S3r4 | 2022

MATEMÁTICAS : Bachillerato II

Sistemas de Ecuaciones lineales

Apuntes

by Sera

1 Definiciones

1.1 Ecuación lineal

Una ecuación lineal de n incógnitas es una igualdad de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2..., a_n, b \in R$.

A los números $a_1, a_2..., a_n$ se les denomina coeficientes, y al número real b , **término independiente**.

1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema lineal** de m ecuaciones con n incógnitas, es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$[1]\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ ... & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & ... \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

donde los $a_{ij} \in R$ son los coeficientes, b_k los términos independientes y $x_1, ...x_n$ son las incógnitas (números reales que hay que calcular, si existen).

Hablaremos del tamaño $m \times n$ de **un sistema**, donde m hace referencia a la cantidad de ecuaciones, y n a la de incógnitas.

Hemos reservado el primer subíndice de los números a_{ij} para indicar a qué ecuacion pertenecen, y el segundo para indicar a qué variable multiplican.

Así, al variar el índice i en a_{ij} vamos cambiando de ecuación, y al aumentar j nos movemos de izquierda a derecha, recorriendo las columnas en las que aparece alineado todo lo que corresponde a una misma incógnita.

1.3 Solución del sistema.

Una solución de [1] es una $n - upla$,

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

de números reales que hacen que las ecuaciones de [1] se transformen en identidades.

El problema consiste entonces en hallar los **valores de las incógnitas**,

$$x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

tales que se satisfagan las m ecuaciones en [1] y ver cuantas de esas n-uplas existen para el sistema.

Se llama **resolver el sistema de ecuaciones lineales** a hallar todas las soluciones.

1.4 Sistemas equivalentes

Diremos que dos sistemas de ecuaciones lineales con las mismas incógnitas son **equivalentes**, cuando tienen las mismas soluciones.

Ejemplo

Vamos a discutir en este ejemplo tres sencillos sistemas reales de dimensiones 2×2.

- El sistema
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & = & 2, \\ x_1 - x_2 & = & 1, \end{array} \right.$$
tiene una única solución $(x_1, x_2) = (1, 0)$. Es evidente que este par de números es una solución del sistema. Además, es la única, porque si sumamos las dos ecuaciones del sistema obtenemos $3x_1 = 3$, lo que implica $x_1 = 1$. Y al restar eveces la segunda de la primera nos encontramos con $3x_2 = 0$, que sólo puede ser satisfecha por $x_2 = 0$.

- No hay ninguna solución del sistema de ecuaciones $2x2$ siguiente
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & = 4 \\ 2x_1 & +4x_2 & = 136 \end{cases}$$

Las ecuaciones se corresponden gráficamente con dos rectas, ambas con la misma pendiente, Al ser paralelas, no se cortan en ningún punto, es decir, no existe ningún valor que satisfaga a la vez ambas ecuaciones.

- El sistema
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 1, \\ 2x_1 + 4x_2 & = & 2 \end{array} \right.$$
Geométricamente ,tanto la primera como la segunda ecuación se corresponden con la recta cuya pendiente es $-0,5$ y que pasa por el punto $(-1, 1)$, por lo que ambas coinciden en todos los puntos de dicha recta. El sistema se llama compatible por tener solución o puntos comunes entre las rectas, pero se dice que es indeterminado al ocurrir esto en infinitos puntos.

- Este sistema admite infinitas soluciones. Todas las parejas de la forma $(1 - 2\alpha, \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, satisfacen ambas ecuaciones.

2 Tipos de Sistemas

- Si un sistema no tiene ninguna solución, o, equivalentemente, el conjunto solución es vacío, diremos que es **incompatible**; (S.I)

- si existe alguna solución llamaremos al sistema **compatible**(S.D.). Distinguiremos entonces dos casos.

- Cuando la solución es única diremos que el sistema es **compatible determinado**; (SCD)
- y si admite más de una solución diremos que es **compatible indeterminado**. (S.C.I).

Así pues:

$$Sistemas \left\{ \begin{array}{l} Compatibles \quad (S.C.) \left\{ \begin{array}{ll} Determinados & (SCD) \\ Indeterminados & (SCI) \end{array} \right. \\ \\ Incompatibles \quad (S.I) \end{array} \right.$$

2.1 Sistemas Homogéneos

Un sistema se llama **homogéneo** si los términos independientes valen 0. Es decir es un sistema del tipo

$$[2] \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ ... & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & ... \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Es evidente que todo sistema Homogéneo es Compatible, ya que tiene seguro la solución trivial $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

El problema a resolver en estos sistemas es saber si es Determinado(solo esa única solución o Indeterminado(infinitas soluciones))

3 Sistemas equivalentes

Dos sistemas con el mismo número de incógnitas, aunque no tengan el mismo número de ecuaciones, se dice que son equivalentes si tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero es solución del segundo, y viceversa.

4 Métodos de resolución

4.1 Método de Gauss

Necesitamos un método sistemático para la resolución de sistemas lineales de cualquier tamaño.

La idea de este método es muy simple: ir reduciendo en cada paso el problema a un problema que tiene una ecuación menos y una incógnita menos. Este método es conocido como **método de eliminación de Gauss**.

El nombre del método se debe al matemático Carl Friederich Gauss (1777-1855)

La idea de este método es transformar, por medio de la eliminación inteligente de incógnitas, el problema original en un problema de sencilla solución.

En el próximo ejemplo mostramos uno de estos sistemas lineales de fácil solución, del tipo de los que intenta conseguir el método ideado por Gauss.

Ejemplo 1

Busquemos tres números reales x, y y z que satisfagan

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 8, \\ 2y + z & = & 8 \\ z & = & 2. \end{array} \right.$$

Éste es un sistema 3×3 muy fácil de resolver. De la última ecuación se despeja

$$z = 2.$$

Con este valor de z sustituimos en al segunda ecuación y tenemos

$$2y + 2 = 8 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3.$$

Finalmente con los valores de y y z hallados "subimos" a la primera ecuación y sustituyendo se tiene que

$$x + 3 + 2 \times 2 = 8 \Rightarrow x = 1.$$

En consecuencia, el sistema tiene una única solución, que es

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 2.$$

Podemos escribir esta solución como la lista de tres números reales $(1, 3, 2)$.

El conjunto de soluciones del sistema es $\{(1, 3, 2)\}$. es por tanto un S.C.D.

Notarás que en el ejemplo hemos abandonado la notación (x_1, x_2, x_3) para referirnos a las incógnitas, que pasaron a llamarse (x, y, z).Para problemas con pocas incógnitas es corriente usar las letras x, y o z

Ejemplo 2

Mostraremos ahora con un ejemplo como el método de Gauss permite transformar el problema de calcular las soluciones de un sistema lineal en el problema de resolver un sistema lineal como el anterior.

Busquemos las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 8, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x + y + z = 4. \end{array} \right.$$

.

Paso 1. Comenzamos por hacer desaparecer la variable x de todas las ecuaciones menos una", usando el siguiente procedimiento: para eliminar la x en la segunda ecuación le restamos la primera; como x aparece en la tercera ecuación con un factor 2 multiplicamos la primera ecuación por 2, y luego la restamos de la tercera. Obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 8, \\ y-z &=& -8, \\ -y-3z &=& -12. \end{array}\right.$$

Si estuviéramos trabajando con el sistema general , restarímos a la i-ésima ecuación, para $i = 2, 3, \ldots$, el resultado de multiplicar la primera por el cociente a_{i1}/a_{11} entre el coeficiente a_{i1} que aparece multiplicando a x_1 en la ecuación i, y el coeficiente a_{11} que x_1 tiene en la primera ecuación.

Si x_1 no aparece en la primera ecuación entonces a_{11} es cero y no podemos hacer este cálculo. En este caso cambiaremos el orden de las ecuaciones, y pondremos en primer lugar una ecuación en que la variable x_1 aparezca.

El resultado del paso 1 es que x no aparece en la segunda ni en la tercera ecuación. Si miramos esas dos ecuaciones aisladamente nuestro problema se reduce a un sistema 2×2, con incógnitas y y z. Una vez resuelto este problema, más pequeño que el original, podremos calcular x usando la primera ecuación. De esta manera el algoritmo de eliminación va reduciendo el tamaño del problema.

Paso 2. Haremos desaparecer la variable y de la tercera ecuación. Simplemente sumamos la segunda ecuación a la tercera, y nuestro sistema se transforma en

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 8, \\ y-z &=& -8, \\ -4z &=& -20. \end{array}\right.$$

Nuestro sistema ya alcanzó la forma de escalera que lo vuelve de fácil resolución, por lo que detenemos aquí nuestro algoritmo.

Paso 3. Resolvemos este último sistema. De la tercera ecuación concluimos $z = 5$. Sustituyendo hacia arriba y despejando de la segunda ecuación obtenemos $y = -3$. Finalmente, usamos los valores de hallados en la primera ecuación, para concluir que $x = 1$.

Último paso. Verificación. Parece que hemos resuelto el problema. Pero, ¿qué nos garantiza que las soluciones halladas son las soluciones del problema original?

Podemos verificar que es así, sustituyendo los valores $x = 1$, $y = -3$ y $z = 5$ en el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \times 1 + 1 \times (-3) + 2 \times 5 = 8, \\ 1 \times 1 + 2 \times (-3) + 1 \times 5 = 0, \\ 2 \times 1 + 1 \times (-3) + 1 \times 5 = 4. \end{array}\right.$$

Vemos que, efectivamete, nuestra presunta solución es realmente solución del sistema.

O.K, hemos hallado la solución del sistema.Pero solo hemos verificado que lo que tenemos es solución. Pero, ¿será realmente **la única** solución? ¿No podrá haber otras? ¿Qué asegura que nuestras transformaciones no modifican el conjunto de soluciones del sistema?

4.2 TEOREMA

Si en un sistema lineal de ecuaciones se sustituye una ecuación por el resultado de sumar a esa misma ecuación un múltiplo de otra, entonces el sistema resultante tiene el mismo conjunto solución que el sistema original.
DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el sistema original sea

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

y que sumamos a la ecuación j el resultado de multiplicar ambos miembros de la ecuación i por un número β. Obtenemos un nuevo sistema

$$(S')\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + \beta(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = b_j + \beta b_i, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Para probar que ambos son equivalentes deberemos ver que cualquier solución de S es solución de S' y viceversa. Es decir, que $Sol(S) = Sol(S')$, donde $Sol(S)$ y $Sol(S')$ son los conjuntos solución de S y S' respectivamente.

Veamos primero que cualquier solución de S es solución de S'.

Sea $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ una solución de (S). Es claro que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ satisface todas las ecuaciones de (S') salvo, tal vez, la j-ésima, pues son las mismas que las de (S). Como $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ debe verificar la i-ésima y j-ésima ecuación de (S) se tiene que

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i, \quad a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j.$$

Multiplicando ambos miembros de la primera igualdad por β y sumando miembro a miembro, se deduce inmediatamente que

$$a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n + \beta(a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n) = b_j + \beta b_i.$$

Por lo tanto, también la j-ésima ecuación de S' se satisface.

La verificación de que cualquier solución de S' es también solución de S emplea esencialmente el mismo argumento. Igual que antes es claro que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ debe verificar todas las ecuaciones de (S) salvo tal vez la j-ésima. Por la j-ésima ecuación en S' sabemos que

$$a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n + \beta(a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n) = b_j + \beta b_i,$$

en tanto que la i-ésima implica

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i.$$

Multiplicamos ambos miembros de la i-ésima por β, y restamos de la ecuación que ocupa el lugar j, para concluir

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j.$$

Esto muestra que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in Sol(S)$

Por tanto

Llamaremos **transformaciones elementales** a las siguientes operaciones:

1. sumar a una ecuación un múltiplo de otra;
2. intercambiar de lugar dos ecuaciones;
3. multiplicar una ecuación por un número distinto de cero,

En conclusión:

Si a un sistema de ecuaciones le aplicamos una transformación elemental obtenemos un sistema equivalente al original

4.2.1 Notación matricial

Para determinar las soluciones de un sistema es suficiente con conocer los coeficientes y los términos independientes del mismo. Por tanto si sabemos a qué ecuación pertenecen y a qué incógnita multiplican tendremos una estructura conocida que nos permite discutir y resolver el sistema .

Como sabemos ,una matriz es un conjunto de números en filas y columnas, que nos permite almacenar y manejar ordenadamente información numérica.

En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales cada fila corresponderá a una misma ecuación, y cada columna a una misma incógnita.

Representaremos una **matriz** A de m filas por n columnas (o simplemente matriz $m \times n$) de entradas

$$a_{ij}, \quad i = 1, 2 \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

con la notación

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

En este capítulo, salvo mención expresa en sentido contrario, las entradas a_{ij} serán números. Es decir, serán elementos de $\mathbb{R}$.

$$Ejemplo: A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix},$$

La ubicación de cada número dice cuáles son los índices que le corresponden: el primer índice i corresponde a las fila, que se cuentan de arriba a abajo, y el segundo índice j corresponde a la columnas, que se cuentan de izquierda a derecha.

Es frecuente denominar a una matriz con una letra mayúscula, como A, por ejemplo. Y a sus entradas con una expresión como a_{ij}, la letra minúscula correspondiente acompañada de los subíndices i y j. Por supuesto, indicaremos con a_{ij} la entrada que está en la fila i y la columna j.

$$A = ((a_{ij}))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}.$$

Dado un sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases}$$

llamaremos **matriz del sistema** a la matriz A que tiene dimensión $m \times n$, donde m y n son respectivamente iguales al número de ecuaciones e incógnitas del sistema, y que está formada por sus coeficientes. Esto es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Llamaremos, **matriz ampliada del sistema** a la matriz $m \times (n+1)$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

que incorpora los términos independientes. Corrientemente escribiremos esta matriz en la forma

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

para recordar que estamos considerando la matriz ampliada de un sistema, cuya última columna tiene un significado diferente a las anteriores. También las representaremos en la forma breve $A|B$.

Naturalmente, toda la información que necesitamos sobre el sistema lineal está encerrada en la matriz ampliada $A|B$. Veremos más adelante que, en realidad, mucha de la información relevante acerca del sistema sólo depende de la matriz A formada por sus coeficientes.

Podemos expresar tambien el sistema como una operación de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$A \cdot X = B,$$

Las definiciones anteriores introducen una notación más compacta (matricial) para un sistema de ecuaciones, que nos libera de escribir una y otra vez los nombres que hemos escogido para las incógnitas. Veamos un ejemplo. Consideremos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y + 2z = 9, \\ 3x + 6y - 5z = 0, \\ 2x + 4y - 3z = 1. \end{array} \right.$$

Entonces la matriz del sistema y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A|B = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Esta notación más compacta simplificará la escritura e implementación del algoritmo de eliminación de Gauss.

Cada fila de la matriz del sistema corresponde a una de las ecuaciones del sistema. Las operaciones del método de Gauss se traducirán entonces en operaciones sobre las **filas** de la matriz. En particular, las **transformaciones elementales** serán, en este contexto, las siguentes:

1. Sumar a una fila el resultado de multiplicar otra por un número cualquiera.

2. Intercambiar de lugar dos filas.

3. Multiplicar una fila por un número $\alpha \neq 0$.

Cada incógnita del sistema queda en correspondencia con una de las columnas de la matriz A del sistema. Encontrar una entrada a_{ij} igual a 0 en la matriz A es equivalente a que la incógnita x_j no aparezca en la i-ésima ecuación.

4.3 Método de Gauss con matrices

Vamos a reescribir los pasos del ejemplo en notación matricial. Esto permite conseguir bastante economía en la notación. El sistema original queda expresado en la forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Cada ecuación está ahora representada por una fila de coeficientes en la matriz ampliada del sistema.

Llamaremos **pivote** a la primera entrada no nula de cada fila de una matriz. Con esta terminología podemos describir la eliminación de Gauss como un procedimiento que busca, a través de la aplicación reiterada de las transformaciones elementales, dejar un único pivote por columna. En cada paso de la escalerización, una vez escogido un pivote, lo empleamos para eliminar todas los otros pivotes de la misma columna.

Paso 1. Las operaciones que antes hacíamos con las ecuaciones deben hacerse ahora sobre filas de coeficientes. Escogemos el pivote 1 en la primera fila, y restamos entonces esta primera fila de la segunda para hacer aparecer un cero en el primer lugar de la segunda fila (esto es equivalente a hacer desaparecer la variable x en la ecuación correspondiente). Luego multiplicamos la primera fila por 2 y la restamos de la tercera. El resultado es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & -3 & -12 \end{array}\right).$$

Sólo un pivote, el 1 de la primera fila, aparece en la primera columna.

Paso 2. Sumamos la segunda fila a la tercera y llegamos a la matriz escalerizada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{array}\right).$$

Observemos que con la representación matricial hemos aligerado bastante la notación.

La nueva matriz ampliada es una representación del sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + y + 2z &=& 8, \\ y - z &=& -8, \\ -4z &=& -20, \end{array}\right.$$

cuya solución podemos calcular directamente. La tercera ecuación implica $z = 5$. Al sustituir en la segunda podemos despejar $y = -3$. Finalmente, la primera implica $x - 3 + 2 \times 5 = 8$, por lo que $x = 1$. El procedimiento de escalerizar y resolver el sistema escalerizado sustituyendo hacia arriba nos permite hallar el conjuntosolución del sistema original.

Llamaremos **matriz escalerizada** a una matriz que cumpla las siguientes condiciones:

1. todas las filas, salvo quizás la primera, comienzan con una sucesión de ceros;

2. cada fila tiene al principio por lo menos un cero más que la fila inmediata superior.

Escalerizar una matriz es llevarla a una forma escalerizada por medio de transformaciones elementales . Si E es una matriz que se obtiene escalerizando otra matriz A, entonces diremos que E es una forma escalerizada de A. Diremos que un **sistema esta escalerizado** si su matriz ampliada lo está.

Escalerizar un sistema es encontrar otro sistema escalerizado equivalente. Naturalmente, escalerizar un sistema es equivalente a escalerizar la matriz ampliada del sistema.

Pondremos en práctica la técnica con un nuevo ejemplo. Resolver sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + x_6 & = & 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_6 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + 3x_6 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 3x_6 & = & -1 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

El proceso comienza fijando la entrada no nula de la primera fila como pivote y utilizándola para lograr ceros en el resto de la primera columna. El resultado es la matriz

$$\begin{array}{cccccc|rl} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & \longleftarrow F_2 + F_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & \longleftarrow F_3 - F_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & \longleftarrow F_4 - F_1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 2 & -2 & \longleftarrow F_5 - F_1 \end{array}$$

Hemos anotado al margen de la matriz las transformaciones que en este primer paso de la escalerización fueron hechas a la matriz ampliada del sistema.

En el ejemplo, se utilizaba a_{22} en el 2º paso del método para conseguir ceros en la segunda columna. Esto no es posible pues la segunda columna ya tiene todas sus entradas, salvo la primera, nulas. En consecuencia, el segundo escalón deberá estar en la tercera columna, donde aparece la entrada no nula a_{23}. Por debajo de a_{23} sólo hay ceros, así que continuamos nuestro algoritmo usando el pivote 2 de la entrada a_{34}. He aquí la matriz que se obtiene, junto con la indicación de las operaciones realizadas:

$$\left(\begin{array}{cccccr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow F_5 - 2F_3 \end{array}$$

En el tercer paso operaremos sobre la sexta columna:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow F_5 + F_4. \end{array}$$

Ya tenemos la forma escalerizada, con pivotes en las columnas primera, tercera, cuarta y sexta. El sistema lineal, equivalente al sistema original en el sentido de que tiene exactamente las mismas soluciones, que corresponde a esta matriz es

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & = & 1, \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & = & 1, \\ & & & & & & 2x_4 & + & 4x_5 & + & 2x_6 & = & 0, \\ & & & & & & & & & & 2x_6 & = & 2. \end{array}$$

De la última ecuación resulta $x_6 = 1$. Con esta información vamos a la tercera y concluimos

$$x_4 + 2x_5 = -1. \tag{1}$$

Esto no permite determinar x_4 ni x_5, pero podemos dejar expresada una incógnita en términos de la otra. Expresemos x_4, una variable que corresponde a una columna con un pivote en la forma escalerizada, en términos de x_5, como

$$x_4 = -1 - 2x_5.$$

Sustituyendo en la 2ª ecuación obtenemos

$$x_3 = \frac{x_5}{2} + 1.$$

Combinando toda esta información con la primera ecuación resulta

$$x_1 + 2x_2 + \frac{3x_5}{2} + 1 = 0.$$

Nuevamente escogemos despejar la variable que corresponde al pivote para escribir

$$x_1 = -2x_2 - \frac{3x_5}{2} - 1.$$

Concluimos entonces que todas las soluciones del sistema son de la forma

$$Sol = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(-1 - 2\lambda - \frac{3\mu}{2}, \lambda, 1 + \frac{\mu}{2}, -1 - 2\mu, \mu, 1\right),$$

donde λ y μ son dos parámetros reales que podemos fijar como queramos. La solución no es única, pero puede describirse completamente en términos de las variables $\lambda\ y\ \ \mu$. El sistema será SCI.

Ejemplo

Veamos un ejemplo más en el que trataremos un sistema trabajando sobre su representación matricial.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = -1, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 1. \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

La llevaremos a una forma de escalera. Comenzamos por sumar la primera fila a la tercera:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ahora sumaremos la segunda a la tercera y la cuarta: $F3- > F3 - F2$ y $F4- > F4 - F2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Para obtener la forma escalerizada intercambiamos las filas tercera y cuarta:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Este sistema es incompatible(S.I), porque la cuarta ecuación es equivalente a

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -1.$$

Como el miembro de la izquierda vale 0 para cualquier elección de las incógnitas, esta ecuación no puede satisfacerse. El conjunto solución del sistema es el vacío.

Otro ejemplo

$$\left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{array}\right). \tag{2}$$

Busquemos ahora eliminar las entradas que corresponden a la variable z en la primera y segunda ecuación. Dividiremos la última ecuación entre -4. Luego la sumaremos a la segunda. También haremos la operación de multiplicar la última fila por 2 y restarla de la primera. Obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Por último, hacemos aparecer un 0 en el segundo lugar de la primera fila, restando la segunda ecuación a la primera. El resultado final es

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

El sistema asociado a esta matriz es, naturalmente,

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -3, \\ z = 5, \end{cases}$$

cuya resolución es inmediata.

4.4 Resolución mediante matriz inversa

Si la matriz A tiene matriz inversa, es decir, si se cumple que:

• m = n : el sistema tiene que tener tantas ecuaciones como incógnitas, es decir, la matriz de los coe- ficientes debe ser cuadrada.

• $|A| \neq 0$: el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser distinto de cero, para que la matriz tenga inversa.

Podemos escribir:

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

5 Teorema de Rouché-Fröbenius

Hasta ahora hemos calculado las soluciones de los sistema pero sería interesante saber cuántas soluciones tiene un sistema antes de empezar a calcular cuáles son. De este apartado se ocupa el Teorema de Rouché-Fröbenius

El teorema de Rouché-Fröbenius permite calcular el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en función del rango de la matriz de coeficientes, del rango de la matriz ampliada asociadas al sistema y del numero de incógnitas que posea el sistema.

Un sistema lineal de ecuaciones: $:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$

Puede ser descrito mediante una matriz : $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$

dicha "matriz asociada al sistema" ; está obtenida por la yuxtaposición de la matriz $:A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ de los coeficientes y una posterior columna $:b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ llamada "columna de términos independiente". Las matrices A y $(A|b)$ son llamadas respectivamente "de los coeficientes" y "Matriz ampliada".

El enunciado del "'teorema de Rouché-Fröbenius"' es el siguiente:

Existen soluciones para el sistema (Sistema compatible)$\Longleftrightarrow$ el rango de la matriz es igual al rango de la matriz ampliada.

Si estudiamos los rangos de las matrices nos podemos encontrar con las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} r(A) = r(A*) \quad \Rightarrow \quad S\ Compatible & \begin{cases} r(A) = n & S\ C.\ Determinado \\ r(A) < n & S\ C.\ Indeterminado \end{cases} \\ \\ r(A) \neq r(A*) \quad \Rightarrow \quad S\ Incompatible \end{cases}$$

5.1 Ejemplo 1 teorema de Rouché-Fröbenius

Estudiar las posibles soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + z - t & = 1 \\ 2x - y + z & = 2 \\ x - y + z + t & = 1 \end{cases}$

Estamos ante un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas. La matriz del sistema es:$A=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\2&-1&1&0\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow$ Matriz $3\times4\rightarrow$

Su rango máximo será 3 La matriz ampliada es: $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&1\\2&-1&1&0&2\\1&-1&-1&1&1\end{array}\right)\rightarrow$ Matriz 3×5 . Su rango máximo será 3 Vamos a estudiar el rango de ambas matrices.

Buscamos en A si existe un menor de orden 3 no nulo. Por ejemplo: $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}$

$|\ c_1c_2c_3\ |=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=-2\neq0\rightarrow rango(A)=3$

Si $rango(A)=3$ implica necesariamente que $rango(A/B)=3$, ya que el menor |C1C2C3 | también está incluido en la matriz ampliada $A|B$. Por lo tanto: $rango(A)=rango(A/C)=3<4(\textit{número de incógnitas})\rightarrow SCI$ infinitas soluciones

con un parámetro libre.

5.2 Ejemplo 2 Teorema de Rouché-Fröbenius

Estudiar las posibles soluciones del sistema { x−2 y−z=−1 a x− y+2 z=2 x+2 y+a z=3 }$\left\{\begin{array}{ll}x-2y-z&=-1\\ax-y+2z&=2\\x+2y+az&=3\end{array}\right.$ en función de a .

Estamos ante un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

La matriz del sistema es: $A=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\a&-1&2\\1&2&a\end{pmatrix}\rightarrow$ Matriz 3×3 $\rightarrow$ Su rango máximo será 3 La matriz ampliada es: $A|B=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1\\a&-1&2&2\\1&2&a&3\end{pmatrix}\rightarrow$ Matriz 3×4 . Su rango máximo será 3

Vamos a estudiar el rango de ambas matrices. Buscamos en A si existe un menor de orden 3 no nulo.

Por ejemplo: $|\ c_1c_2c_3\ |=\begin{vmatrix}1&-2&-11\\a&-1&2\\1&2&a\end{vmatrix}=-a-4-2a-(1+4-2a^2)=2a^2-3a-9$

- Si $2a^2-3a-9\neq0\rightarrow$ rango(A)=rango(A|B)=3(número de incógnitas) $\rightarrow$
  - Si $a\neq3$ y $a\neq\frac{-3}{2}$ el Sistema es Compatible Determinado (solución única).

- Si $2a^2-3a-9=0 \rightarrow a=3$ ó $a\neq \frac{-3}{2}$ $\rightarrow$ rango(A)$\neq$3 $\rightarrow$ Estudiamos el rango de la matriz ampliada A|B .

  - Si $a=3 \rightarrow \mid c_1c_2c_3 \mid = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$
  - Estudiamos si existe otro menor de orden 3 con determinante no nulo. $\mid c_1c_2c_4 \mid = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\mid c_1c_2c_4 \mid = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$ $\mid c_2c_3c_4 \mid = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ Por lo tanto el rango(A/B)$\neq$3 .
  - Busquemos un menor de orden 2 no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5\neq 0$ $\rightarrow$ rango(A|B)=2=rango(A)<3(número de incógnitas) $\rightarrow$ Si $a=3$ Sistema Compatible Indeterminado con un parámetro libre (infinitas soluciones).
  - Si $a=\frac{-3}{2} \rightarrow A|B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ \frac{-3}{2} & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{-3}{2} & 3 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Ya sabemos que $\mid C1C2C3 \mid = 0$. Estudiamos si existe otro menor de orden 3 con determinante no nulo.$\mid c_1c_2c_4 \mid = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ \frac{-3}{2} & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3-4+3-(1+4+9) = -4-14 = -18 \neq 0$ $\rightarrow$ Por lo tanto el rango de la matriz ampliada resulta rango(A|B)=3$\neq$rango(A) $\rightarrow$ Si $a=\frac{-3}{2}$ Sistema Incompatible (no existe solución).

5.3 Sistemas Homogéneos

Un sistema homogéneo tendrá siempre solución, ya que el rango de A siempre coincide con el de A*, pues la última columna de la matriz ampliada son ceros.

La solución será única si el rango de A es igual al número de incógnitas, y tendrá infinitas soluciones si el rango de A es menor que el número de incógnitas.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & 0 \end{array}\right)$$

Un sistema homogéneo es siempre COMPATIBLE.

En el caso particular $n=m$, un sistema homogéneo tendrá sólo la solución trivial si el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

6 Regla de Cramer

La regla de Cramer es un teorema que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer (1704-1752).

La regla de Cramer es de importancia teórica porque da una expresión explícita para la solución del sistema.

Sin embargo, para sistemas de ecuaciones lineales de más de tres ecuaciones su aplicación para la resolución del mismo resulta excesivamente costosa: computacionalmente, es ineficiente para grandes matrices y por ello no es usado en aplicaciones prácticas que pueden implicar muchas ecuaciones. Sin embargo, como no es necesario pivotar matrices, es más eficiente que la eliminación gaussiana para matrices pequeñas.

La Regla de Cramer dice que: "un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, en el cual el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, admite una solución y sólo una, es decir, es un sistema compatible determinado".

Si $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es un sistema de ecuaciones, $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes del sistema, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es el vector columna de las incógnitas, y $\mathbf{b}$ es el vector columna de los términos independientes, entonces la solución al sistema se presenta así:

$$x_j = \frac{|M_j|}{|\mathbf{A}|}$$

Donde $\mathbf{M}_j$ es la matriz resultante de reemplazar la j-ésima columna de $\mathbf{A}$ por el vector columna $\mathbf{b}$. Hágase notar que para que el sistema sea compatible determinado, el determinante de la matriz $\mathbf{A}$ ha de ser no nulo.

En efecto:

Al ser un sistema de Cramer, el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero y por tanto admite inversa, A^{-1} .

Multiplicando los dos miembros de la ecuación por la inversa de A:

$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Operando las matrices e igualando los términos correspondientes tenemos:

$x_1 = \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}}{|A|}$

$x_2 = \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \ldots + b_n A_{n2}}{|A|}$

...

$x_n = \frac{b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \ldots + b_n A_{nn}}{|A|}$

Observamos que los numeradores de estas fracciones son los desarrollos de ciertos determinantes por los elementos de una línea, con lo cual tenemos:

$$x_1 = \frac{\left|\begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\right|}{|A|};$$

$$x_2 = \frac{\left|\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\right|}{|A|},$$

$\vdots$

$$x_n = \frac{\left|\begin{pmatrix} a11 & a_{12} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}\right|}{|A|}$$

Ejemplo

Dado el sistema

$$\begin{cases} 3x + 1y = 9 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

Su forma matricial es

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ el sistema es compatible determinado , por la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9 \cdot 3 - 1 \cdot 13}{3 \cdot 3 - 1 \cdot 2} = 2 \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 13 - 9 \cdot 2}{3 \cdot 3 - 1 \cdot 2} = 3$$

Ejemplo

La regla para un sistema de $3x3$, con una división de determinantes:

$$: \begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + iz = l \end{cases}$$

Que representadas en forma de matriz es: : $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$

x, y, z pueden ser encontradas como sigue: :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

Ejemplo

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1z = & 1 \\ 2x + 0y + 1z = & 2 \\ -1x + 1y + 2z = & 4 \end{cases} :$$

Expresado en forma matricial: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Los valores de x, y y z serían::

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}$$