Geometría

Ejercicios Selectividad

2000-2023

2º Bach MATII

by S3r4

MATEMÁTICAS CCNN (MATII)

$2^{\underline{o}}$ Bachillerato

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA

SELECTIVIDAD Y PAU
2000-2023

Año 2000

1. (2 puntos) Dados los vectores $u = (a, 1 + a, 2a)$, $v = (a, 1, a)$ y $w = (1, a, 1)$, se pide:
   (a) (1 punto) Determinar los valores de a para que los vectores u, v y w sean linealmente dependientes.
   (b) (0,5 puntos) Estudiar si el vector $\vec{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores u, v y w para el caso $a = 2$. Justificar la respuesta.
   (c) (0,5 puntos) Justificar razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad $u \cdot (v \wedge w) = 0$
   Nota: el símbolo $\wedge$ significa producto vectorial.(Modelo 2000 - Opción A)

2. (2 puntos)
   (a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(4, 0)$ es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.
   (b) Comprobar que el anterior lugar geométrico es una cónica. Indicar el tipo de cónica que es y hallar sus focos.(Modelo 2000 - Opción A)

3. (3 puntos)
   (a) (1 punto) Encontrar la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.
   (b) (1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q yR.
   (c) (1 punto) Encontrar todos los puntos S del plano determinado por P, Q yR de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.(Modelo 2000 - Opción B)

4. (2 puntos) Resolver la siguiente ecuación vectorial:
   $\overrightarrow{x} \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$sabiendo que $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6}$, donde $\bigwedge$ significa "producto vectorial".(Junio 2000 - Opción A)

5. (2 puntos)
   (a) Determinar el centro y el radio de la esfera:$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z - 4 = 0$
   (b) Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano $z = 0$.(Junio 2000 - Opción A)

6. (3 puntos) Sean los puntos $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$.Se considera el plano π , perpendicular al segmento PQ por su punto medio.
   (a) (1 punto) Obtener la ecuación del plano π.
   (b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre π.
   (c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y en el origen de coordenadas.(Junio 2000 - Opción B)

7. (3 puntos) Sea la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0$.
   (a) (0,5 puntos) Determinar su centro y su radio.
   (b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro paralelo al eje OY .
   (c) (1 punto) Obtener el centro y el radio de la circunferencia que resulta al cortar dicha esfera con el plano $z = 0$.

(d) (1 punto) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje OX.(Septiembre 2000 - Opción A)

8. (2 puntos) Se consideran los puntos $A(1, a, 0), B(1, 1, a - 2)$ y $C(1, -1, a)$.

   (a) (1 punto) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a.

   (b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.(Septiembre 2000 - Opción B)

9. (2 puntos) Sean la recta $r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{3}$ y el plano $\pi : 2x - y + kz = 0$

   (a) (1 punto) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.

   (b) (1 punto) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.(Septiembre 2000 - Opción B)

Año 2001

10. (3 puntos) Sea la parábola $x^2 = 4y$. Sean u y v las rectas tangentes a la parábola en los puntos P de abscisa a y Q de abscisa b, $(a_1, b), (a_1, 0), (b_1, 0)$.

    (a) (1,5 puntos) Hallar las coordenadas del punto R de intersección de u y v.

    (b) (1 punto) Hallar la relación entre a y b para que las rectas u y v sean perpendiculares.

    (c) (0,5 puntos) Probar que en el caso del apartado anterior, el punto R está en la directriz de la parábola.(Modelo 2001 - Opción A)

11. (2 puntos) Los vértices de un triángulo son $A(-2, -1), B(7, 5)$ y $C(x, y)$.

    (a) Calcular el área del triángulo en función de x e y.

    (b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que la anterior área es 36.(Modelo 2001 - Opción B)

12. (2 puntos) Sea $A(1, 1)$ y $B(-1, 1)$ dos puntos del plano.

    (a) Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B razonando dónde están situados sus centros.

    (b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y = x$.(Modelo 2001 - Opción B)

13. (3 puntos) Dado el plano $\pi : x + y + z = 1$, la recta$r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

    (a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P .

    (b) (1 punto) Hallar el punto P_0 , simétrico de P respecto de r.

    (c) (1 punto) Hallar el punto P_{00} , simétrico de P respecto de π.(Junio 2001 - Opción A)

14. (3 puntos) Sean las rectas $r : x - 2 = \frac{y-1}{k} = \frac{z+1}{-2}$ $s : \left\{\begin{array}{c} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right.$

    (a) (1 punto) Hallar k para que r y s sean coplanarias.

(b) (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

(c) (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.(Junio 2001 - Opción B)

15. (2 puntos) Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.(Septiembre 2001 - Opción A)

16. (2 puntos) Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación $CB = -3CA$

    (a) (1 punto) Calcular el valor que toma k en la expresión $AC = kAB$

    (b) (1 punto) Si $A(1,2,-1)$ y $B(3,6,9)$, hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.(Septiembre 2001 - Opción A)

17. (3 puntos) Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1,0,0), B(1,1,1), C(-2,1,0)$ y $D(0,1,3)$.

    (a) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro $ABCD$.

    (b) (1 punto) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.

    (c) (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.(Septiembre 2001 - Opción B)

Año 2002

18. (2 puntos) Se considera una varilla AB de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación:$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

    (a) (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.

    (b) (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.(Modelo 2002 - Opción A)

19. (2 puntos) Sean las rectas

$$s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z \;; r : \left\{ \begin{array}{c} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{array} \right.$$

    (a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a.

    (b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$(Modelo 2002 - Opción A)

20. (3 puntos) Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

    (a) (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.

    (b) (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

    (c) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3,0)$ razonando la respuesta.(Modelo 2002 - Opción B)

21. (3 puntos) Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son: $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144; C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$

(a) (2 puntos) Identificar C_1 y C_2 . Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

(b) (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices dela cónica C_1 .(Junio 2002 - Opción A)

22. (2 puntos) Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta $s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ x = t \end{cases}$

es perpendicular al plano $\pi : 2x + y - z = 2$.(Junio 2002 - Opción B)

23. (2 puntos) Los puntos $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.Se pide:

    (a) (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

    (b) (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.(Junio 2002 - Opción B)

24. (3 puntos) Se consideran las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

    (a) (1 punto) Calcular la distancia entre r y s.

    (b) (1 punto) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.

    (c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$.(Septiembre 2002 - Opción A)

25. (2 puntos) Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.(Septiembre 2002 - Opción B)

26. (2 puntos) Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2;\ \pi_2 : x + ay + z = -1;\ \pi_3 : ax + y + z = 3$$

Se pide:

    (a) (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

    (b) (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.(Septiembre 2002 - Opción B)

Año 2003

27. (3 puntos) Se consideran el plano π y la recta r siguientes:$\pi : x + y - 2z = 6$;$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$:

    (a) Se pide:

    (b) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto del plano π.

    (c) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto de la recta r.(Modelo 2003 - Opción A)

28. (3 puntos) Se consideran los puntos:$A(1,1,1), B(0,-2,2)C(-1,0,2)D(2,-1,-2)$.Se pide:

    (a) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

    (b) (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C.

    (c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.(Modelo 2003 - Opción B)

29. (3 puntos) Dadas las rectas en el espacio:

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-}{-2} = \frac{z}{1} \; s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

    (a) (1,5 punto) Hallar la distancia entre las dos rectas.

    (b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.(Junio 2003 - Opción A)

30. (3 puntos) Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1 \text{ y la recta } s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

    (a) (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

    (b) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π' .(Junio 2003 - Opción B)

31. (2 puntos) Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.(Septiembre 2003 - Opción A)

32. (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1} \qquad s : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$$

    (a) (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

    (b) (1 puntos) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.(Septiembre 2003 - Opción A)

33. (3 puntos) Dado el plano $\pi : x + y + z = 0$ y la recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$ se pide:

    (a) (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.

    (b) (2 puntos) Encontrar un plano π' , paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.(Septiembre 2003 - Opción A)

Año 2004

34. (3 puntos) Dado el plano:$\pi : x + y + az + 1 = 0$ y las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \; r' : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \; r'' : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3t \\ x = t \end{cases} \text{ Se pide:}$$

(a) Calcular el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r, r' y r'' estén alineados (1,5 puntos).

(b) Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos (0,75puntos).

(c) Calcula la distancia de dicha recta al origen (0,75 puntos).(Modelo 2004 - Opción A)

35. (2 puntos) Se consideran las rectas

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x - z + 2 = 0 \\ 2y - mz = 6 \end{cases}$$

(a) Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.

(b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.(Modelo 2004 - Opción B)

36. (2 puntos) Calcular las ecuaciones parámetricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta $r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$ (Modelo 2004 - Opción B)

37. (3 puntos) Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} ; \pi_1 : 2 - 3x + 2y - z = 0 \; ; \; \pi_2 : 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

(a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

(b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.

(c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2 .(Junio 2004 - Opción A)

38. (3 puntos)

(a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos,para los distintos valores del parámetro k

$\pi_1 : 2x + 3y + kz = 3$

$\pi_2 : x + ky - z = -1$

$\pi_3 : 3x + y - 3z = -k$

(b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.(Junio 2004 - Opción B)

39. (3 puntos) Sea el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

(a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0, 0, 0)$ respecto de π.

(b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ.

(c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenados.(Septiembre 2004 - Opción A)

40. (2 puntos)

(a) (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.

(b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.(Septiembre 2004 - Opción B)

41. (2 puntos) El plano $\pi : 2x-2y+z=-2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

    (a) (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

    (b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.

    (c) (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.(Septiembre 2004 - Opción B)

Año 2005

42. (3 puntos) Dados los puntos $A(-1,1,1), B(1,-3,-1)$ y $C(1,0,3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta: $r : \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$ de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.(Modelo 2005 - Opción A)

43. (3 puntos) Se considera la recta: $r : \frac{x}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m :s : $\left\{\begin{array}{l} 3x-y=8-12m \\ \\ y-3z=7-3m \end{array}\right.$

    (a) (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.

    (b) (1 punto) Para el caso de $m=0$, hallar la distancia entre las dos rectas.(Modelo 2005 - Opción B)

44. (3 puntos) Dado el punto $P(1,3,-1)$, se pide:

    (a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

    (b) (2 puntos) Calcular los puntos de la recta $r : \left\{\begin{array}{l} x=3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1-4\lambda \end{array}\right.$ cuya distancia a P es igual 3.(Junio 2005 - Opción A)

45. (3 puntos) Dadas las rectas $r : \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$;$s : \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$

    (a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

    (b) (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre r y s.(Junio 2005 - Opción B)

46. (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : x+z=\lambda$$

$$\pi_2 : 4x+(\lambda-2)y+(\lambda+2)z=\lambda+2$$

$$\pi_3 : 2(\lambda+1)x-(\lambda+6)z=-\lambda$$

(Septiembre 2005 - Opción A)

47. (2 puntos) Se consideran las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{c} x-y=3 \\ \\ x+y-z=0 \end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{c} x-z=4 \\ \\ 2x-y=7 \end{array}\right.$$

(a) (1 punto) Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.

(b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la rectas con la recta t obtenida en el apartado anterior.(Septiembre 2005 - Opción A)

48. (3 puntos) Se considera la familia de planos: $mx+(m-2)y+3(m+1)z+(m+1)=0$ siendo m un parámetro real. Se pide:

    (a) (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.

    (b) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1,1,0)$.

    (c) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:$s:\left\{\begin{array}{l} x-2z+1=0 \\ -y+z+1=0 \end{array}\right.$

    (Septiembre 2005 - Opción B)

Año 2006

49. (2 puntos) Un punto de luz situado en P (0, 1, 1) proyecta la sombra de la recta:

    $x=y=-z$ sobre el plano $\pi: x-z=0$.

    Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z=1$.(Modelo 2006 - Opción A)

50. (2 puntos) Se consideran las rectas:

$$r: \frac{x}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{2} \qquad s:\left\{\begin{array}{c} x=3+\lambda \\ y=-4+3\lambda \\ z=0 \end{array}\right.$$

    Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2,-1,1)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.(Modelo 2006 - Opción A)

51. (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r: \frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{1} \quad s: \frac{x}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$$

    (a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

    (b) (1,5 puntos) Calcular la distancia de s al plano anterior.(Modelo 2006 - Opción B)

52. (3 puntos) Sean las rectas:

$$r: \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-4} \quad s: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$$

    (a) (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

    (b) (1,5 puntos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.(Junio 2006 - Opción A)

53. (2 puntos) Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $v = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.(Junio 2006 - Opción B)

54. (3 puntos) Se consideran los puntos A(0, 1, 0) y B(1, 0, 1).Se pide:

    (a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ que equidistan de A y B.

    (b) (0,5 puntos) Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.

    (c) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.(Septiembre 2006 - Opción A)

55. (3 puntos) Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1, 0, 0), B(0, \lambda, 0)$ y $C(0, 0, 4)$. Se pide:

    (a) (1,5 puntos) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen), sea 2.

    (b) (1,5 puntos) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O.(Septiembre 2006 - Opción B)

Año 2007

56. (2 puntos) Se considera la recta$s : \left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + 2 + 3z = 0 \end{array}\right.$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Dado el punto $Q(0, 0, 0)$ de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1.(Modelo 2007 - Opción A)

57. (2 puntos)

    (a) (1,5 puntos) Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta$r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda y \end{array}\right.$; es perpendicular al plano $\pi_2 : 2x + y - z = 2$

    (b) (0,5 puntos) Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .(Modelo 2007 - Opción A)

58. (3 puntos) Se consideran el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta:

    $s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ y el plano $\pi : x + y + z = 0$. Se pide:

    (a) (1,5 puntos) Obtener un punto P_0 , simétrico de P respecto del plano π.

    (b) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P , corta a la recta r y es paralela al plano π.(Modelo 2007 - Opción B)

59. (3 puntos) Dados el punto A(1, −2, −3), la recta $s : \left\{\begin{array}{l} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ y el plano $\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0$, se pide:

(a) (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

(b) (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.(Junio 2007 - Opción A)

60. (3 puntos) Sean los puntos $A(\lambda, 2, \lambda), B(2, -\lambda, 0), C(\lambda, 0, \lambda + 2)$

    (a) (1 punto) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?

    (b) (1 punto) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

    (c) (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.(Junio 2007 - Opción B)

61. (2 puntos) Hallar los puntos de la recta $r : \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{1}$ cuya distancia al plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.(Septiembre 2007 - Opción A

62. (2 puntos) Sea consideran las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{array} \right.$$

    Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.(Septiembre 2007 - Opción A)

63. (3 puntos) Sean las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{array} \right.$$

    (a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

    (b) (1,5 puntos) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.(Septiembre 2007 - Opción B)

Año 2008

64. (3 puntos) Sean los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(1, 1, -4)$.

    (a) (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.

    (b) (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

    (c) (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta $r : \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$(Modelo 2008 - Opción A)

65. (2 puntos) Hallar los puntos de la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{array} \right.$ cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$(Modelo 2008 - Opción B)

66. (2 puntos) Dados los puntos $A(1, 3, -2), B(2, 2k + 1, k)$ y $C(k + 1, 4, 3)$, se pide:

    (a) (1 punto) Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.

(b) (1 punto) Para el valor $k = 0$ hallar el área del triángulo ABC.(Modelo 2008 - Opción B)

67. (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.

(b) (1,5 puntos) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s.(Junio 2008 - Opción A)

68. (2 puntos) Dados los puntos$A(0, 0, 1), B(1, 0, -1), C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$, se pide:

(a) (0,5 puntos) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.

(b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

(c) (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto D al plano π.(Junio 2008 - Opción B)

69. (2 puntos) Dados el plano $\pi : 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:

(a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P .

(b) (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r.

(c) (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY .

(d) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR(Junio 2008 - Opción B)

70. (2 puntos) Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 0)$, se pide:

(a) (1 punto) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

(b) (1 punto) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $dist(P, S) = 2dist(Q, S)$, donde ”dist” significa distancia.(Septiembre 2008 - Opción A)

71. (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3} \qquad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.(Septiembre 2008 - Opción A)

72. (3 puntos) Dados el plano:

$$\pi_1 : x + y + z = 1 \text{ y la recta: } r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4} \text{ se pide:}$$

(a) (1 punto) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1 .

(b) (2 puntos) Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1, π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.(Septiembre 2008 - Opción B)

Año 2009

73. (3 puntos) Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$ y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π, se pide:

(a) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de π y r.

(b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r.

(c) (1,5 puntos) Sea Q el punto intersección de r y t. Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de s, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r.(Modelo 2009 - Opción A)

74. (3 puntos) Dados el punto $P(1,-1,2)$ y el plano $\pi : 2x - y + z = 11$, se pide:

(a) (1,5 puntos) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P . Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π.

(b) (1,5 puntos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.(Modelo 2009 - Opción B)

75. (3 puntos) Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

(a) (1 punto) Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π.

(b) (1 punto) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $z = 0$.

(c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0, y = 0, z = 0$.(Junio 2009 - Opción A)

76. (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1} \ , \qquad s : \frac{x+2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1} \text{ se pide:}$$

(a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

(b) (1 punto) Determinar la distancia entre las rectas r y s.

(c) (1 punto) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s.(Junio 2009 - Opción B)

77. (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a} \ , \qquad s : \frac{x3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

(a) determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.(Septiembre 2009 - Opción A)

78. (2 puntos) Dado el plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.(Septiembre 2009 - Opción A)

79. (3 puntos) Dada la recta: Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} \ ,$$

y el plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π .(Septiembre 2009 - Opción B)

80. (3 puntos) Dadas las rectas Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{1} \ ,s : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\lambda}{2} \text{ se pide}$$

(a) (1 punto) Determinar para qué valor, o valores, del parámetro λ las rectas r, s se cortan en un punto.

(b) (1 punto) Para λ = 23 calcular las coordenadas del punto P intersección de las rectas r, s.

(c) (1 punto) Para λ = 23 hallar la ecuación general del plano π determinado por las rectas r y s.(Septiembre 2009 - Opción A (Reserva))81

81. (3 puntos) Se pide:

    (a) (1 punto) Demostrar que si tres vectores v_1, v_2 y v_3 son perpendiculares entre sí entonces se verifica que:

    $$|v_1 + v_2 + v_3|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 \text{ ,donde } |w| \text{ denota módulo del vector w}$$

    (b) (1 punto) Dados los vectores $v_1(1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ hallar un vector v_3 tal que:$|v_1 + v_2 + v_3|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2$

    (c) (1 punto) Dado el vector $v(1, 2, 3)$, hallar los vectores v_1 y v_2 que cumplan las tres condiciones siguientes:

    i. $v_1$tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;
    ii. $v_1$es perpendicular a v_2 ;
    iii. $v = v_1 + v_2$ Septiembre 2009 - Opción B (Reserva))

Año 2010

82. (3 puntos) Dadas las rectas:

    $$r : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2} \ , \qquad s : \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2} \text{ se pide:}$$

    (a) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.

    (b) (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.(Modelo 2010 - Opción A)

83. (2 puntos) Dados los puntos $A(2, 2, 3)$ y$B(0, -2, 1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$que equidistan de A y de B.(Modelo 2010 - Opción B)

84. (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta:

    $$r : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

    contenida en π , obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenada $O(0, 0, 0)$.(Modelo 2010 - Opción B)

85. (3 puntos) Dadas las rectas:

    $$r : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1} \ , \qquad s : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4} \text{ se pide:}$$

    (a) (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s

    (b) (1 puntos) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s.(General-Junio 2010 - Opción A)

86. (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} , \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s.

(b) (1 punto) Hallar la distancia desde el punto $A(0, 1, -1)$ a la recta s.(General-Junio 2010 - Opción B)

87. (2 puntos) Sea el plano π que contiene a los puntos $P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0)$ y $R(0, 0, 3)$. Se pide:

(a) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P, Q y R.

(b) (1 punto) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π .(General-Junio 2010 - Opción B)

88. (3 puntos) Dadas la recta:

$$r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3} \text{ ,se pide:}$$

(a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

(b) (2 puntos) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r.(Específica-Junio 2010 - Opción A)

89. (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r : x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5} \text{ se pide:}$$

(a) (1 punto) Calcular los valores de a para los que la recta r está contenida en el plano π .

(b) (1 punto) Para el valor de $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$,y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π .

(c) (1 punto) Para a = –2, halla el seno del ángulo que forman r y π .(Específica-Junio 2010 - Opción B)

90. (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 3 \end{array} \right. \qquad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

(a) (2 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.

(b) (1 puntos). Hallar la mínima distancia entre las rectas r_1 y r_2 .(General-Septiembre 2010 - Opción A)

91. (3 puntos) Dados el plano $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y el plano π_2 determinado por el punto $P(0, 2, 4)$ y los vectores $v_1 = (0, 2, 6)$ y $v_2 = (1, 0, b)$, se pide:

(a) (1 punto). Calcular los valores de a y b para que $\pi_1 \; y \; \pi_2$ sean paralelos.

(b) (1 punto). Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 .

(c) (1 punto). Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 .(General-Septiembre 2010 - Opción B)

92. (3 puntos) Dadas las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{c} x=1+\lambda \\ y=2 \\ z=3-\lambda \end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{c} x+2y-z=-1 \\ x+y=-1 \end{array}\right. \text{ se pide:}$$

Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $P(0,1,-2)$ y corta a las rectas r y s.(Específica-Septiembre 2010 - Opción A)

93. (2 puntos)Dadas las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{c} 2x+y-z=-2 \\ x-2y=-1 \end{array}\right. \qquad s:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{2} \text{ se pide:}$$

(a) (1 punto). Dados los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(a,3,-3)$, determinar el valor de a para que la recta t que pasa por los puntos A y B, sea paralela a s.

(b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.(Específica-Septiembre 2010 - Opción B)

Año 2011

94. (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos:$\pi_1: 5x-y-7z=1, \qquad \pi_2: 2x+3y+z=5$(Específica-Septiembre 2010 - Opción B2.12.Año 2011

95. (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}\ , \qquad s:\frac{x-5}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{1} \text{ se pide:}$$

(a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la rectas r y s.

(b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.(Modelo 2011 - Opción A)

96. (2 puntos) Dados los planos $\alpha\equiv 2x+y+2z+1=0$ y $\beta\equiv x-2y+6z=0$, se pide:

(a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α con β.

(b) (1 punto). Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2},1,0)$(Modelo 2011 - Opción A)

97. (3 puntos) Dados los puntos $A(1,-3,0), B(3,1,-2), C(7,2,3), D(5,-2,5)$ y $E(1,0,2)$, se pide:

(a) (1 punto). Demostrar que los puntos A,B,C y D son coplanarios.

(b) (1 punto). Demostrar que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo y calcular su área.

(c) (1 punto). Hallar la distancia del punto E al plano π determinado por los puntos A,B,C y D(Modelo 2011 - Opción B)

98. (3 puntos)

(a) (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las recta

$r_1 : \{x = y = z \qquad r_2 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

(b) (1,5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas $r_4 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}$; $r_5 : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$(Junio 2011 - Opción A)

99. (3 puntos) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1$, $\pi 2 \equiv x - y + 2z = 1$ se pide:

(a) (0,5 puntos). Estudiar su posición relativa.

(b) (1,5 puntos). En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos, en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.(Junio 2011 - Opción B)

100. (2 puntos) Se pide:

(a) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

(b) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{v} = (-2, 1, 1)$.

(c) (0,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P .(Junio 2011 - Opción B)

101. (3 puntos). Dados los planos

$\pi_1 : 2x + 3y + z - 1 = 0;$ $\pi_2 : 2x + y - 3z - 1 = 0$, y la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z+2}{2} \text{ .Se pide:}$$

(a) (1 punto). El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2 .

(b) (1 punto). El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY, XZ e YZ.

(c) (1 punto). La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2 .(Septiembre 2011 - Opción A)

102. (3 puntos). Dado el punto $P(0, 1, 1)$ y las rectas: $r : \frac{x-11}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ $\quad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ se pide:

(a) (1'5 puntos). Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.

(b) (1'5 puntos). Determinar la recta que pasa por el punto P , tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s.(Septiembre 2011 - Opción B)

Año 2012

103. (3 puntos) Dados los puntos $A(1, -1, 2), B(2, 0, -1), C(0, 1, 3)$, se pide:

(a) (2 puntos). Hallar todos los puntos que equidistan de A, B y C. ¿Cuales de ellos pertenecen al plano $\pi : 2x + 2y + 2z + 1 = 0$?

(b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que pasa por A, B y C.(Modelo 2012 - Opción A)

104. (3 puntos) Dados los planos de ecuaciones:$\pi : x - 2y + 2z + 4 = 0, \qquad \pi' = 2x + 2y - z - 2 = 0$ se pide:

(a) (1 punto). Obtener la ecuación en forma continua de la recta que determinan.

(b) (1 punto). Hallar todos los puntos que equidistan de π y π' .(Modelo 2012 - Opción B)

105. (2 puntos) Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}\ , \qquad s : \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{x-8}{-2}$$ se pide:

(a) (1 punto). Hallar la posición relativa de las rectas r y s.

(b) (1 punto). Hallar la distancia mínima entre r y s.

106. (3 puntos) Dados los puntos $P_1(1, 3, -1), P_2(a, 2, 0), P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

(a) (1 punto). Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

(b) (1 punto). Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

(c) (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.(Junio 2012 - Opción A)

107. (3 puntos) Sean las rectas $r_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}$ $r_2 : \left\{\begin{array}{l} x = -1-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 5 \end{array}\right.$:

(a) (1 punto). Estudiar su posición relativa.

(b) (2 puntos). Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2 .(Junio 2012 - Opción B)

108. (2 puntos)

(a) (1 punto). Dados los puntos $P(2, 1, -1), Q(1, 0, 2)$ y la recta $r : \left\{\begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3 \end{array}\right.$ determinar los puntos de r que equidistan de P y Q.

(b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r.(Junio 2012 (coincidente)- Opción A)

109. (2 puntos) Una de las caras del paralelepípedo H tiene vértices en los puntos $A(4, 2, 8), B(6, 4, 12), C(6, 0, 10)$ y $D(8, 2, 14)$.

(a) (1 punto). Si el punto $E(6, 8, 28)$ es otro de los vértices, hallar el volumen de H.

(b) (1 punto). Hallar el punto E_0 simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.(Junio 2012 (coincidente)- Opción A)

110. (3 puntos) Dadas la recta r y la familia de rectas s,mediante$r : \left\{\begin{array}{l} x + 2y = -3 \\ z = 1 \end{array}\right.$ $s : \left\{\begin{array}{l} 2x + 2y + z = a \\ x + z = 0 \end{array}\right.$ .Se pide:

(a) (1,5 puntos). Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.

(b) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando estas se cortan.(Junio 2012 (coincidente)- Opción B)

111. (2 puntos) Se dan la recta r y el plano π , mediante $r : \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$, $\pi \equiv 2x+y-2z-7 = 0$ Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.(Septiembre 2012 - Opción A)

112. (2 puntos) Sean las rectas $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$ $s : \left\{ \begin{array}{l} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{array} \right.$

   (a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2,3,4)$ y es paralelo a las rectas r y s.

   (b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4,-1,2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.(Septiembre 2012 - Opción A)

113. (3 puntos) Dado el punto $P(2,1,-1)$, se pide:

   (a) (0,5 puntos). Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3,0,2)$.

   (b) (1,25 puntos). Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r : x-1 = y-1 = z$

   (c) (1,25 puntos). Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x+y+z = 3$.(Septiembre 2012 - Opción B)

Año 2013

114. (2 puntos)

   (a) (1 punto). Hallar el punto de corte entre el plano $\pi_1 \equiv 6x-y+3z = -2$ y la recta r que pasa por el punto $P(1,2,0)$ y es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x+3y-z = 8$.

   (b) (1 punto). Hallar el punto común a los tres planos $\pi_3; \pi_4; \pi_5$ siguientes:$\pi_3 \equiv 5x+2y+7z = 4$; $\pi_4 \equiv x+2y-3z = 10$ y π_5 el plano definido por las rectas $r_1 : \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z+3$;r_2;$x+2 = y = \frac{z+7}{2}$(Modelo 2013 - Opción A)

115. (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x-y+2z = 1$ y la recta $r : \frac{x}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ se pide:

   (a) (1 punto). Determinar la posición relativa entre el plano π y la recta r .

   (b) (1 punto). Determinar el plano que contenga a r y pase por $P(1,1,1)$.(Modelo 2013 - Opción A)

116. (3 puntos)

   (a) (1 punto). Hallar, si existe, el punto de corte de las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x-y=2 \\ x+y+z=3 \end{array} \right.$ $s : \left\{ \begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-\lambda \end{array} \right.$

   (b) (1 punto). Determinar el valor de a para que los planos

   $$\pi_1 : x+2y+z = 3 \qquad \pi_3 : 2x+2y+4z = 3 \qquad \pi_2 : 2x+3y-z = 5 \qquad \pi_4 : x+3y = a$$

   tengan un único punto en común.

(c) (1 punto). Hallar la recta paralela a los planos $\pi_5 : 2x + 5y - z = 2$; $\pi_6 : 6x - y + z = 8$ que pasa por el punto $P(1, 5, -3)$.(Modelo 2013 - Opción B)

117. (3 puntos) Dados el punto P $(-1,\ 0,\ 2)$ y las rectas$r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$ se pide:

   (a) (1 punto). Determinar la posición relativa de r y s.

   (b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.

   (c) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.(Junio 2013 - Opción A)

118. (2 puntos) Dados el punto $P(1, 0, -1)$, plano $\pi \equiv 2x-y+z-1 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}$ se pide:

   (a) (1,5 puntos).Determinar la ecuación del plano que pasa por P es paralelo a r y perpendicular al plano π .

   (b) (0,5 puntos).Hallar el ángulo entre r y π .(Junio 2013 - Opción B)

119. (3 puntos) Dada la familia de rectas $r_\alpha : \begin{cases} z = 0 \\ x - ay - 3 = 0 \end{cases}$ (variando a en R se obtiene toda la familia), se pide:

   (a) (0,75 puntos). Probar que todas las rectas de la familia se cortan en un mismo punto y calcular dicho punto.

   (b) (1,5 puntos). Dado el punto $P(0, 0, 1)$, calcular la ecuación del plano π a que pasa por P y contiene a la recta r_α. Probar que la recta que pasa por P y por el punto $Q(3, 0, 0)$ está contenida en el plano π a paratodos los valores de a.

   (c) (0,75 puntos). Determinar para qué valores de a la distancia del punto $O(0, 0, 0)$ al plano de ecuación $x - ay + 3z = 3$ es 1/2.(Junio 2013 (coincidente)- Opción A)

120. (3 puntos) Dadas las rectas: $r : \begin{cases} 4x + y + 5z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}$ $s : \begin{cases} y - z - 3 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$, se pide:

   (a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas.

   (b) (1 punto). Hallar la mínima distancia entre r y s.

   (c) (1 punto). Hallar el punto simétrico del origen respecto de la recta s.(Junio 2013 (coincidente)- Opción B)

121. (2 puntos) Dados los puntos $A(2, -2, 1), B(0, 1, -2), C(-2, 0, -4), D(2, -6, 2)$, se pide:

   (a) (1 punto) Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.

   (b) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC.(Septiembre 2013 - Opción A)

122. (2 puntos) Dados el punto $P(1,2,-1)$ y el plano $\pi \equiv x+2y-2z+2=0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

    (a) (1 punto). Hallar el punto de tangencia P' .

    (b) (1 punto). Hallar la ecuación de S.(Septiembre 2013 - Opción A)

123. (3 puntos) Sean r_A la recta con vector dirección $(1,\lambda,2)$ que pasa por el punto $A(1,2,1)$, r_B la recta con vector dirección $(1,1,1)$ que pasa por $B(1,-2,3)$, y r_C la recta con vector dirección $(1,1,-2)$ que pasa por $C(4,1,-3)$. Se pide:

    (a) (1 punto). Hallar λ para que las rectasr_A y r_B se corten.

    (b) (1,5 puntos). Hallar λ para que las rectas r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C .

    (c) (0,5 puntos). Hallar el ángulo que formanr_B y r_C .(Septiembre 2013 - Opción B)

124. (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x-2y+z=6$ y la recta $r : \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{m}=z$, se pide:

    (a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π según los valores de m.

    (b) (1 punto). Para $m=-2$, determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π .

    (c) (1 punto). Para $m=-2$, determinar el punto de corte de r y π .(Septiembre 2013 (coincidente)- Opción A)

125. (3 puntos) Dado el haz de planos de R^3 definido por:$\pi_a \equiv x+2y+az-1=0$ (al variar a en $\Re$ se obtienen todos los planos del haz) y la recta $r : \frac{x-1}{2}=y+3=\frac{z}{2}$, se pide:

    (a) (1 punto). Determinar para qué valores de a la recta r es paralela al plano π_α .

    (b) (1 punto). Razonar si hay algún valor de a tal que la recta r es perpendicular al plano π_α , y en caso afirmativo calcular dichos valores de a.

    (c) (1 punto). Si $a=1$, obtener los puntos de la recta r cuya distancia al plano π_1 es $\sqrt{6}$(Septiembre 2013 (coincidente)- Opción B)

Año 2014

126. (3 puntos) Dados el punto $P(1;1;1)$ y los planos $\pi_1 \equiv 3x+ay+z=0;\qquad \pi_2 \equiv ax+y+2z=0;\qquad \pi_3 \equiv x+y-z=0$;se pide:

    (a) (1 punto). Calcular los valores de a para los que los planos se cortan en una recta.

    (b) (1 punto). Para $a=2$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

    (c) (1 punto). Hallar el punto P' proyección de P sobre el plano π_3 .(Modelo 2014 - Opción A)

127. (3 puntos)

    (a) (1 punto) Determinar si se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre la rectas

$$r : \left\{\begin{array}{c} x=-2+\lambda \\ y=-6+2\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right. \quad s : \left\{\begin{array}{c} x+y-4=0 \\ 2x+z-6=0 \end{array}\right.$$

(b) (2 puntos) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular común a las dos rectas anteriores.(Modelo 2014 - Opción B)

128. (3 puntos)Dados el punto $P(1,0,1)$, el plano $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ y la recta s :s : $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$, se pide:

   (a) (1 punto). Calcular el punto P_0 simétrico a P respecto de π .
   (b) (1 punto). Hallar la distancia de P a r.
   (c) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY y OZ.(Junio 2014 - Opción B)

129. (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta r : $\left\{ \begin{array}{r} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{array} \right.$

   (a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π .
   (b) (1 punto). Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π .
   (c) (1 punto). Determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$, corta a r, y es paralela a π .(Junio 2014 - Opción B)

130. (2 puntos) Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$, se pide:

   (a) (1 punto). Obtener las rectas que pasan por el origen de coordenadas,son paralelas al plano π y cortan al plano $z = 0$ con un ángulo de 45 grados.
   (b) (1 punto). Hallar la ecuación de la esfera de centro el origen $O(0,0,0)$ que es tangente a π . (Junio 2014 (coincidente)- Opción A)

131. (2 puntos) Sean los puntos $A(2,1,0)$ y $B(0,1,-4)$. Se pide:

   (a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π respecto del cual A y B son simétricos.
   (b) (1 punto). Calcular los puntos situados sobre la recta determinada por A y B que están a $\sqrt{6}$ unidades de distancia de $P(2,-1,1)$.(Junio 2014 (coincidente)- Opción A)

132. (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 5x - 3y + 4z - 10 = 0$ y la recta $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-8}{-3}$, se pide:

   (a) (1 punto). Hallar la distancia de la recta al plano.
   (b) (1 punto). Hallar la proyección del punto $P(5,-2,1)$ sobre el plano π .
   (c) (1 punto). Hallar la proyección del punto $Q(-1,7,3)$ sobre la recta r.(Junio 2014 (coincidente)- Opción B)

133. (2 puntos) Dados los puntos $A(2,0,-2), B(3,-4,-1), C(5,4,-3)$ y $D(0,1,4)$, se pide:

   (a) (1 punto). Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.
   (b) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.(Septiembre 2014 - Opción A)

134. (2 puntos) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+z-1 = 0$, $\pi_2 \equiv x+z+2 = 0$, $\pi_3 \equiv x+3y+2z-3 = 0$,se pide:

   (a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2 .
   (b) (1 punto). Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.(Septiembre 2014 - Opción A)

135. (3 puntos) Dados el plano π y la recta r siguientes: $\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$,

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

,se pide:

(a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π .

(b) (1 punto). Calcular la distancia entre r y π .

(c) (1 punto). Obtener el punto P' simétrico de $P(3, 2, 1)$ respecto del plano π .(Septiembre 2014 - Opción B)

Año 2015

136. (2 puntos) Dadas las rectas: $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, $s : \begin{cases} x + y = 1 \\ y = z \end{cases}$ se pide:

(a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas. Determinar, en su caso, la intersección entre ambas y el ángulo que forman sus vectores directores.

(b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las direcciones de r y s, y que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.(Modelo 2015 - Opción A)

137. (2 puntos) Dados los puntos $P_1(1, -1, 2), P_2(2, -3, 0)$ y $P_3(3, 1, 2)$, se pide:

(a) (0,5 puntos). Determinar la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.

(b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta r que pasa por P_1 y es perpendicular a π .

(c) (1 punto). Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio $\sqrt{17}$ que son tangentes al plano π en el punto P_1 .(Modelo 2015 - Opción A)

138. (3 puntos) Dados el punto P $(1, 2, -1)$ y las rectas: $r : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 3z = -2 \end{cases}$ $s : \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ se pide:

(a) (1 punto). Calcular la mínima distancia entre r y s.

(b) (1 punto). Determinar el punto P_0 simétrico de P respecto de r.

(c) (1 punto). Determinar los puntos de la recta r que equidistan de los planos XY e YZ.(Modelo 2015 - Opción B)

139. (2 puntos)

(a) (1 punto). Dados vectores $\overrightarrow{u} = (2, 3, 4)$, $\overrightarrow{v} = (-1, -1, -1)$ y $\overrightarrow{w} = (-1, \lambda, -5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tenga volumen 6.

(b) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\overrightarrow{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.(Junio 2015 - Opción A)

140. (2 puntos) Dados el plano $\pi : x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π .(Junio 2015 - Opción A)

141. (3 puntos)Dados el punto $P(-4,6,6)$, el origen de coordenadas O, y la recta $r:\begin{cases} x=-4+4\lambda \\ y=8+3\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}$ se pide:

(a) (1 punto). Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q_0 sobre OP sea el punto medio de este segmento.

(b) (1 punto). Determinar la distancia de P a r.

(c) (1 punto). ¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.(Junio 2015 - Opción B)

142. (3 puntos) Dados la recta $r:\begin{cases} x-y+az=0 \\ ay-z=4 \end{cases}$ con a $\in \mathbb{R}$, y el plano $\pi \equiv x+y+z-2=0$, se pide

(a) (1 punto). Hallar todos los valores de a para los que la recta r es paralela al plano π .

(b) (1 punto). Para $a=2$, determinar la distancia de la recta r al plano π .

(c) (1 punto). Para $a=1$, hallar el seno del ángulo que forman r y π .(Junio 2015 (coincidente)- Opción A)

143. (2 puntos) Dadas las rectas $r:\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=3+3\lambda \end{cases}$ $s:\frac{x+1}{2}=y-5=-(z+2)$, se pide:

(a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y s.

(b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,6,-3)$, está contenida en el plano que determinan r y s y es perpendicular a r.(Junio 2015 (coincidente)- Opción B)

144. (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x+y-z+1=0$ y la recta $r \equiv (x,y,z)=(0,0,1)+\lambda(2,1,0)$, se pide:

(a) (0,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,0,-1)$ y es paralelo a π .

(b) (1 punto). Determinar la distancia del origen de coordenadas a la rectar.

(c) (0,5 puntos). Determinar la distancia del origen de coordenadas al plano π .(Junio 2015 (coincidente)- Opción B)

145. (3 puntos) La recta r pasa por $P(2,-1,0)$ y tiene vector director $(1,\lambda,-2)$; la recta s pasa por $Q(1,0,-1)$ y tiene vector director $(2,4,2)$.

(a) (2 puntos). Calcular $\lambda>0$ para que la distancia entre r y s sea $\frac{9}{\sqrt{59}}$

(b) (1 punto). Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.(Septiembre 2015 - Opción A)

146. (3 puntos) Dados los puntos $P(-1,-1,1), Q(1,0,2)$ y los planos$\pi_1 \equiv x-z=0; \pi_2 \equiv my-6z=0; \pi_3 \equiv x+y-mz=0$se pide:

(a) (1 punto). Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.

(b) (1 punto). Para $m = 3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 .

(c) (1 punto). Hallar la distancia entre los puntos Q y P' , siendo P' elpunto simétrico de P respecto al plano π_1 .(Septiembre 2015 - Opción B)

147. (3 puntos) Dados los puntos $A(2, 1, 1), B(0, 0, -3)$ y $P(1, 1, 1)$, se pide:

(a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P y a la recta que pasa por A y B.

(b) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por A, B y P .

(c) (1 punto). Hallar las coordenadas del punto C que forma con A y B un triángulo rectángulo en C, sabiendo que C está en el eje OX y tiene primera coordenada negativa.(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción A)

148. (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(-1, 4, 1)$ y la recta $r : x - 1 = y + 1 = \frac{z-1}{2}$,, se pide:

(a) (1 punto). Hallar el seno del ángulo formado por π y r.

(b) (1 punto). Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por A y es perpendicular a π .(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción B)

149. (2 puntos) Dado el vector $v = (1, 0, -2)$, se pide:

(a) (1 punto). Obtener todos los vectores de módulo 5 que son perpendiculares al vector v y tienen alguna coordenada nula.

(b) (1 punto). Obtenerlos vectores w tales que $v \times w = (2, -3, 1)$ y tienen módulo $\sqrt{6}$.(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción B)

Año 2016

150. (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta$r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right.$ se pide:

(a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.

(b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2, 1, 1)$.(Modelo 2016 - Opción A)

151. (2 puntos) Dados los puntos$P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 1)$, se pide:

(a) (1 punto). Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q. Describir dicho conjunto de puntos.

(b) (1 punto). Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P, S) = 2d(Q, S)$.(Modelo 2016 - Opción A)

152. (3 puntos) Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0, \qquad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$ se pide:

(a) (1 punto). Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2 .

(b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $P(3, -1, 2)$ al plano π_1 .

(c) (1 punto). Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .(Modelo 2016 - Opción B)

153. (2 puntos) Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0 \quad y \quad \pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

   (a) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean paralelos.

   (b) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

   (c) (1 punto). Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$. (Junio 2016 - Opción A)

154. (2 puntos) Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0, 2, -1); B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.(Junio 2016 - Opción A)

155. (3 puntos) Se consideran los puntos $A(0, 5, 3), B(0, 6, 4), C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:

   (a) (1 punto). Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.

   (b) (1 punto). Calcular el área de dicho paralelogramo.

   (c) (1 punto). Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.(Junio 2016 - Opción B)

156. (3 puntos) Dadas las rectas $r_1 : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$, se pide:

   (a) (1,5 puntos). Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

   (b) (1,5 puntos). Hallar la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a r_1 y a r_2 .(Junio 2016 (coincidente) - Opción A)

157. (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(1, 1, 3)$ y la recta $r : x = y - 2 = \frac{z}{2}$, se pide:

   (a) (1 punto). Hallar la distancia del punto A a la recta r.

   (b) (1 punto). Hallar la proyección del punto A sobre el plano π .(Junio 2016 (coincidente) - Opción B)

158. (2 puntos) Dada una recta r cuyo vector director es $v = (a, b, c)$ con $a, b, c > 0$, se pide:

   (a) (1,5 puntos). Si r forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje OX y de $\frac{\pi}{4}$ con el eje OY , determinar el ángulo que forma la recta con el eje OZ.

   (b) (0,5 puntos). Si $v = (1, 5, 3)$, hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta y que contiene al punto $A(3, 0, 1)$.(Junio 2016 (coincidente) - Opción B)

159. (3 puntos) Dadas las rectas $r_1 : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ y $s : (2 + \lambda, 1 - 3\lambda, \lambda); \lambda \in R$

   (a) (1 punto). Obtener la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 5)$ y corta perpendicularmente a r.

   (b) (1 punto). Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.

   (c) (1 punto). Hallar la distancia entre las rectas r y s.(Septiembre 2016 - Opción A)

160. (2 puntos) Sea π el plano que contiene a los puntos $A(0, 2, 1), B(1, 0, 1)$ y $C(-1, -2, -1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.(Septiembre 2016 - Opción B)

161. (2 puntos) Dado el plano $\pi : 3x + 3y + z - 9 = 0$, se pide:

(a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX.

(b) (1 punto). Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.(Septiembre 2016 - Opción B)

Año 2017

162. (3 puntos) Dadas las rectas

$$r : \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}, \qquad s : \left\{ \begin{array}{c} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 \end{array} \right. ,$$

(a) (1,5 puntos) Comprobar que se cruzan y calcular la distancia entre ellas.

(b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

(c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forma la recta r con el plano $y = 0$.(Modelo 2017 - Opción A)

163. (3 puntos) Dados los puntos $A(2, 1, 1), B(0, 0, -3)$ y $P(1, 1, 1)$, se pide:

(a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

(b) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por A, B y P .

(c) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta que pasa por A y B.(Modelo 2017 - Opción B)

164. (3 puntos) Dados los puntos $P(1, -2, 1), Q(-4, 0, 1), R(-3, 1, 2), S(0, -3, 0)$, se pide:

(a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.

(b) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.

(c) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.(Junio 2017 - Opción A)

165. (2 puntos)

(a) (1 punto). Determine la distancia entre las rectas $r_1 \equiv x = y = z$ y , $\quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{array} \right.$

(b) (1 punto). Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.(Junio 2017 - Opción B)

166. (3 puntos) Dada la recta $r \equiv x - 1 = y = z$, se pide:

(a) (1 punto) Calcular la ecuación de una recta r' , con dirección perpendicular a r, que esté contenida en el plano OXY y pase por el punto $(1, 2, 0)$.

(b) (1 punto) Hallar un plano perpendicular a OXY , que contenga a la recta r.

(c) (1 punto) Calcular la distancia del origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ a la recta r.(Junio 2017 (coincidente) - Opción A)

167. (3 puntos) Dado el punto $P(5, 7, 10)$ y el plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y + 3z = 7$; se pide:

(a) (1 punto) Calcular el punto P_o , simétrico de P respecto de π .

(b) (1 punto) Hallar la posición relativa del plano π y la recta que pasa por el punto $Q(1,1,1)$ y tiene dirección $v = (-10, 2, 2)$.

(c) (1 punto) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices a los puntos P , Q y al origen de coordenadas $O(0,0,0)$.(Junio 2017 (coincidente) - Opción B)

168. (3 puntos) Dadas las rectas $r_1 : \begin{cases} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$, $r_2 : \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$,se pide:

(a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2 .

(b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.

(c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto $P(1,2,3)$.(Septiembre 2017 - Opción A)

169. (2 puntos) Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$. Se pide:

(a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.

(b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.(Septiembre 2017 - Opción B)

170. (2 puntos) Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3,-1), B(3,1,0) \quad y \quad C(2,5,1)$ y se pide

(a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero,isósceles o escaleno.

(b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.(Septiembre 2017 - Opción B)

171. (2 puntos) Dados los planos$\pi_1 \equiv 2x + y - z = 1$ y $\pi_2 \equiv x + 2y + z = 3$, se pide:

(a) (1 punto) Calcular el plano o planos formados por los puntos que equidistan de π_1 y π_2 .

(b) (1 punto) Calcular la recta paralela a π_1 , paralela a π_2 y que pasa por el punto $A(1,1,1)$.(Septiembre 2017 (coincidente) - Opción A)

172. (3 puntos) Dados los puntos $P_1(1,1,3), P_2(0,0,3), P_3(4,-3,1)$ y $O(0,0,0)$. Se pide:

(a) (1 punto) Hallar el plano π que contiene los puntos P_1, P_2, P_3.

(b) (1 punto) Hallar el punto simétrico de O respecto del plano $\pi' \equiv x + y - z + 3 = 0$.

(c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro con vértices O, P_1, P_2, P_3 .(Septiembre 2017 (coincidente) - Opción B)

Año 2018

173. (2,5 puntos) Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x + y + 2z - 1 = 0$,$\pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$ y la recta r , $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$,se pide:

(a) (1,5 puntos) Hallar los puntos de la recta r equidistantes de π_1 y π_2 .

(b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que forma el punto $P(-2,3,2)$ con los puntos de intersección de r con π_1 y π_2 .(Modelo 2018 - Opción A)

174. (2,5 puntos) Dados los planos $\pi_1 \equiv x + y = 0$, $\pi_2 \equiv x = 0$ y el punto $B(-1, 1, 1)$, se pide:

   (a) (1 punto) Determinar el punto B' , simétrico de B respecto del plano π_2.

   (b) (1 punto) Obtener una ecuación de la recta r, contenida en el plano π_1 , paralela al plano π_2 y que pasa por el punto B.

   (c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .(Modelo 2018 - Opción B)

175. (2,5 puntos) Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$;$\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$ se pide:

   (a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de r sus caras en dichos planos.

   (b) (1,5 punto) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2, 1, 3)$ y $B(1, 2, 3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.(Junio 2018 - Opción A)

176. (2,5 puntos) Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{array} \right.$ $s : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$, se pide:

   (a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

   (b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

   (c) (0,5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P .(Junio 2018 - Opción B)

177. (2,5 puntos) Se consideran los puntos $P(1, 1, 1), Q(1, 0, 1), R(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos $A(0, 0, -1)$ y $B(0, 1, 0)$. Se pide:

   (a) (1 punto) Encontrar el punto de intersección de r con el plano que contiene a P , Q y R.

   (b) (0,75 puntos) Hallar un punto T de r, tal que los vectores P Q, P R,–P T sean linealmente dependientes.

   (c) (0,75 puntos) Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son $O(0; 0; 0)$ y los puntos P, Q, R.(Junio 2018 (coincidente)- Opción A)

178. (2,5 puntos) Dadas las rectas $r : \left\{ \begin{array}{c} x = -2 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$, $s : \left\{ \begin{array}{c} - + y + 2z + 4 = 0 \\ -x + 2y + 3z + 5 = 0 \end{array} \right.$,y el punto $P(-1, 2, -1)$, se pide:

   (a) (1 punto) Determinar la posición relativa de las rectas r y s.

   (b) (0,75 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que pasa por P y es paralelo a r y a s.

   (c) (0,75 puntos) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices el origen de coordenadas, el punto P y el punto P' proyección de P sobre el plano $z = 0$.(Junio 2018 (coincidente)- Opción B)

179. (2,5 puntos) Se consideran los vectores $u = (-1, 2, 3)$,$v = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:

   (a) (1 punto) Determinar un vector w_1 que sea ortogonal a u y v ,unitario y con tercera coordenada negativa.

   (b) (0,75 puntos) Hallar un vector no nulo w_2 que sea combinación lineal de u y v y ortogonal a v .

(c) (0,75 puntos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores u y v y una de sus diagonales es el segmento OA.(Julio 2018 (extraordinaria)-Opción A)

180. (2,5 puntos) Dados el punto $P(0,-1,1)$ y la recta r, que pasa por el punto $Q(1,0,1)$ y tiene como vector director $v=(0,1,2)$, se pide:

(a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P .

(b) (0,5 puntos) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector SP sea perpendicular a la recta r.

(c) (1,5 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1 , T_2 , contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P .(Julio 2018 (extraordinaria)-Opción B).

Año 2019

181. (2,5 puntos) Dados los puntos $A(1,2,-3); B(1,5,0); C(5,6,-1)$ y $D(4,-1,3)$, se pide:

(a) (1,5 puntos) Calcular el plano π que contiene a los puntos A, B, C y la distancia del punto D a dicho plano.

(b) (0,5 puntos) Calcular el volumen del tetraedro definido por los cuatro puntos dados.

(c) (0,5 punto) Calcular el área del triángulo definido por A, B y C.(Modelo 2019 - Opción A)

182. (2,5 puntos) Dadas las rectas $r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$, $s:\begin{cases} x-y=2 \\ y+z=1 \end{cases}$,se pide

(a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s.

(b) (1 punto) Obtener un plano que contenga a las dos rectas.

(c) (0,5 puntos) Dado el punto $A(3,1,0)$, de la recta s, obtener un punto B, de la recta r, de modo que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a la recta r.(Modelo 2019 - Opción B)

183. (2,5 puntos) Dadas la recta $r\equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=z$ y la recta s que pasa por el punto $(2,-5,1)$ y tiene dirección $(-1,0,-1)$, se pide:

(a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

(b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

(c) (0,5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.(Junio 2019 - Opción A)

184. (2,5 puntos) Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi\equiv x+3y+4z=36$, se pide:

(a) (0,75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

(b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

(c) (0,75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.(Junio 2019 - Opción B)

185. (2,5 puntos) Dados los vectores $\vec{v}=(1,0,-1)$ y $\vec{w}=(1,1,0)$, se pide:

(a) (1 punto) Calcular un vector que sea ortogonal (perpendicular) a v y a w , que tenga módulo$\sqrt{3}/2$, y cuya tercera coordenada sea negativa.

(b) (0,5 puntos) Calcular un vector u ortogonal a v y tal que u, v y w sean linealmente independientes.

(c) (1 punto) Hallar la proyección del punto $P(5, 1, -1)$ sobre el plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.(Junio 2019 (coincidente)- Opción A)

186. (2,5 puntos) Dadas la rectas $s: \begin{cases} x - y = 5 \\ y + z = 1 \end{cases}$, $s': \begin{cases} x + z = 3 \\ y + z = 4 \end{cases}$, se pide:

(a) (1,25 puntos) Escribir unas ecuaciones paramétricas de cada una de las dos rectas y determinar la posición relativa de ambas.

(b) (1,25 puntos) Dado el punto $P(5, 0, 1)$, de la recta r, obtener un punto Q, de la recta s, de modo que el triángulo OPQ sea rectángulo, con ángulo recto en O(0, 0, 0), y calcular las longitudes de los tres lados de dicho triángulo.(Junio 2019 (coincidente)- Opción B)

187. Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$, $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$,

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

(a) (3 puntos) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

(b) (4 puntos) La recta que pasa por $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r.

(c) (3 puntos) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi : x - 2y + az = b$.(Junio 2019 (Valencia)- Opción A)

188. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

(a) (4 puntos) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π.

(b) (4 puntos)y Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{AC}$.

(c) (2 puntos) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C.(Junio 2019 (Valencia)- Opción B)

189. (2,5 puntos) Dados los puntos $A(1, 1, 1), B(1, 3, -3)$ y $C(-3, -1, 1)$, se pide:

(a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

(b) (0,5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores AB, AC y AD sean linealmente dependientes.

(c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.(Julio 2019 (extraordinaria)- Opción A)

190. (2,5 puntos) Dados el plano, $\pi : 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$,y $s: (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1), \quad con \quad \lambda \in R$,se pide

(a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π .

(b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π , que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

191. (0,5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.(Julio 2019 (extraordinaria)- Opción B)

Año 2020

192. (2.5 puntos). Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = & z-1 \\ y = & 2-3z \end{cases}$ $r_2 \equiv \begin{cases} x = & 4+5z \\ y = & 4z-3 \end{cases}$ Se pide:

    (a) (1.5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

    (b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.(Modelo 2020 (ordinaria)- Opción A)

193. Dados los puntos $A(1,1,-2), B(3,-1,4)$ y la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = & 1+3\lambda \\ y = & -2+5\lambda \\ z = & 3 \end{cases}$,se pide:

    (a) (1.5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O(0,0,0)$, P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano $\pi \equiv z = 7$.

    (b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.

    (c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.(Modelo 2020 (ordinaria)- Opción B)

194. Se consideran los puntos $A(0,-4,2), B(3,-2,3)$ y $C(-1,-3,3)$. Se pide:

    (a) (0.75 puntos) Comprobar que el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo, identificando los catetos y la hipotenusa.

    (b) (0.75 puntos) Determinar una ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.

    (c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por los puntos B y C.(Junio 2020 (coincidentes)- Opción A)

195. Dadas la recta $r \equiv \begin{cases} x-z = & 0 \\ x+2y-z = & 4 \end{cases}$ y la recta s que pasa por $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ y tiene dirección $(-1,1,0)$, se pide:

    (a) (0.5 puntos) Estudiar la posición relativa de ambas rectas.

    (b) (1 punto) Calcular la ecuación de un plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s.

    (c) (1 punto) Encontrar una perpendicular común a r y a s.(Junio 2020 (coincidentes)- Opción B)

196. Dadas las rectas$r \equiv \begin{cases} x-y = & 2 \\ 3x-z = & -1 \end{cases}$,$s \equiv \begin{cases} x = & -1+2\lambda \\ y = & -4-\lambda \\ z = & \lambda \end{cases}$,se pide:

    (a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

    (b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.

    (c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.(Junio 2020 - Opción A)

197. Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano π de ecuación $x+2y-3z=4$, se pide:

(a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.

(b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

(c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.(Junio 2020 - Opción B)

Año 2021

198. Se consideran los puntos $A(3,1,2), B(0,3,4)$ y $P(-1,1,0)$. Se pide:

(a) (0.75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo modulo.

(b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P, y de la recta s que contiene a B y al punto $C(2,-1,-2)$.

(c) (0.75 puntos) Calcular el coseno del angulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.(Modelo 2021 - Opción A)

199. Dadas las rectas $r \equiv \left\{\begin{array}{rl} x+2z= & 1 \\ y+z= & 2 \end{array}\right.$ y $s \equiv \left\{\begin{array}{rl} x= & -3+2\lambda \\ y= & 2-\lambda \\ z= & 1+\lambda \end{array}\right.$

(a) (0.75 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta s.

(b) (0.5 punto) Determinar la posición relativa de r y s.

(c) (1.25 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a ambas rectas.(Modelo 2021- Opción B)

200. Sean la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{rl} -x-y+z= & 0 \\ 2x+3y-z+1= & 0 \end{array}\right.$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-z+3=0$. Se pide:

(a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.

(b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z-y=0$.

(c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Año 2022

201. Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1,0,2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3,1,0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi \equiv 2x-y+2z+5=0$. Se pide:

(a) (1.5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π.

(b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma. (Modelo 2022- Opción A)

202. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6$, $\pi_2 \equiv 3x - z = 2$ y el punto $A(1, 7, 1)$, se pide:

(a) (0.5 puntos) Comprobar que π_1 y π_2 son perpendiculares.

(b) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano π_1, otra cara en el plano π_2, y un vértice en el punto A.

(c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de π_1.(Modelo 2022- Opción B)

Año 2023

203. Un deposito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada $ABCD$, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas $A(1, 1, 1)$ y $B(1, 3, 1)$. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x - 3z = 1$ y el vértice sobre el punto A es $A'(1, 1, 6)$. Se pide:

(a) (0.5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA .

(b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

(c) (1 punto) Calcular el volumen del deposito. (Modelo 2023- Opción A)

204. Se consideran las siguientes rectas:

- r, la recta que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{u} = (0, 1, 2)$;
- s, la recta de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x + y - 4 & = 0 \\ x - 2z + 2 & = 0 \end{cases}$;
- t, la recta paralela a s que contiene al punto P.

(a) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.

(b) (0.75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.

(c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.(Modelo 2023- Opción B)