IES Dionisio Aguado.Dep Matemáticas
ÁLGEBRA MATRICES Y DETERMINANTES 1ª hoja de problemas (Matemáticas II)

(1) Siendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ hallar:
  (a) $4A - 5B + A \cdot B$
  (b) $B \cdot A + A - 10 \cdot B$

(2) Calcular $A \cdot B$. ¿Se puede hallar $B \cdot A$? A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(3) Hallar $A \cdot B$ y $B \cdot A$ siendo B= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, A= $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

(4) Hallar $A^2 - 3A + 2A^t$, siendo A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(5) Siendo A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, probar que las matrices de la forma $B = \lambda A + \mu I$, son permutables con A, es decir, $A \cdot B = B \cdot A$ (También se dice que A y B conmutan).

(6) Sea la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^{100}

(7) Calcular A^n siendo A= $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(8) Resolver el sistema matricial: $\begin{cases} X - Y = A \\ 2X + Y = B \end{cases}$, siendo A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(9) ¿Hay alguna matriz que sea a la vez simétrica y antisimétrica?.

(10) Sea A una matriz cuadrada. Demostrar que $A + A^t$, es simétrica y que $A - A^t$ es antisimétrica.

(11) Demostrar que la matriz A= $\begin{pmatrix} senx & -cosx \\ cosx & senx \end{pmatrix}$ es ortogonal.

(12) Se dice que una matriz es idempotente si $A^2 = A$. Demostrar que si se verifica que $A \cdot B = A$ y que $B \cdot A = B$, entonces A y B son idempotentes.

(13) Demostrar que si A y B son permutables entonces se verifican las fórmulas del cuadrado de un binomio: $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

(14) Sea A una matriz idempotente. Sea $B = 2A - I$. Justificar que, en estas condiciones, se verifica $B^2 = I$.

(15) De una matriz A se sabe que $A^2 = 2A - I$, calcular A^4.

(16) Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ encontrar una de las matrices X cuadradas de orden 2 y simétricas tales que A.X=0.

(17) Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas de orden dos.
  (a) Comprobar que se verifica: Traza(A+B)=Traza(A)+Traza(B)
  (b) Traza(A·B)=Traza(B·A)

(c) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener A·B-B·A=I, donde I denota la matriz identidad.

(d) Encontrar dos matrices A y B para las que: Traza(AB) $\neq$Traza(A).Traza(B)

(18) Sea k un número natural y sean las matrices:$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
,

(a) Calcular A^k

(b) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^k \cdot X = B \cdot C$

(19) Resolver los siguientes determinantes: a)$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, b)$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, c)$\begin{vmatrix} 12 & 1 & 12 & 2 \\ 6 & -2 & -6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(20) Resolver los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & a & a & a & a \\ a & 3 & a & a & a \\ a & a & 3 & a & a \\ a & a & a & 3 & a \\ a & a & a & a & 3 \end{vmatrix}$, (d) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$, (f) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ n & 2 & 1 & 1 & ... & 1 \\ n & 1 & 3 & 1 & ... & 1 \\ n & 1 & 1 & 4 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n & 1 & 1 & 1 & ... & n \end{vmatrix}$

(21) Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(b)\begin{vmatrix} 4x+5 & 4x+7 & 4x+9 \\ 4x+9 & 4x+5 & 4x+7 \\ 4x+7 & 4x+9 & 4x+5 \end{vmatrix} = 0$

(22) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcular:

(a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b)$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$, c)$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

(23) Hallar la matriz inversa de A=$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y comprobar el resultado.

(24) Sea A=$\begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$. Comprobar que existe A^{-1} cualquiera que sea el valor de a.

(25) Para qué valores de x las siguientes matrices no tienen inversa: A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

,C=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(26) Demostrar que si $A^2=0$ entonces A no tiene inversa.

(27) Siendo A,B,C matrices cuadradas del mismo orden, es sabido que de la igualdad A·B=A·C **no puede deducirse en todo caso que B=C**. Sin embargo, probar que si el determinante de A es distinto de cero, sí puede obtenerse la conclusión B=C.

(28) Siendo A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y B·=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprobar que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(29) Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

(a) $A \cdot X = B$, A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

(b) $X \cdot A = B + C$; A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $A \cdot B - B^t \cdot X = A^{-1} + X$; siendo A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(30) Encontrar el rango de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 14 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 8 & 16 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(j) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(31) Hallar el valor de m para que A=$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 & 1 \\ m & -10 & m & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tenga rango distinto de 3

(32) Discutir el rango de A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$, en función de los valores de t

(33) Calcular el rango de la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ según los diferentes valores del parámetro real a:

(34) Se consideran las matrices A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$y B=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$donde a es cualquier número real.

(a) Encontrar los valores de a para los que AB es invertible

(b) Determina los valores de a para los que BA es invertible

(35) Sean A, B∈M, tales que $|A|\neq$0 y $|B|\neq$0 . Demostrar que $(A.B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(36) Sea A∈M, tal $A^3 = I$, demostrar que tiene inversa y calcularla en función de A

(37) Sea A∈M con $|A|\neq$0 y con inversa A^{-1} , calcular la matriz inversa de λA ,∀λ∈R-{0}

(38) Sea A∈M con $|A|\neq$0, calcular $|\lambda A|.\forall\lambda \in R - 0$

(39) Sea A∈M tal que $A \cdot A^t + A^2 = I$, calcular $(A^t + A)^{-1}$.

(40) Sea A∈M tal que $\lambda A^2 + ßA = 0$con $|\lambda A + \beta \mathbf{I}| \neq 0$. Demostrar que no tiene inversa. ¿Qué se puede afirmar sobre si $|\lambda A + \beta \mathbf{I}| = 0$?.

(41) Sea A=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ con a y b≠0 . Calcular λ tal que $|A - \lambda I| = 0$. .

(42) Sea M_n^* el conjunto de matrices cuadradas con determinante distinto de 0. Definimos la división de dos matrices de como sigue, $\frac{A}{B} = AB^{-1}$. ¿Es una buena definición?. ¿Por qué?.