz A. (Modelo 2013 - Opción B)

115. (2 puntos) De las matrices cuadradas A y B se sabe que:

(a) $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) (1 punto). Calcular la matriz A B.

(c) (1 punto). Calcular las matrices A y B. (Modelo 2013 - Opción B)

116. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} ax & +7y & +5z & = & 0 \\ x & +ay & +z & = & 3 \\ & y & +z & = & -2 \end{array}\right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a. b

(b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso a = 4.

(c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso a = 2. (Junio 2013 - Opción A)

117. (3 puntos) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -11 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

Se pide:

(a) (1 punto). Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial XA = B tiene solución única.

(b) (1 punto). Calcular la matriz X para λ = 4.

(c) (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ. (Junio 2013 - Opción B)

118. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} \lambda x & +2y & -3z & = & 2\lambda \\ x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & -3y & +2z & = & 2 \end{array}\right. \text{ se pide:}$$

(a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de λ.

(b) (1,5 puntos). Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ. (Junio 2013 (coincidente)- Opción A)

119. (3 puntos) Sean A y B matrices 2 con determinantes: $det A=5, det B=3$. Se pide:

(a) (0,5 puntos). Hallar $det\left[B^{-1}A^2B^2\right]$

(b) (0,5 puntos). Hallar $det\left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]$

(c) (1 punto). Si c_1 y c_2 son las columnas de la matriz A (es decir, $A = (c_1 c_2)$, hallar la solución del sistema: $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c_2)$(Junio 2013 (coincidente)- Opción B)

120. (2 puntos) Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} -3 & \lambda+1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$; pide:

(a) (1 punto). Determinar λ para que A sea invertible.

(b) (1 punto). Calcular A^{-1} en el caso λ = 1. (Junio 2013 (coincidente)- Opción B)

121. (3 puntos) Dadas la matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ w \end{pmatrix}$ $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

se pide:

(a) (1,5 puntos). Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de a.

(b) (0,5 puntos). Resolver el sistema homogéneo AX = O en el caso a = 1.

(c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo AX = O cuando a = -1. (Septiembre 2013 - Opción A)

122. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 2x & +\lambda y & +\lambda z & = & 1-\lambda \\ x & +y & +(\lambda-1)z & = & -2\lambda \\ (\lambda-1)x & +y & +z & = & \lambda-1 \end{array}\right. \text{ Se pide:}$$

(a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro λ.

(b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso λ = 1.

(c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso λ = -1. (Septiembre 2013 - Opción B)

123. (3 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; , se pide:

(a) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A.

(b) (1 punto). ¿Son iguales las matrices $(A^{-1})^2$ y $(A^2)^{-1}$?

(c) (1 punto). Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$; resolver la ecuación matricial AX = B. (Septiembre 2013 (coincidente)- Opción A)

124. (2 puntos) Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = 6$ (Septiembre 2013 (coincidente)- Opción B)

125. (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +ay & -z & = & 0 \\ 3x & +2y & +az & = & 0 \\ 7x & +9y & +9z & = & 0 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

(b) (0,5 puntos). Resolverlo para a = 5. (Septiembre 2013 (coincidente)- Opción B)

126. (3 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$ se pide:

(a) (0,5 puntos). Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1} .

(b) (1 punto). Hallar la matriz A^{-1} para k = 6.

(c) (1,5 puntos). Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para k = 6. (Modelo 2014 - Opción A)

127. (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (a+2)x & +(a+1)y & = & -6 \\ x & +5y & = & a \\ x & +y & = & -5 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a. (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea posible. (Modelo 2014 - Opción B)

128. (2 puntos) Sabiendo que el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:

(a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

(b) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ (Modelo 2014 - Opción B)

129. (3 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}$;$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

(a) (1,5 puntos). Calcula α, β y γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.

(b) (1 punto). Si β = γ = 1 ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo AX = O sea compatible determinado?

(c) (0,5 puntos). Si α = -1, β = 1 y γ = 0, resuelve el sistema AX = B. (Junio 2014 - Opción A)

130. (2 puntos) Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$;se pide :

(a) (1 punto). Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.

(b) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso a = 2. (Junio 2014 - Opción B)

131. (2 puntos) Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

(a) (1 punto). Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

(b) (1 punto). Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores. (Junio 2014 - Opción B)

132. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 1 \\ & y & -z & = & a \\ x & +y & -z & = & 3a^2 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

(b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible. (Junio 2014 (coincidente)- Opción A)

133. (3 puntos) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$; tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:

(a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$;

(b) (1 punto). El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$;

(c) (1 punto). El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y B^t es la matriz transpuesta de B. (Junio 2014 (coincidente)- Opción B)

134. (3 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) (1 punto). Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1} .

(b) (1 punto). Para a = -2, hallar la matriz inversa A^{-1} .

(c) (1 punto). Para a = 1, calcular todas las soluciones del sistema lineal AX = O. (Septiembre 2014 - Opción A)

135. (2 puntos) Dada la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2 × 2, se pide:

(a) (1 punto). Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.

(b) (1 punto).Calcular B en el caso a = 1. (Septiembre 2014 - Opción B)

136. (2 puntos) Estudiar el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a. (Septiembre 2014 - Opción B)

137. (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ se pide:}$$

(a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores de m.

(b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A

(c) (0,75 puntos). Para m = -2, resolver el sistema AX = O.

(d) (0,75 puntos). Para m = 0, resolver el sistema AX = B. (Modelo 2015 - Opción A)

138. (2 puntos)

(a) (1,5 puntos). Hallar X e Y , matrices 2 × 2, tales que

$$X+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) · (0,5 puntos). Hallar Z, matriz invertible 2 × 2, tal que

$$Z^2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$ (Modelo 2015 - Opción B)

139. (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrl} mx & +y & = 0 \\ x & +my & = 0 \\ mx & +my & = 0 \end{array}\right. \text{ se pide:}$$

(a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de m.

(b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado. (Modelo 2015 - Opción B)

140. (3 puntos)

(a) (2 puntos). Discutir según los valores de m, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 4x & +3y & +(m-1)z & = 0 \\ x & -2y & +mz & = 1 \\ 5x & +my & +z & = 1 \end{array}\right.$$

(b) (1 punto). Resolver el sistema anterior para el caso m = 1. (Junio 2015 - Opción A)

141. (2 puntos)Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) (1 punto). Calcular A^{15} y A^{20}

(b) (1 punto). Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3. (Junio 2015 - Opción B)

142. (2 puntos) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}; I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

se pide:

(a) (1,25 puntos). Hallar el rango de A en función de t.

(b) (0,75 puntos). Calcular t para que $det(A - tI) = 0$. (Junio 2015 - Opción B)

143. (2 puntos) Dadas las matrices: $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,se pide:

(a) (1 punto). Calcular la matriz inversa de L.

(b) (1 punto). Buscar la matriz A, tal que $LAL^t = I$, donde L^t es la traspuesta de L. (Junio 2015 (coincidente)- Opción A)

144. (2 puntos) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$;se pide:

(a) (1 punto). Estudiar el rango de A, según los valores de m, e indicar para qué valores de m admite inversa la matriz A.

(b) (1 punto). Sin calcular A^{-1}, hallar m para que $det(A) = det(4A^{-1})$. (Junio 2015 (coincidente)- Opción A)

145. (3 puntos)

(a) (2 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{cccc} 2x & +y & = & 5 \\ x & +my & = & 7 \\ x & -y & = & 4 \end{array} \right.$ en función de los valores del parámetro m y hallar la solución del sistema anterior en los casos en los que ésta sea única.

(b) (1 punto). Encontrar el valor o valores de k que hacen incompatible el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & -y & +kz & = & 2 \\ x & -ky & +4z & = & -4 \\ & & & & \end{array} \right.$$

(Junio 2015 (coincidente)- Opción B)

146. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} -mx & +my & +z & = & 0 \\ x & -my & +3z & = & 4 \\ 2x & -2y & -z & = & 0 \end{array} \right.$$

(a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro m.

(b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso m = 0.

(c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso m = 2. (Septiembre 2015 - Opción A)

147. (2 puntos) Sabiendo que $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$ (1 punto).

(b) (1 punto). $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$ (Septiembre 2015 - Opción B)

148. (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB = BA$. (Septiembre 2015 - Opción B)

149. (3 puntos) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que la matriz M tenga inversa.

(b) (1 punto). Hallar la inversa de M , para a = 2.

(c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $MX = O$, para a = 1. (Septiembre 2015 (coincidente)- Opción A)

150. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} & +y & +z & = & 1 \\ (k+1)x & +y & +z & = & k \\ x & +(k-1)y & +z & = & 0 \end{array} \right.$$

se pide:

(a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de k. (1 punto). Resolverlo para k = 0 y para k = 1. (Septiembre 2015 (coincidente)- Opción B)

151. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +2y & +kz & = & 1 \\ 2x & +4y & +z & = & 3 \\ kx & +2y & -z & = & 3 \end{array} \right.$$

(a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de k.

(b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso k = 2.

(c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso k = 1. (Modelo 2016 - Opción A)

152. (2 puntos) Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ se pide:}$$

(a) (1 punto). Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.

(b) (1 punto). Para λ = -1, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$. (Modelo 2016 - Opción B)

153. (2 puntos) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(a) resolver la ecuación matricial $AX+3B = B(A^t+3I)$, donde A t denota la matriz transpuesta de A. (Modelo 2016 - Opción B)

154. (3 puntos)(1,5 puntos). Despeje X en la ecuación matricial$X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A; B; C; D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

(a) (1,5 puntos). Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; determine la matriz Y tal que $YB = A$. (Junio 2016 - Opción A)

155. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 3x & +y & +mz & = & 1 \\ x & -y & +2z & = & -2 \\ 5x & +(m+1)y & +2z & = & 4 \end{array} \right.$$

(a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de m.

(b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso m = 0.

(c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso m = 2. (Junio 2016 - Opción B)

156. (3 puntos) Dadas las matrices$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$;

(a) se pide:

(b) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que se verifique la igualdad A 2 = I, siendo I la matriz identidad de orden 3.

(c) (1,5 puntos). Para a = 2, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.

(d) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$. (Junio 2016 (coincidente)- Opción A)

157. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & +az & = & 0 \\ ax & +4y & +2z & = & a \end{array} \right.$$

se pide:

(a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro a.

(b) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para a = 1.

(c) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para a = -1. (Junio 2016 (coincidente)- Opción B)

158. (2 puntos)

(a) (1 punto). Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

(b) (1 punto). Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (Septiembre 2016 - Opción A)

159. (2 puntos) Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios? (Septiembre 2016 - Opción A)

160. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x & +(a-1)y & -2z & = & a \\ 2x & +y & -az & = & 2 \\ -x & +y & +z & = & 1-a \end{array}\right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

(b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible. (Septiembre 2016 - Opción B)

161. (3 puntos) Dadas las matrices

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 4 & 1 \\ m & 2 & -11 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;se pide:

(b) (1,5 puntos) Determinar el rango de B en función de los valores de m.

(c) (1,5 puntos) Calcular la matriz inversa de A y comprobar que verifica $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 + 3C)$. (Modelo 2017 - Opción A)

162. (2 puntos) A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán cuesta 4 y cada lila 3? (Modelo 2017 - Opción B)

163. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{lllll} 2x & +ay & +z & = & a \\ x & -4y & +(a+1)z & = & 1 \\ & 4y & -az & = & 0 \end{array}\right. \text{,se pide:}$$

(a) (2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a. (0,5 puntos) Resolverlo en el caso a = 1. (0,5 puntos) Resolverlo en el caso a = 2. (Junio 2017 - Opción A)

164. (3 puntos) Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

(a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1} , inversa de la matriz P .

(b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1} , inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

(c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2 , siendo $A = PJP^{-1}$. (Junio 2017 - Opción B)

165. (2 puntos) En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60 %, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del 75 %, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50 %. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará 35,20 euros. Finalmente, si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B. Determínese el precio de cada artículo. (Junio 2017 (coincidente) - Opción A)

166. (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$,se pide:

(a) (1 punto) Calcular su inversa.

(b) (1 punto) Calcular la matriz B para que $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea solución 1del sistema $A^2X = B$.

(Junio 2017 (coincidente) - Opción A)

167. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & +my & +3z & = & 4 \\ x & +y & -2z & = & -2 \\ 3x & & +(m+1)z & = & m+2 \end{array} \right. \text{,se pide:}$$

(a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

(b) (0,5 puntos) Resolverlo para m = -3.

(c) (0,5 puntos) Para cierto valor de m, que hace que el sistema sea compatible, se ha obtenido una solución con y = 0. Determinar x y z para esa solución. ¿Cuál es el valor de m? (Junio 2017 (coincidente) - Opción B)

168. (2 puntos) Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro(%)	Plata(%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z. (Septiembre 2017 - Opción A)

169. (3 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

   (a) (0,5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.

   (b) (1,5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I, A^2 - I$y $A^3 - I$.

   (c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A 6 , en caso de que exista. (Septiembre 2017 - Opción B)

170. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & +y & & = & 1 \\ & ty & +z & = & 0 \\ x & +(1+t)y & +tz & = & t+1 \end{array} \right.$$

se pide:

   (a) (2 puntos) Discutirlo en función del parámetro t.

   (b) (0,5 puntos) Resolverlo para t = 0. (0,5 puntos) Resolverlo para t = -1. (Septiembre 2017 (coincidente) - Opción A)

171. (3 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix}$ se considera la matriz B formada por las tres últimas columnas de A y se pide:

   (a) (1 punto) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz B es invertible.

   (b) (1 punto) Obtener el rango de A en función de los valores del parámetro real a.

   (c) (1 punto) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en el caso a = 0. (Septiembre 2017 (coincidente) - Opción B)

172. (2,5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$se pide:

   (a) (1,5 puntos) Obtener los valores de m para los que que la matriz $A - mI$ admite inversa.

   (b) (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$. (Modelo 2018 - Opción A)

173. (2,5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$ y los vectores $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix}$,se pide:

   (a) (2 puntos) Discutir el sistema lineal $AX = B$ en función de los valores del parámetro m.

   (b) (0,5 puntos) Resolver el sistema lineal $AX = B$ cuando m = -1. (Modelo 2018 - Opción B)

174. (2,5 puntos) Dadas las matrices$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   se pide:

   (a) (1,5 puntos) Obtener los valores de m para los que que la matriz $A - mI$ admite inversa.

   (b) (1 punto) Calcular la matriz inversa de$A - 2I$. (Junio 2018 - Opción A) (2,5 puntos)

175. 4 Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & mm & m \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix}$ se pide:

   (a) (2 puntos) Discutir el sistema lineal AX = B en función de los valores del parámetro m.

   (b) (0,5 puntos) Resolver el sistema lineal AX = B cuando m = -1. (Junio 2018 - Opción B)

176. (2,5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

   (a) (0,5 puntos) Calcular A^tA y AA^t , donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

   (b) (1,25 puntos) Hallar A^{-1}y resolver el sistema lineal $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c) (0,75 puntos) Calcular C^2 , donde $C = ABA^t$. (Junio 2018 (coincidente)- Opción A)

177. (2,5 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 10x & -20y & -10z & = & 8\alpha + 44 \\ 2x & -5y & +3z & = & 4\alpha + 4 \\ 3x & -7y & +2z & = & 5\alpha + 9 \end{array} \right.$$

   se pide:

   (a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real α.

   (b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $\alpha = -3$. (Junio 2018 (coincidente)- Opción B)

178. (2,5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$;$A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{37}{2} \\ 11 \end{pmatrix}$

se pide:

(a) (1,25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α.

(b) (0,75 puntos) Para α = 0, calcular, si es posible, A^{-1} .

(c) (0,5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema AX = B, en el caso α = 1. (Julio 2018 (extraordinaria)- Opción A)

179. (2,5 puntos) Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países. (Julio 2018 (extraordinaria)- Opción B)

180. (2,5 puntos) Para cada uno de los siguientes apartados, proponga un ejemplo de matriz cuadrada A, de dimensión 3×3, con todos sus números distintos de cero y con sus tres filas y columnas diferentes, que cumpla la condición pedida.(0,5 puntos) El determinante de A vale 0.

(a) (0,5 puntos) El determinante de A vale 1.

(b) (0,5 puntos) La matriz A coincide con su traspuesta. 56d) (1 punto) Para una cierta matriz cuadrada C, distinta de la matriz nula y de la identidad, se verifica que A · C = C · A. (Debe proponer ejemplos concretos para las dos matrices A y C.) (Modelo 2019- Opción A)

181. (2,5 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} x & -my & -z & = & 0 \\ mx & -4y & +(6-2m)z & = & -8m \\ -x & +2y & +z & = & 6 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m.

(b) (0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso m = 6. (Modelo 2019- Opción B)

182. (2,5 puntos) Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Se pide:

(a) (1,5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

(b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso a = 0. (Junio 2019- Opción A)

183. (2,5 puntos) Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas? (Junio 2019- Opción B)

184. (2,5 puntos) La aerolínea "Air", para uno de sus vuelos, ha puesto a la venta 12 plazas de Clase Preferente (P), a 250 euros cada una, 36 plazas de Clase Turista (T), a 150 euros cada una, y 72 plazas de Clase Económica (E), a 100 euros cada una. Se sabe que ha vendido el 90 % del total de las plazas, recaudando un importe de 13800 euros.

(a) (0,25 puntos) Determine el número total de plazas vendidas.

(b) (2,25 puntos) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el número de billetes vendidos de cada clase y cuánto dinero se ha recaudado de cada clase. (Junio 2019 (coincidente)- Opción A)

185. (2,5 puntos) Sean las matrices

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Se pide:

(b) (0,5 puntos) Calcular los valores de m $\in$ R para los cuales B no tiene inversa.

(c) (1 punto) Para m = 1, calcular la inversa de la matriz B.

(d) (1 punto) Para m = 2, calcular la matriz producto A^tB (donde A^t denota la matriz traspuesta de A) y el determinante de la matriz A^2B. (Junio 2019 (coincidente)- Opción B).

186. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$ y que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$,siendo I la matriz identidad de orden 3. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

(a) (2+2 puntos) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando a = 1.

(b) (3 puntos) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) (3 puntos) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que$B^{-1} = mB + nI$. (Junio 2019 (Valencia)- Opción A)

187. Se da el sistema :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & +y & +z & = & 4 \\ 3x & +4y & +5z & = & 5 \\ 7x & +9y & +11z & = & \alpha \end{array} \right.$$

, donde α es 7x+ 9y+ 11z = α un parámetro real. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

(a) (4 puntos) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible.

(b) (4 puntos) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

(c) (2 puntos) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (Junio 2019 (Valencia)- Opción B)

188. (2,5 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$A = \begin{cases} kx & +(k+1)y & +z & = & 0 \\ -x & +ky & -z & = & 0 \\ (k-1)x & -y & & = & -(k+1) \end{cases} \text{,se pide:}$$

(a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

(b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para k = -1. (Julio 2019 (extraordinaria)- Opción A)

189. (2,5 puntos) Dadas la matrices$A = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

(a) (1 punto) Calcular para qué valores a ∈ R se verifica $A^2 - I = 2A$.

(b) (0,75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

(c) (0,75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A. (Julio 2019 (extraordinaria)- Opción B) .

190. Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composicion del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78% de nitr ´ ogeno, un 21% de ox ´ ´ıgeno y un 1% de argon. ´

(a) (0.5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuantos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuantos de argón son necesarios. ´

(b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80%	20%	0%
B	70%	20%	10%
C	60%	40%	0%

Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composicion requerida. (Modelo 2020) .

191. (2,5 puntos)Dada las matrices$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$ se pide:

(a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en funcion del parámetro t.

(b) (1.5 puntos) Resolver el sistema AX = B, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.(Modelo 2020) .

192. (2,5 puntos)Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parametro real ´ a:

x + ay + z = a + 1 −ax + y − z = 2a −y + z = a $\begin{cases} x & +ay & +z & = & a+1 \\ -ax & +y & -z & = & 2a \\ & -y & +z & = & a \end{cases}$ Se pide:

(a) (2 puntos) Discutir el sistema segun los diferentes valores de a.

(b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para a = 0.(Junio 2020-Opción A) .

193. (2,5 puntos)Segun informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 centimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.(Junio 2020-Opción B)

194. (2,5 puntos)Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A,B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la accion A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el numero de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa ´ de la accion B es 1 euro, encuentre el n ´ umero de cada tipo de acci ´ on que le corresponde a cada hermano. (Modelo 2021) .

195. (2,5 puntos)Sea A una matriz de tamaño 3 ×4 tal que sus dos primeras filas son (1, 1, 1, 1) y (1, 2, 3, 4), y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, justificándolo apropiadamente :

(a) (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinacion lineal de las dos primeras.

(b) (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.

(c) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

(d) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

(e) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.(Septiembre2020-Opción A)

196. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

(b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

(c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$(donde B^t denota la matriz traspuesta de B)..(Septiembre2020-Opción B dre)

197. (2.5 puntos)Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parametro real a: $\begin{cases} ax & -2y & +(a-1)z & = & 4 \\ -2x & +3y & -6z & = & 2 \\ (-a)x & +y & -6z & = & 6 \end{cases}$

(a) (2 puntos) Discuta el sistema segun los diferentes valores de a.

(b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para a = 1. (Junio 2021-Opción B) .

198. (2.5 puntos)Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Ademas, la mitad de los seguidores de Sara mas la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.(Julio 2021-Opción A) .

199. Problema (2,5 puntos).

(a) (0.75 puntos) Encuentre un unico sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones {x = 1, y = 2} y {x = 0, y = 0}.

(b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en funcion del parámetro $\lambda \in$ R: x = λ y = $\lambda - 2$ z = $\lambda - 1$

(c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incognitas, x e y, que solo tenga como solucion a x = 1 e y = 2.(Julio 2021-Opción B) .

200. (2,5 puntos). Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m: $\left\{\begin{array}{ccccc} x & -2my & +z & = & 1 \\ mx & +2y & -z & = & -1 \\ x & -y & +z & = & 1 \end{array}\right.$

(a) (2 puntos) Discuta el sistema en funcion de los valores de m.

(b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = 1/2$.(Julio 2022-Opción A) .

201. (2.5 puntos). Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Ademas, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

PRUEBAS EVAU ANDALUCÍA

202. Un mayorista de café dispone de tres tipos base: Moka, Brasil y Colombia, para preparar tres tipos de mezcla: A, B y C, que envasa en sacos de 60 Kg., con los siguientes contenidos en kilos y precios del kilo en euros:

	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C
Moka	15	30	12
Brasil	30	10	18
Colombia	15	20	30
Precio (cada Kg.)	4	$4'5$	$4'7$

Suponiendo que el preparado de las mezclas no supone coste alguno, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos base de café?.

Solución: Precio Moka = 4 euros, Precio Brasil = 3 euros, Precio Colombia = 6 euros.

203. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 1 \\ 4x + y - 2z &= 3 \\ 2x - 3y + az &= b \end{aligned}$$

(a) Determinar a y b sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones.

(b) Resolver el sistema resultante.

Septiembre 2000.Solución: $a = \frac{44}{5}$, $b = 5$; $x = 1 - t,\ y = -1 + 14t,\ z = 5t$.

204. Determinar una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que

$$\det(A) = -7 \quad \text{y} \quad A \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Junio 2002.)Solución: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

205. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcular los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

(b) Resolver el sistema $A \cdot X = 3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de todas sus soluciones. (Septiembre 2003.)

Solución: $\lambda = -3, 3$; $x = t,\ y = -2t,\ z = t$, para todo $t \in R$, es decir, una recta.

206. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} mx - y &= 1 \\ x - my &= 2m - 1 \end{aligned}$$

(a) Clasificar el sistema según los valores de m.

(b) Calcular los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que $x = 3$. (Junio 2004.)

Solución: si $m = 1$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro; si $m = -1$ el sistema es incompatible. En los demás casos, es decir, si $m \neq -1, 1$ el sistema es de Cramer; $m = 1, -\frac{4}{3}$.

207. Determinar a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= -1 \\ ax + by + z &= 4 \end{aligned}$$

tiene al menos dos soluciones distintas.(Septiembre 2004.)

Solución: si $a = 4$, $b = 8$.

208. .

(a) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a?.

(b) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 2004)

Solución: $a = -5$; $\begin{cases} x = -2 - 8t \\ y = -2 - 7t \\ z = 3 + 10t \end{cases}$

209. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ -lx + 3y + z &= -7 \\ x + 2y + (l+2)z &= -5 \end{aligned}$$

(a) Clasificar el sistema según los valores del parámetro l.

(b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado. (Junio 2005.)

Solución: Para $l = -1$ el sistema es incompatible. Para $l = -2$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro (compatible indeterminado) y su solución es $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = t \end{array} \right\}$. Para $l \neq -1, -2$ el sistema es de Cramer (solución única).

210. En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.(Septiembre 2005)

Solución: moneda.

211. Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(Junio 2006.)Solución: $x = \frac{1}{4}$, $y = -\frac{5}{4}$, $z = \frac{1}{2}$.

212. Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} lx - y - z &= -1 \\ x + ly + z &= 4 \\ x + y + z &= l + 2 \end{aligned}$$

(a) Clasificar el sistema según los valores del parámetro l.

(b) Resolver el sistema para $l = 2$. (Septiembre 2006.)

Solución: Para $l = 1$ el sistema es incompatible. Para $l = -1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro (compatible indeterminado). Para $l \neq \pm 1$ el sistema es de Cramer (solución única). Cuando $l = 2$, es $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$.

213. Problema

(a) Calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Escribir en forma matricial el siguiente sistema y resolverlo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior.

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= -2 \\ x + z &= 3 \end{aligned}$$

Septiembre 2006.

Solución: $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $x = 3$, $y = -2$, $z = 0$.

214. Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}$$

(a) Resolverlo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

(b) Resolver el sistema que se obtiene para $a = -2$. **Septiembre 2007**.

Solución: Para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado, en concreto, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{2} - t$, $z = t$, para todo $t \in R$. Para $a = -2$, el sistema es de Cramer (solución única), $x = -\frac{4}{3}$, $y = 1$, $z = \frac{1}{3}$.

215. Problema

(a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

(b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuantos billetes hay de cada tipo. **Junio 2008**.

Solución: No; 80, 10 y 40 billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente.**Junio 2008**.

216. . Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

(b) Estudiar si el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior. **Junio 2008**

Solución: $m = 0, 1$; para $m = 0$ el sistema es incompatible (no tiene solución); para $m = 1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de dos parámetros (compatible indeterminado).

217. Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= a - 1 \\ 2x + y + az &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned}$$

(a) Discutirlo según los valores del parámetro a.

(b) Resolverlo para $a = 2$. **Septiembre 2008**.

Solución: para $a = 1$ el sistema es incompatible; para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado, en concreto, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = 1 - t$, $y = 0$, $z = t$, para todo $t \in R$. Por último, para $a \neq 1, 2$, el sistema es de Cramer (solución única).

218. Sabemos que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

tiene las mismas soluciones que el que resulta de aí±adirle la ecuación $ax + y + 7z = 7$.

(a) Determinar el valor de a.

(b) Calcular la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad. **Septiembre 2008**.

Solución: $a = 8$; $x = \frac{6}{5}$, $y = \frac{1}{5}$, $z = -\frac{2}{5}$.

219. Una empresa envasadora ha comprado un total de 1 500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40 500 euros. Calcular cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos ha comprado el 30% de las cajas.**Junio 2009**.

Solución: 13 500 euros en el primer mercado, 15 000 en el segundo y 12 000 en el tercero.

220. Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3x + \lambda y &= 0 \\ x + \lambda z &= \lambda \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

y resolverlo para $\lambda = 0$.**Septiembre 2009**.

Solución: para $\lambda = 0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = 0$, $y = 1 - 3t$, $z = t$, para todo $t \in R$. Para $\lambda = 6$ es incompatible. Por último, para $\lambda \neq 0, 6$, el sistema es de Cramer (solución única).

221. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z &= 2 \\ x - y + \lambda z &= \lambda \end{aligned}$$

(a) Discutirlo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?.

(b) Resolver el sistema para $\lambda = -1$. **Junio 2010**.

Solución: Si $\lambda \neq -1$, el sistema es de Cramer (solución única). Para $\lambda = -1$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = \frac{1}{3}$, $y = t$, $z = \frac{4}{3} - t$, para todo $t \in R$.

222. Problema

(a) Discutir, según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + z &= \lambda \\ \lambda x + 2y + (\lambda + 2)z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 6 - \lambda \end{aligned}$$

(b) Resolver el sistema anterior para $\lambda = 0$. **Septiembre 2010**.

Solución: para $\lambda = 8$ el sistema es incompatible. Para $\lambda = 0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = t$, $y = 2 - t$, $z = t$, para todo $t \in R$. Por último, para $\lambda \neq 0, 8$, el sistema es de Cramer (solución única).

223. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} -\lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 2 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

(a) Clasificar el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) Resolver el sistema para $\lambda = 0$. **Junio 2011**

Solución: para $\lambda = 1$ el sistema es incompatible. Para $\lambda = 0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = 2 - t$, $y = 1 - t$, $z = t$, para todo $t \in R$. Por último, para $\lambda \neq 0, 1$, el sistema es de Cramer (solución única).

224. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Calcular el rango de A dependiendo de los valores de α.
- Para $\alpha = 2$, resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$. **Septiembre 2011**.

Solución: $r = \text{rango de } A = \begin{cases} 3, & \text{si } \alpha \neq -2, 1 \\ 2, & \text{si } \alpha = -2 \\ 1, & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

225. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & \lambda + 1 \\ & & 3y & + & 2z & = & 2\lambda + 3 \\ 3x & + & (\lambda - 1)y & + & z & = & \lambda \end{array}$$

(a) Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

(b) Hallar los valores de λ para los que el sistema tiene solución única.

(c) ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$?. **Junio 2012**.

Solución: $x = t,\ y = 1 + 2t,\ z = 1 - 3t$; $\lambda \neq 1$; $\lambda = -1$

226. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{array}{ccccc} kx & + & 2y & = & 2 \\ 2x & + & ky & = & k \\ x & - & y & = & -1 \end{array}$$

(a) Probar que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.

(b) Especificar para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.

(c) Hallar las soluciones en cada caso. **Septiembre 2012**.

Solución: para $k = -2$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro (indeterminado según la vieja terminología, que ya debería desaparecer, pues está perfectamente determinado), $x = t$, $y = 1 + t$, para todo $t \in R$. Para $k \neq -2$ el sistema es de Cramer (determinado), $x = 0$, $y = 1$.

227. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} x - y &= \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z &= \lambda \\ -x - y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

(a) Clasificarlo según los distintos valores del parámetro λ.

(b) Resolverlo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$. **Septiembre 2012**.

Solución: para $\lambda = 0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = 0$, $y = 0$, $z = t$, para todo $t \in R$. Para $\lambda = -1$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = -1 + t$, $y = t$, $z = 1 - 2t$, para todo $t \in R$. Por último, para $\lambda \neq 0, -1$, el sistema es de Cramer (solución única).

228. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 4y & + & 6z & = & 6 \\ & & my & + & 2z & = & m+1 \\ -3x & + & 6y & - & 3mz & = & -9 \end{array}$$

(a) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

(b) Resolverlo para $m = 3$. Para dicho valor de m, calcular, si es posible, una solución en la que $y = 0$. **Septiembre 2013**.

Solución: Para $m \neq 0, 3$, el sistema es de Cramer (solución única). Para $m = 0$ el sistema es incompatible. Por último, para $m = 3$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = -3 + 13t$, $y = 2t$, $z = 2 - 3t$, para todo $t \in R$, y para $y = 0$, la única solución es $(x, y, z) = (-3, 0, 2)$.

229. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 3 \\ 2x + 3y + z &= 5 \end{aligned}$$

(a) Calcular α de manera que al aí±adir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$, el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

(b) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4. **Junio 2014**.

Solución: $\alpha = 0$; $x = \frac{25}{3},\ y = -\frac{11}{3},\ z = -\frac{2}{3}$.

230. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x - y + mz &= 0 \\ mx + 2y + z &= 0 \\ -x + y + 2mz &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(a) Hallar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.

(b) Hallar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene alguna solución distinta de la solución nula. **Septiembre 2014**.

(c) Resolver el sistema para $m = -2$.

Solución: Para $m \neq -2, 0$, el sistema es de Cramer (solución trivial). Para $m = 0$ o $m = -2$ el sistema es compatible con infinitas soluciones. Para $m = -2$ resulta, $x = t$, $y = t$, $z = 0$, para todo $t \in R$.

231. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x + y - z &= -1 \\ \lambda x + \lambda z &= \lambda \\ x + y - \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

(a) Discutir el sistema según los valores de λ.

(b) Resolver el sistema para $\lambda = 0$. **Junio 2015**.

Solución: Si $\lambda \neq 0$, el sistema es incompatible. Si $\lambda = 0$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = -t,\ y = t,\ z = 1 + t$.

232. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + y + (\alpha - 1)z &= \alpha - 1 \\ x - \alpha y - 3z &= 1 \\ x + y + 2z &= 2\alpha - 2 \end{aligned}$$

(a) Resolver el sistema para $\alpha = 1$.

(b) Determinar, si existe, el valor de α para el que $(x, y, z) = (1, -3, \alpha)$ es la única solución del sistema dado. **Septiembre 2015**.

Solución: $x = \dfrac{2}{3}$, $y = -\dfrac{4}{3}$, $z = \dfrac{1}{3}$; $\alpha = 2$.

233. **Junio 2016**. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} (3\alpha - 1)x + 2y &= 5 - \alpha \\ \alpha x + y &= 2 \\ 3\alpha x + 3y &= \alpha + 5 \end{aligned}$$

(a) Discutirlo según los valores del parámetro α.

(b) Resolverlo para $\alpha = 1$ y determinar en dicho caso, si existe alguna solución donde $x = 4$.

Solución: Si $\alpha \neq 1$, el sistema es incompatible. Si $\alpha = 1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = t,\ y = 2 - t$. Para $x = 4$ es $y = 2$.

234. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 2z &= 1 \\ 5x - 11y + 9z &= \lambda \\ x - 3y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

(a) Discutir el sistema según los valores de λ.

(b) Resolverlo, si es posible para $\lambda = 4$. **Septiembre 2016**.

Solución: Si $\lambda \neq 4$, el sistema es incompatible. Si $\lambda = 4$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = -\dfrac{5}{2} + 7t,\ y = -\dfrac{3}{2} + 4t,\ z = t$.

235. Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

(a) Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros, ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos?. Razonar la respuesta.

(b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices, ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?. **Junio 2017**.

Solución: No; precio del lÃ¡piz $= \dfrac{1}{2}$, precio del rotulador $= \dfrac{7}{2}$, precio de la carpeta = 5 euros.

236. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}$$

(a) Discutir el sistema según los valores de m.

(b) Para $m = 2$, calcular, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z = 17$. **Septiembre 2017**.

Solución: Si $m \neq 2$, el sistema es de Cramer, es decir, tiene solución única. Para $m = 2$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Para $m = 2$ y $z = 17$ es $x = -23$, $y = 8$.

237. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}$$

(a) Discutirlo según los valores del parámetro m.

(b) Resolver el sistema para $m = -2$. **Junio 2018**.

Solución: Si $m \neq 3$, el sistema es de Cramer, es decir, tiene solución única. Para $m = 3$, el sistema es incompatible. Para $m = -2$ es $x = -\dfrac{73}{5}$, $y = 9$, $z = -\dfrac{2}{5}$.

238. Problema

(a) Justificar que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- Utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros.
- Se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas.
- Tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?.

(b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justificar si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior. **Junio 2018**.

Solución: de una sola manera; $x = 7$, $y = 15$, $z = 8$. No es posible pues los valores resultantes no son números enteros.

239. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x+y+mz &= m^2 \\ y-z &= m \\ x+my+z &= m \end{aligned}$$

(a) Discutir el sistema según los valores del parámetro m,

(b) Resolverlo para $m=1$. Para dicho valor de m, calcular, si es posible, una solución en la que $z=2$. **Septiembre 2018**.

Solución: Si $m=0,1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. En caso contrario, es decir, si $m\neq 0$ y $m\neq 1$, el sistema es incompatible. Para $m=1$ es $x=-2t,\ y=1+t,\ z=t$. Para $z=2$, es $x=-4$, $y=3$.

240. **Junio 2019**. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$

considerar el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA=B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discutirlo según los distintos valores de m.

Solución: Para $m\neq 1,-2$, el sistema es de Cramer (solución única). Para $m=-2$, el sistema es incompatible. Por último, para $m=1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 2 parámetros.

241. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 0 \\ (m+2)x+y-z &= m \\ 3x+(m+2)y+z &= m \end{aligned}$$

(a) Discutir el sistema según los valores de m.

(b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=0$. **Septiembre 2019**.

Solución: Para $m\neq 0,-4$, el sistema es de Cramer (solución única). Para $m=-4$, el sistema es incompatible. Por último, para $m=0$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro, $x=3t$, $y=-5t$, $z=t$.

242. Calcular, en grados, los tres ángulos de un triángulo, sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.**Septiembre 2019**.

Solución: $40,60,80$.

243. Consideremos

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Discutir el sistema dado por $AX=B$, según los valores de a.

(b) Para $a=0$, resolver el sistema dado por $AX=B$. Calcular, si es posible, una solución en la que $y+z=4$. **Julio 2020**.

Solución: Para $a \neq 0$, el sistema es incompatible. Para $a = 0$, el sistema es compatible homogéneo con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro, $x = t$, $y = 0$, $z = -t$; $x = -4$, $y = 0$, $z = 4$.

244. Consideremos el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Discutir el sistema según los valores de m.

(b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$?. En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **Septiembre 2020**.

Solución: Para $m \neq -2, 4$, el sistema es de Cramer (solución única). Para $m = 4$, el sistema es incompatible. Para $m = -2$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. No existe tal solución.

245. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Hallar los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

(b) Para $\lambda = 1$, resolver el sistema dado por $(A - \lambda I)X = 0$. ¿Existe alguna solución tal que $z = 1$?. En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **Septiembre 2020**.

Solución: $\lambda = -1, 1, 2$; $x = t,\ y = 0,\ z = 0,\ \forall t \in R$. No existe tal solución.

246. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

(a) Discutir el sistema según los valores de m.

(b) Resolver el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$?. En caso afirmativo, calcularla. En caso negativo, justificar la respuesta. (**Junio 2021**.)

Solución: Para $m \neq 0, -\frac{5}{2}$, el sistema es de Cramer, es decir, tiene solución única. Para $m = 0$, es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, cuya solución es $x = \frac{2}{5},\ y = t,\ z = 2t - 1$. No hay ninguna solución en la que $x = 0$. Por último, para $m = -\frac{5}{2}$, el sistema es incompatible.

247. En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg. de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg. para cada bidón.

El gerente nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuantas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?(**Junio 2021)**

Solución: 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones.

248. Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A,B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la accion A es el triple que el de´ B y la mitad que el de C, que el numero de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa´ de la accion B es 1 euro, encuentre el n´ umero de cada tipo de acci´ on que le corresponde a cada hermano.´

249. En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60% del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.**(modelo 2022)**

250. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) (0.5 puntos) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

(b) (1 punto) Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz A.

(c) (1 punto) Para $a = 2$, resolver el sistema A **(modelo 2022)**

251. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

(a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

(b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = \frac{1}{2}$**(ordinaria 2022)**

252. Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres anos al doble de la edad de Alicia. Ademas, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros mas que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.**(ordinaria 2022)**

253. En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiraramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.**(extraordinaria 2022)**

254. Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (1 punto) Calcule para que valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$.

(b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

(c) (0.5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incognitas cuya matriz de coeficientes sea BA.**(extraordinaria 2022)**

255. En la liga de fútbol profesional de Libertonia compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres, y no más, han de ser porteros. Se sabe que la tercera parte del número de defensas coincide con la diferencia entre el número de centrocampistas y el número de delanteros. Por otro lado, la suma de la mitad del numero de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al número de defensas. Calcule el número de defensas, el número de centrocampistas y el número de delanteros que juegan en la liga.**(Modelo 2023)**

256. Dadas las matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

, se pide:

(a) (0.75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se verifica que $A^t B = C$.

(b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de m para los que existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC.

(c) (0.75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.**(Modelo 2023)**

257. En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al numero de camiones restantes. El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?**(ordinaria 2023)**

258. Dado el sistema

$$\begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3 \\ 4x + 2ay + z = 3 \end{cases}$$

, se pide:

(a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.

(b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a = 3$.

(c) (0.75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.**(ordinaria 2023)**

259. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de $A^t A$.

(b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.

(c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.

(d) (0.75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5(**Extraordinaria 2023)**

260. Dado el sistema

$$\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases}$$

, se pide:

(a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.

(b) (0.5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.

(c) (0.75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.(**Extraordinaria 2023)**