IES Dionisio Aguado.Dep Matemáticas

GEOMETRÍA

3ª hoja de problemas (Matemáticas II)

1. Hallar las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ siendo $A(1,-1,3), B(2,1,0)$ y $C(3,-4,-2)$.

2. ¿Existe algún vector que tenga módulo pero que carezca de dirección y sentido?.

3. Estudiar si son o no linealmente dependientes: $u(1,2,-1)$ y $v(-1,3,2)$.

4. Siendo a,b,c números reales, justificar que $u(0,0,1), v(1,a,b)$ y $w(0,1,c)$ son base de R^3.

5. Hallar las coordenadas de $v(3,-1,2)$ respecto a la base $(-1,0,1),(1,1,0),(1,2,3)$.

6. Calcular λ para que los vectores $(2,3,6),(1,2,3)$ y $(5,\lambda,15)$ sean coplanarios.

7. El vector (0,0,0) ¿puede formar parte de una base?, ¿y de un sistema de generadores?.

8. Estudiar si los siguientes vectores son linealmente independientes o dependientes: $(1,1,1),(1,0,2),(1,7,5)$.

9. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

10. Calcular la ecuación continua, paramétrica y general de la recta que pasa por los puntos $A(5,-2,1) y B(-4,3,2)$.

11. Dada la recta r, encontrar su vector director, 5 puntos de la recta y otros 5 puntos que no sean de la recta.

    (a) r: $\frac{x-11}{4}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{2}$ b)$\left\{\begin{array}{c} x=2t+3 \\ y=-t+6 \\ z=t-1 \end{array}\right.$

12. Encontrar la dirección de todas las rectas perpendiculares a r1 y r2:

    r1:$\left\{\begin{array}{c} x+y-z-1=0 \\ 2x+y+8=0 \end{array}\right.$: r2: :$\left\{\begin{array}{c} x-2y-2z-2=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{array}\right.$

13. Hallar las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano en cada caso:

(a) $A(1,-2,0), u(-1,2,5), v(4,2,3)$

(b) $A(2,2,2), B(-1,4,5), C(4,1,0)$

(c) A(1,2,-1) y vector perpendicular al plano u(-1,2,3)

(d) A(0,0,0) y vector perpendicular al plano v(0,0,8)

(e) Contiene a las dos rectas siguientes que se cortan en P(-1,2,1): r1: $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t+2 \\ z = -t+1 \end{cases}$ r2: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{4}$

(f) Contiene a r1 del apartado anterior y al punto P(-4,2,0).

(g) g) Contiene a las dos rectas siguientes que son paralelas: r1: $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -t-1 \\ z = t+6 \end{cases}$

r2: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$

14. Hallar la ecuación del haz de planos de la recta r1: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Seleccionar de ellos el que pasa por A(-5,1,2).

15. Encontrar el valor de p para que los cuatro puntos siguientes sean coplanarios: A(1,-2,7), B(-2,3,0), C(1,1,1) y D(p,p-2,7).

16. Hallar la posición relativa de r y π:

    (a) r: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ π: x-2y+3z+1=0

    (b) r:: $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$,π:-x+3y+2z+5=0

17. Hallar la osición relativa de r y s:

    (a) r:$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ s:$\frac{x}{1} = \frac{y}{-11} = \frac{z}{-1}$

    (b) r$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$: s: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$

18. Hallar la posición relativa de πy π':

    (a) π: 2x-y-2z+1=0 π': -x-y+3z-2=0

    (b) π : 3x-2y+3z-1=0 π': -3x+2y-3z+3=0

19. Dadas las rectas r1:$\frac{x-2}{2} = \frac{y-k}{3} = \frac{z}{-1}$, r2:$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$, hallar:

    (a) k para que se corten en un punto.

    (b) Hallar ese punto de corte

    (c) Ecuación del plano que determinan.

20. Hallar las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por el punto A(1,-1,-2) y tiene por vector asociado u(3,1,5).

21. Encontrar la dirección de todas las rectas perpendiculares a r_1 y r_2. r_1: $\left\{ \begin{array}{c} x+y-z-1=0 \\ 2x+y+8=0 \end{array} \right.$
r_2: $\left\{ \begin{array}{c} x-2y-2z-2=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{array} \right.$

22. Hallar los puntos de corte de r: $\frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{2}$ con los tres planos coordenados.

23. Encontrar un plano paralelo a π: 5x-2y+8=0 que pase por P(1,1,1).

24. Pasar la recta r directamente a forma continua, sin hallar previamente el vector director: r: $\left\{ \begin{array}{c} x=z-1 \\ y=z+2 \end{array} \right.$

25. Dadas las rectas r1:$x-1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ y r2:$\frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3}$, hallar el punto de intersección, la ecuación del plano que las contiene y la ecua-ción de la perpendicular común.

26. Ecuación de la recta r perpendicular a :π 2x-y+z=0 y que corta a r1: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{1}$ y r2:$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$

27. Sean r: $\left\{ \begin{array}{c} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=3+t \end{array} \right.$ y π: 4x+y+z-9=0. Hallar las ecuaciones de la proyección ortogonal de r sobre π.

28. Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(4,4,1) y corta perpendicularmente a la recta r: .

29. Hallar la ecuación del plano que divide perpendicularmente al segmento de extremos A(-2,-1,-1), B(-1,4,-2) en dos partes iguales.

30. Ecuación de la recta que pasa por A(-2,-1,-1) y es perpendicular al plano de ecuación: π: x+2y+3z-1=0

31. Hallar la ecuación del plano que pasa por A(0,1,2), es paralelo a la recta r: y es perpendicular al plano π 2x-y+z+1=0

32. Dados los puntos A(0,1,1) y B(1,0,-2), hallar la ecuación del plano que pasa por ellos y es perpendicular al plano π : 2x-y+z+1=0

33. 33.- Dadas las rectas r: $\left\{ \begin{array}{c} x=1+t \\ y=-t \\ z=2-3t \end{array} \right.$ y s:$\left\{ \begin{array}{c} x=t \\ y=-2t \\ z=2-3t \end{array} \right.$, determinar los puntos P y Q, en r y s respectivamente, para que el vector PQ sea perpendicular a ambas rectas. Calcular la mínima distancia entre r y s.

34. Tres vértices de un paralelogramo son: A(1,1,0), B(-2,3,1), C(4,-1,2). Hallar el otro.

35. Hallar la recta que es paralela al plano π: 3x+2y-z-4=0, que pasa por A(1,2,-1) y que corta a r:x=y=z.

36. Hallar el área del triángulo A(1,2,0), B(2,0,3), C(0,7,3)

37. Volumen de la pirámide A(1,2,0), B(2,0,3), C(0,7,3), D(8,9,5).

38. Plano que pasando por A(4,2,-1) es perpendicular a $\pi_1$1: x-3y+z-6=0 y π_2: x+4z-8=0.

39. Hallar la proyección ortogonal de r sobre π. r=$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{4}$,π: x-3y+z-2=0

40. Recta que corta a s1 y s2 y es paralela a r.

    (a) s1:$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{5}$ s2: $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-2}{3}$ r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{-1}$

41. Recta perpendicular común a r1 y r2: r1:$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$ r2:$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{4}$

42. Distancia entre r1: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ y r2: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

43. Hallar el ángulo que forman las rectas: r: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ s:$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$

44. Hallar el ángulo que forman los planos: π_1: x+y-3z+1=0 y π_2: 2x-3y+2z+1=0

45. Hallar el ángulo que forman la recta r:$\begin{cases} x+3-z+3=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$. y el plano π_1:2x-y+3z+1=0.

46. Dado el punto P(7,1,2) y la recta r:$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = 1+t \end{cases}$ y el plano π: -x-y+z+1=0. Hallar:

    (a) Distancia de P a r
    (b) Distancia de P a π
    (c) Posición relativa de r y π
    (d) Ángulo de r y π.

47. Distancia y ángulo entre r1 y r2. r1:$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = -1-t \end{cases}$ r2: $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = -1+2t \\ z = -2-2t \end{cases}$

48. Calcular el ángulo del plano x-y=0 con el plano y=0

49. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son A(1,1,1), B(8,2,1), C(-1,3,2).

50. Una línea poligonal ABC, de vértices A(0,0,-1), B(0,2,1), C(1,3,4), se proyecta ortogonalmente sobre el plano x-y+4=0. Hallar la longitud de la poligonal y de su proyección sobre el plano.

51. Hallar la distancia de P(1,2,3) a la recta r: .$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$

52. Hallar la distancia del origen de coordenadas al plano π: 4x+2y-4z+6=0.

53. Hallar la distancia entre las rectas r1:$\frac{x+8}{2}=\frac{y-10}{3}=\frac{z-6}{1}$ y r2:$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{4}$

54. Dado un punto A(1,2,3), hallar su simétrico respecto de la recta r: .$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{5}$

55. Dado el punto C(0,1,4), hallar su simétrico respecto del plano π: 4x-2y-3z+4=0.

56. Dado un cubo de arista 6, hallar la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una de las caras, sabiendo que las rectas de ambas diagonales se cruzan.

57. Dos caras de un cubo están en los planos 2x-2y+z-1=0, 2x-2y+z-5=0. Calcular su volumen.

58. Hallar la ecuación del plano π_1 paralelo al de ecuación x-2y+3z+6=0 y que dista 12 unidades del origen.

59. Dado el plano de ecuación 2x-2y+z-8=0, calcular los puntos de corte con los ejes coordenados y el área del triángulo formado por dichos puntos, así como el volumen del tetraedro formado por dichos tres puntos y el origen de coordenadas.

60. Hallar el baricentro del triángulo A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1).

61. Una recta r1 está contenida en un plano π. Otra r2 es perpendicular a π.. En los dos casos, la ecuación de la recta simétrica es ella misma pero hay una diferencia importante, ¿cuál es?.

62. Dado el tetraedro $ABCD$, $A(1,2,0), B(2,6,0), C(5,3,0), D(3,4,3)$:

    (a) Comprobar que los puntos medios de las aristas AB, AC, BD, DC, están en un mismo plano y hallar su ecuación.

    (b) Comprobar que este plano es paralelo a las rectas de las aristas CB y AD.

63. allar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A(0,0,0), B(2,1,3), C(-1,3,1) y D(4,2,1).

64. Un tetraedro tiene tres vértices A(2,1,0), B(3,4,0) y C(5,1,0), en el plano XY, y el cuarto vértice D sobre la recta $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Hallar las coordenadas del punto D para que el tetraedro tenga volumen 6.

65. Dados los puntos A(a,b,c) y B(p,q,r), calcular las coordenadas del puntos medio del segmento AB.

66. Se define superficie esférica como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia al centro se llama radio. Suponiendo que el centro de la superficie esférica es el punto C(a,b,c) y el radio r, calcular la ecuación de dicha superficie.

67. Sabiendo que el plano tangente a una superficie esférica en un punto de la misma es perpendicular al radio que une dicho punto con el centro, calcular la ecuación del plano tangente a la superficie esférica de centro C(0,0,0) y radio 7 en el punto P(1,1, $\sqrt{47}$).

68. ¿Por qué una silla de 3 patas nunca balancea y una de 4 patas a veces lo hace?

69. Dados los vectores u(a, 1+a, 2a), v(a, 1, a) y w(1, a, 1), se pide: a) Calcular los valores de a para los que los vectores u, v y w son lineal-mente dependientes. b) Estudiar si el vector c(3, 3, 0) depende linealmente de los vectores u, v y w para el caso a=2. c) Justificar razonadamente si para a=0 se cumple la igualdad u.(vxw)=0.

70. Sean las rectas r$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$ y s$\begin{cases} x = 3 - s \\ y = 2 - 2s \\ z = 3 + s \end{cases}$.

    (a) Si P es un punto genérico de la recta r$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$, hallar (en función de t) las coordenadas del punto Q de la recta s tal que la recta PQ es paralela al plano x+y+z=3.

    (b) Hallar el lugar geométrico que describe el punto medio del segmento PQ.

71. Dados los vectores a, b y c, tales que mód(a)=3, mód(b)=1, mód(c)=4 y a+b+c=0. Calcular la siguiente suma de productos escalares: a·b+b·c+a·c

72. ¿Es siempre cierto que (a-b)x(a+b)=2(axb)?. En caso afirmativo justifíquese. En caso contrario, póngase un ejemplo que lo confirme.

73. En el espacio se consideran las rectas r$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$ y $s \begin{cases} x - y - 3z = 2 \\ 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$. Una conducción de agua ocupa la posición de r. En un punto P de esta

conducción se produce una fuga de agua; el correspondiente goteo cae sobre un punto Q de s. Hallar los puntos P y Q.

74. Sean a, b y c tres vectores linealmente independientes. Indicar cual o cuales de los siguientes productos mixtos vale cero: [a+c, a-c, a+b+c], [a+c, b, a+b], [a-c, b-c, c-a]

75. En el espacio se considera la varilla vertical de extremos A(-1, 2, 9) y A'(-1, 2, 0). En dos momentos determinados de un mismo día, las som-bras que proyecta A sobre el plano OXY son los puntos S_1(4, -3, 0) y S_2(1, 6, 0). Se pide:

    (a) La recta que describe la sombra de A a lo largo del día.

    (b) La sombra S_0 de A en el momento en que la sombra de AA' es más cor-ta.

    (c) La sombra S_3 de A en el otro momento del día en que la sombra de AA' tiene la misma longitud que la sombra S_1A'.

76. Sean los planos P ax+by+cz+d=0, Q a'x+b'y+c'z+d'=0 y R a"x+b"y+c"z+d"=0. Se sabe que P es perpendicular a Q, P y R se cor-tan en una recta, Q y R se cortan en otra recta. Calcula a.a'+b.b' y el rango de la matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$. Razona la respuesta.

77. Dados los planos $\begin{array}{l} \pi : mx+y+z=1 \\ \pi_1 : x+my+z=1 \\ \pi_2 : x+y+mz=1 \end{array}$ Estudiar la posición relativa de los mismos según los valores de m.

78. Calcular los puntos de la recta r:$\left\{ \begin{array}{l} x=2+t \\ y=3+t \\ z=5+t \end{array} \right.$ que forman con $O(0,0,0)$; $A(1,-1,1)$ y $C(0,0,1)$ un tetraedro de volumen 11 u^3.

79. Se considera la recta r=$\left\{ \begin{array}{c} 2x-y=1 \\ x-y+2z=-1 \end{array} \right.$. Se pide:

    (a) De todos los planos que se pueden representar por la ecuación de la forma 5x+my-2z+1=0 , probar que hay un único plano π que es paralelo a r. Comprobar si el plano π obtenido contiene o no a la recta r y en caso negativo determinar el plano que es paralelo a π_1 y contiene a r.

    (b) Obtener la ecuación de una recta contenida en π_1 y que sea perpendicular a r.

80. Encontrar los puntos de la recta $r\{1+t, 2t, 3t)/t \in R\}$ que están a distancia 1 del plano $\pi : 2x-y+2z=5$

81. Determinar el valor de λpara que exista una recta s que pase por el punto $(1+\lambda, 1-\lambda, \lambda)$,corte a r' $\left\{ \begin{array}{c} x+y=2 \\ z=1 \end{array} \right.$ .y sea paralela a r $\left\{ \begin{array}{c} x+z=0 \\ y=0 \end{array} \right.$
.

82. La base de una pirámide es un cuadrado ABCD de 2 metros de lado y su vértice V está situado a una altura de 3 metros sobre el centro de la base. Calcular el ángulo que forman los planos ABV y BCV.