S3r4 | 2023

MATEMÁTICAS : Bachillerato II CCNN

Determinantes de Matrices

Apuntes

by Sera

1 Introducción

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo.Los conceptos de matriz y todos los relacionados fueron desarrollados básicamente en el siglo XIX por matemáticos como los ingleses J.J. Sylvester y Arthur Cayley y el irlandés William Hamilton. Las matrices se encuentran en aquellos ámbitos en los que se trabaja con datos regularmente ordenados y aparecen en situaciones propias de las Ciencias Sociales , Económicas y Biológicas.

2 Definición

Dada una matriz cuadrada de orden n,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se llama determinante de la matriz A y se representa por |A|

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a un número real que es igual a:

$$det(A) = |A| = \sum (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} \qquad \sigma \in Sn$$

En otras palabras, el **determinante de una matriz cuadrada** es el número real que se obtiene sumando todos los n factorial ($n!$) productos posibles de n elementos (orden de la matriz) de la matriz, de forma que en cada producto haya *un elemento de cada fila y uno de cada columna*, precedido cada producto con el signo + ó − según que la permutación de los subíndices que indican la columna tenga un número de inversiones, respecto del orden natural, que sea par o impar.

Esta definición sólo es práctica para resolver los determinantes de orden 2 y 3. Los determinantes de orden superior se resuelven con otros métodos, ya que aplicando la definición sería muy laborioso.

3 Determinantes de orden 1 y 2

3.1 Determinantes de matrices 1x1

El determinante de una matriz 1×1 es el propio número.

3.2 Determinantes de matrices 2x2

El determinante de la matriz 2×2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es el número $|A| \overset{def}{=} ad - bc$

Este resultado se corresponde con la suma de todos los posibles productos de dos elementos que se pueden formar tomando un elemento y solo uno de cada fila y un elemento y solo uno de cada columna afectado cada producto por el signo + ó -, según unas determinadas propiedades (inversión par o impar).

En efecto, ya que según la definición

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in Sn} (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Los números de las columnas tienen solo 2 permutaciones 12 y 21. Una de ellas es par (12) por lo tanto $(-1)^{i(\sigma)} = (-1)^0 = +1$ y la otra es impar (2,1), por lo tanto $(-1)^{i(\sigma)} = (-1)^1 = -1$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 1$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-4) - 7 \cdot (-1) = 5$$

4 Determinantes de matrices de orden 3

De la misma forma que en el apartado anterior veamos como calcular el determinante de las matrices cuadradas de orden 3. En este caso el número de sumas será 3!=6.

Veremos una regla nemotécnica, **regla de Sarrus**, para recordar como calcularlo. Sea $A \in M_{3x3}(R)$ definido de forma genérica como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Antes de aplicar la definición de determinante veamos las permutaciones y sus índices:

σ_{123}-> número de inversiones i(σ123)=0 ->es par
σ_{132}-> número de inversiones i(σ132)=1 ->es impar
σ_{231}-> número de inversiones i(σ231)=2 ->es par
σ_{213}-> número de inversiones i(σ213)=1->es impar
σ_{312}-> número de inversiones i(σ312)=2 ->es par
σ_{321}-> número de inversiones i(σ321)=1 ->es par Por lo tanto

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^1 a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

Ejemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 7) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 9) =$$
$$(45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = 0$$

Nota: Por la propia definición de determinante, es evidente, que en el caso de matrices triangulares o diagonales el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

5 Determinantes de orden superior

La aplicación del proceso descrito para el desarrollo de un determinante con la formación de todos los productos posibles, resulta muy laborioso cuando el orden es superior a 3. Un determinante de orden 4 precisa el cálculo de 24 productos de 4 factores cada uno y el de orden 5 necesita 125 productos de 5 factores,...lo cuál dista mucho de ser cómodo y sí muy propenso a la comisión de errores.

Se puede construir un procedimiento alternativo para el cálculo de estos determinantes, pero es preciso describir previamente los conceptos siguientes:

5.1 Menor Complementario

Sea $A \in Mnxn$ se llama menor complementario del elemento a_{ij} de A, y lo representaremos por α_{ij}, al **determinante** de la matriz cuadrada de orden $n-1$ que se obtiene de suprimir la fila $i-ésima$ y la columna $j-ésima$ de A

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ Menor complementario del $a_{11} = \alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$ 32

Menor complementario del$a_{13} = \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -15$

Menor complementario del $a_{32} = \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6$

5.2 Adjunto de un elemento.

Para una matriz cuadrada $A \in Mnxn$ de orden n, se llama adjunto del elemento a_{ij} de A, y lo representamos por A_{ij}, al menor complementario del elemento a_{ij}) anteponiéndole el signo + ó − según sea la suma de los subíndices $i + j$ par o impar:

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $A_{11} = (-1)^{1+1}\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot$

32 $A_{13} = (-1)^{1+3}\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot -15 = -15$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\alpha_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 6 = -6$$

5.3 Matriz Adjunta

Definición:

La matriz cuyos elementos son los adjuntos de los correspondientes elementos de una matriz cuadrada A se llama matriz **adjunta de A** y se denota por $Adj(A)$.
En nuestro ejemplo: $Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 18 & -15 \\ -14 & -5 & 8 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

Ahora ya estamos en condiciones de poder calcular determinantes de orden superior a 3.

6 Determinantes de orden superior a 3.Determinates por el desarrollo de una línea

Sea $A \in M_{nxn}$ el valor de su **determinante se obtiene sumando los productos de los elementos de una de sus "líneas" por sus adjuntos correspondientes**:

$$|A| \stackrel{def}{=} a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{ii}A_{ii} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

si quiero desarrollar por los elementos de la fila i o bien

$$|A| \stackrel{def}{=} a_{21}A_{21} + \ldots + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{2n}A_{2n}$$

si quiero desarrollar por los elmentos de la fila 2 El valor del determinante es independiente de la "línea" elegida Entonces, el determinante de una matriz 3x3 puede ejecutarse de 6 maneras diferentes

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}A_{11} + \ldots + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{13}A_{13} \\ a_{21}A_{21} + \ldots + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{23}A_{23} \\ a_{31}A_{31} + \ldots + a_{32}A_{32} + \ldots + a_{33}A_{33} \\ a_{11}A_{11} + \ldots + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{31}A_{31} \\ a_{12}A_{12} + \ldots + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{32}A_{32} \\ a_{13}A_{13} + \ldots + a_{23}A_{23} + \ldots + a_{33}A_{33} \end{cases}$$

Ejemplo

Calculemos el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = |A| = (-1)^{1+1} a_{11} |A_{11}| + (-1)^{2+1} a_{21} |A_{21}| + (-1)^{3+1} a_{31} |A_{31}| = \; = 3 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3(-28) + (-12) + (-2)(-22) = -52$

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} |A| = (-1)^{1+1} a_{11} |A_{11}| + (-1)^{2+1} a_{21} |A_{21}| + (-1)^{3+1} a_{31} |A_{31}| + (-1)^{4+1} a_{41} |A_{41}| = 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Ahora bien, los determinantes de tamaño 3×3 se calculan del mismo modo que en el ejemplo anterior. Verificar que respectivamente, los determinantes tres por tres valen $6, 0, -6, 3$ por lo cual $|A| = 2(6) - 3(-6) - 2(3) = 24$

7 Propiedades de los determinantes de matrices

- El determinante de una matriz A es igual al determinante de su traspuesta.

$$|A| = |A^t|$$

$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-(a_{31}a_{22}a_{13}+$

$a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})=$ Reorganizando

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}) = |A|$

Ejemplo

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 2 =$
$0 + 4 + 30 - 60 - 0 - 4 = -30 \quad |A^t| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot$

$5 - 4 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 0 + 4 + 30 - 60 - 0 - 4 = -30$

Considerando entonces esta propiedad, todo los resultado para la filas de un determinante será igualmente válido para las columnas, y viceversa, pudiendo hablar simplemente de líneas de un determinante.

- Si los elementos de una fila o de una columna se multiplican todos por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número. $A =$

$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33}+ka_{12}a_{23}a_{31}+ka_{13}a_{21}a_{32}-(ka_{11}a_{23}a_{32}+$
$ka_{12}a_{21}a_{33} + ka_{13}a_{22}a_{31}) =$

$k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})) =$
$k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Por lo tanto, esta propiedad Nos permite sacar fuera los

factores comunes a todos los elementos de una línea.

- $|k{\cdot}A| = k^n{\cdot}|A|$, siendo n la dimensión de la matriz $|A| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} ==$

  $k{\cdot}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$
  $k^3|A|$

- Si los elementos de una línea se pueden descomponer en suma de dos o más sumandos, el determinante será igual a la suma de dos determinantes (o más) que tienen todas las restantes líneas iguales y en dicha línea tienen los primeros, segundos, etc. sumandos.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Si en un determinante los elemento de una línea son nulos, el determinante es nulo. $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 \cdot a_{33} + 0 \cdot a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12} \cdot 0 -$

  $(a_{31} \cdot 0 \cdot a_{13} + a_{11}a_{32} \cdot 0 + 0 \cdot a_{12}a_{33}) = 0$

- Si en una matriz se permutan dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo. $|A| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -|A|$

Ejemplo $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -30$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 30$$

- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales, el determinante es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a & a \\ a_{21} & b & b \\ a_{31} & c & c \end{vmatrix} == a_{11}bc + a_{31}ab + a_{21}ac - (aba_{31} + a_{11}cb + a_{21}ac) = 0$$

- Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es nulo. $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} =$

  $k \cdot 0 = 0$

- ya que una matriz con dos filas iguales tiene determinante 0
- Si los elementos de una línea son combinación lineal de las restantes líneas paralelas, el determinante es nulo.$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r \cdot a_{11} + s \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & r \cdot a_{21} + s \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & r \cdot a_{31} + s \cdot a_{32} \end{vmatrix} =$
  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r \cdot a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & r \cdot a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & r \cdot a_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & s \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{21} & s \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{31} & s \cdot a_{32} \end{vmatrix} = r \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} + s \cdot$
  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & s \cdot a_{32} \end{vmatrix} = r \cdot 0 + s \cdot 0 = 0$
- Si a los elementos de una línea se le suma una combinación lineal de las restantes líneas paralelas,el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + r \cdot a_{11} + s \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + r \cdot a_{21} + s \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + r \cdot a_{31} + s \cdot a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r \cdot a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & r \cdot a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & r \cdot a_{31} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & s \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & s \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & s \cdot a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r \cdot a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & r \cdot a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & r \cdot a_{31} \end{vmatrix} + r \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r \cdot a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & r \cdot a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & r \cdot a_{31} \end{vmatrix} + r \cdot 0 + s \cdot 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r \cdot a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & r \cdot a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & r \cdot a_{31} \end{vmatrix}$$

- El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices:. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

8 Métodos de cálculo

8.1 Método CHIO

- "Utilizando las propiedades de los determinantes se trata de hacer ceros a todos los elementos de una línea para luego desarrollarlo por los adjuntos de esa línea"

Ejemplo

- $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{F_4-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} \overset{Desarrollo}{=} 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=}$$
  $$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{F_2-2F_1}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} \overset{Desarrollo}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} =$$
  $$2(11-(-12)) = 46$$

8.2 Método de GAUSS

- "Utilizando las propiedades de los determinantes se trata de conseguir un determinante triangular (superior o inferior) de tal manera que su determinante sea el producto de los elementos de la diagonal"

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_2+F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{3F_3}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} \overset{F_3-F_2}{=} \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} 1 \cdot 4 \cdot (-11) = -22$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=} \begin{vmatrix} 3x+3 & x & x & x \\ 3x+3 & 3 & x & x \\ 3x+3 & x & 3 & x \\ 3x+3 & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3x+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} \overset{f_2-f_1}{=}$$
$$(3x+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (3x+3)(3-x)^3$$

9 Rango de una matriz

Recordemos que el rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes. Además sabemos que el número de filas L.I. es igual al número de columnas L.I.

Existen fundamentalmente dos métodos para realizarlo: Método de Gauss y Método del orlado o por determinantes

9.1 Método de Gauss

Ya lo hemos visto.

9.2 Método del orlado o por determinantes

Introducción: Consideramos una matriz $A \in Mmxn$, supongamos que m≤n (esta restricción no resta generalidad), si tomamos todos los determinantes de las submatrices de orden m (menores de orden m) y vemos que se anulan, podemos deducir que a la fuerza existe una combinación lineal entre sus filas o bien sus columnas.

Dando la vuelta a esta deducción podemos decir que si en una matriz$A \in Mmxn(m \leq n)$ existe algún determinante de orden m no nulo, todas las filas y columnas son linealmente independientes $\iff ran(A) = m$.

9.3 Menor de una matriz

Definición:

Sea $A \in M_{mxn}$ si en esta matriz se prescinde de una o varias filas o columnas de forma que quede una matriz cuadrada de pxp, **el determinante correspondiente se llama menor** de la matriz de orden p.

Por ejemplo , si tengo la matriz de orden 3x4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Como la matriz solo tiene 3 filas , la matriz no tiene menores de orden superior a 3.

Serán menores de orden 1 por ejemplo los siguientes $|a_{11}|, |a_{23}|; |a_{31}|$....En total hay 12 menores de orden 1

Los siguientes determinantes serán menores de orden dos

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$......entre otros

Los siguientes determinantes serán menores de orden 3

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$

Definición:

Sea $A \in M_{mxn}$ se dice que el rango de A, $ran(A)$, es K, si existe por lo menos un menor de orden K no nulo y siendo nulos todos los menores de orden superior a K. (**El orden del mayor menor no nulo da el rango de la matriz**)
A partir de aquí vamos a ver el método práctico del Orlado para el cálculo de

rangos.

Definición

Sea $A \in Mmxn$ y elegido en ella un menor de orden K, se entenderá por orlar dicho menor, al formar otro menor de orden K+1 añadiendo al primero los elementos de una fila y una columna que no formen parte del menor dado.

Se puede demostrar que "si orlando un menor de orden K distinto de cero todos los determinantes de orden K+1 que se pueden formar son nulos entonces cualquier otro menor de orden superior a K es también nulo, y por lo tanto el rango de A es K"

Nota importante: según lo anteriormente expuesto si tenemos una matriz cuadrada de orden n, tal que su determinante sea no nulo entonces su rango es n.

En la práctica para calcular el rango de una matriz se busca un menor de orden 2 no nulo.

Se elige una columna y se orla con las filas restantes:

- Si todos los orlados son nulos se suprime la columna y se repite la operación con otra columna.
- Si hay un orlado no nulo comenzamos de nuevo y lo orlamos igual que el anterior. El proceso termina cuando no quedan columnas.

Ejemplo

- Calcular el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como es una matriz cuadrada primero calcularemos su determinante para ver si su rango es 4.

Vemos que |A|= 0 por tanto su $ran(A) \neq 4$.

Seguidamente consideramos un menor de orden 2 no nulo por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ Orlamos por la siguiente columna: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$

cambiamos de fila $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) \geq 3$ y como$|A| = 0 \rightarrow ran(A) = 3$

10 Matriz inversa

En el tema anterior (matrices) se ha visto el concepto de la matriz inversa de una matriz cuadrada y se han calculado inversas de matrices de orden 2 y 3 mediante sistemas de ecuaciones o con el método de Gauss–Jordan. En este apartado veremos una tercera forma de calcular matrices inversas.

Recordemos que una matriz cuadrada A se llama **regular (o inversible)** si existe otra matriz cuadrada, llamada inversa y que se representa por A^{-1} , que multiplicada por la matriz A nos da la matriz identidad.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Vamos a deducir cómo es la matriz inversa. Supongamos una matriz cuadrada A de orden n, aunque para facilitar los cálculos trabajaremos con una matriz de orden 3. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$

Hallamos la traspuesta de la matriz adjunta: $[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$

Multiplicando la matriz A por la traspuesta de su adjunta $[Adj(A)]^t$ tenemos: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot I$

Es decir, al multiplicar A por la traspuesta de su adjunta nos ha aparecido la matriz unidad multiplicada por el determinante:

$$A \cdot [Adj(A)]^t = |A| \cdot I) \rightarrow A \cdot \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = I$$

De donde se deduce que, si el determinante de A no es nulo:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t$$

Como de toda matriz cuadrada se puede hallar su adjunta y luego la traspuesta de ésta, lo único que puede hacer que no exista la inversa es que no exista el factor $\frac{1}{|A|}$, que no existe cuando A = 0 .

Luego:

“La condición necesaria y suficiente para una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero”

Ejemplo

Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Primero tenemos que hallar |A| para ver si es inversible o no:

$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow A\, es\, inversible\, ó\, regular$

Calculamos Adj(A)

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$
$-1A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$
$1A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$
1

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{[Adj(A)]^t}{|A|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & 3 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$