S3r4 | 2022

MATEMÁTICAS : Bachillerato II

Geometría :Rectas y planos

Apuntes

by Sera

1. Espacio afín

1.1. Definición Epacio Afín

El **espacio afín** (tridimensional) está constituido por los siguientes elementos.

Un conjunto E_3(a cuyos elementos se les llama PUNTOS), el espacio vectorial R^3 y una aplicación, que a cada par de puntos (P, Q) le asigna un vector $\overrightarrow{v} \in R3$, que se denota $\overrightarrow{v} = PQ$, todo ello de manera que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

- Para cada punto $P \in E_3$ y cada $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, existe un único $Q \in E_3$ que satisface $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$.
- Dados tres puntos $P, Q, yR \in E_3$, se tiene $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

El concepto de distancia entre puntos se hereda de la estructura de espacio Euclídeo: $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$

1.2. Definición Referencia cartesiana

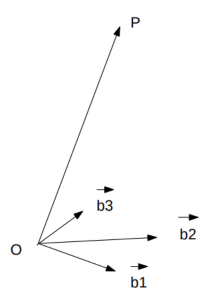


Figura 1:

Dado un punto origen $O \in E^3$ y una base de $\mathbb{R}$, $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}\}$, se dice que es una referencia cartesiana de E_3. Cuando la base es ortonormal la referencia se denomina rectangular, como por ejemplo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Se definen las coordenadas cartesianas de un punto $P \in E_3$ respecto a dicha referencia como las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

1.3. Coordenadas de un punto respecto de un sistema de referencia

Supongamos que hemos fijado un sistema de referencia $R = \{O; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}\}$en E_3 .

Dado un punto $X \in E_3$, el vector $\overrightarrow{OX} \in R^3$ podrá expresarse de manera única en la forma $\overrightarrow{OX} = x_1 \ \overrightarrow{b}_1 + x_2 \ \overrightarrow{b}_2 + x_3 \ \overrightarrow{b}_3$.

Los números x_1, x_2, x_3 se llaman **coordenadas** del punto X respecto del sistema de referencia R.

Es decir, las coordenadas del punto X respecto de R son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OX}$ respecto de la base B.

Se indica en la forma $X(x_1, x_2, x_3)$ respecto de R, o simplemente por $X(x_1, x_2, x_3)$, cuando no haya confusión respecto del sistema de referencia que utilizamos.

En lo que sigue supondremos que enE_3 hemos fijado un sistema de referencia $RO; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, salvo que nos indiquen lo contrario se considerará que la base B elegida en R^3 es la base canónica ortonormal(unitaria y ortogonal).

Observemos que las coordenadas del punto O respecto del sistema de referencia son O(0,0,0).

1.4. Coordenadas del vector determinado por dos puntos.

Sean $A, B \in E_3$ dos puntos cuyas coordenadas sean $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Luego,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

.

1.4.1. Coordenadas del punto medio de un segmento.

Sean $A, B \in E_3$ dos puntos cuyas coordenadas sean $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$. y sea Mel punto medio del segmento AB.
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2, a_3) + \frac{1}{2}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

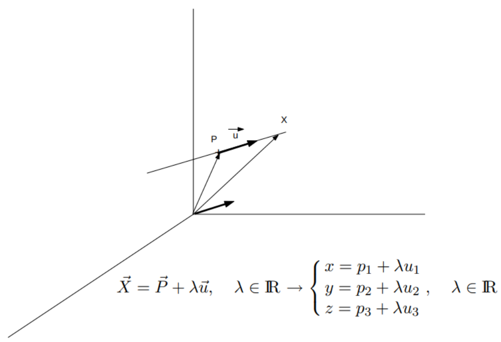
$$OM = (\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2})$$

2. LA RECTA EN EL ESPACIO

2.1. Ecuaciones de la recta en E_3.

Una recta r vendrá determinada si conocemos un punto $P \in r$ y un vector $\overrightarrow{u}$ (que se denomina vector director de la recta r), es decir, $r \equiv (P, \overrightarrow{u})$. La ecuación vectorial de la recta será:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{u}, \lambda \in R$$



.

2.2. Ecuaciones paramétricas

Si suponemos que $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $u = (u_1, u_2, u_3)$, entonces las **ecuaciones paramétricas** serán:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$$

$$(x, y, z) = (p_1 + \lambda u_1, p_2 + \lambda u_2, p_3 + \lambda u_3)$$

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 \end{cases}$$

2.3. Ecuaciones implícitas o generales de la recta

Despejando λ en una de las ecuaciones paramétricas y sustituyendo en las restantes ecuaciones se obtendrán 2 ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D & = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' & = 0 \end{cases}$$

Otra ecuación que se utiliza a veces para representar una recta es la que se denomina ecuación continua de la recta y se obtiene al despejar λ en todas las ecuaciones paramétricas e igualando los resultados obtenidos:

$$\lambda = \frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2} = \frac{z - p_n}{u_3}$$

2.4. Ecuación Continua de la recta

$$\frac{x-p_1}{u_1}=\frac{y-p_2}{u_2}=\frac{z-p_3}{u_3}$$

2.5. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos A y B basta con hallar el vector $\overrightarrow{AB}$ y utilizarlo como vector director.

Siendo $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$, fácilmente podemos hallar: $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$ y utilizar A o B como punto para sustituir en cualquiera de las ecuaciones vistas antes, siendo la más frecuente la ecuación continua:

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1}=\frac{y-a_2}{b_2-a_2}=\frac{z-a_3}{b_3-a_3}$$

Ejemplo: Determina la ecuación continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos $A(1,-3,0)$ y $B(2,2,-1)$

Solución: Considerando el punto A y tomando como vector director $\vec{AB}=(1,5,-1)$, la ecuación es:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-0}{-1}$$

A partir de la ecuación continua se obtienen las ecuaciones implícitas o generales de la recta: $\left.\begin{array}{l}\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{5}\\ \frac{x-1}{1}=\frac{z-0}{-1}\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{c}5x-5=y+3\\ -x+1=z\end{array}\right\}$ Es decir:

$$\left.\begin{array}{rr}5x-y-8= & 0\\ -x-z+1= & 0\end{array}\right\}$$

Las ecuaciones implícitas no son únicas, podemos combinarlas linealmente y seguirán siendo la ecuación de la misma recta.

2.6. Ecuaciones del plano en E_3.

Un plano π vendrá determinado si conocemos un punto $P\in\pi$ y dos vectores (linealmente independientes) $\vec{u},\vec{v}$ (que se denominan vectores generadores o directores del plano), es decir, $\pi\equiv(P,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. La **ecuación vectorial** del plano será:

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\lambda\ \overrightarrow{u}+\mu\ \overrightarrow{v},\lambda,\mu\in R.$$

Si suponemos que $P=(p_1,p_2,p_3)$ y $\overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2,v_3)$, entonces las **ecuaciones paramétricas** serán:

$$(x,y,z)=(p_1,p_2,p_3)+\lambda(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3)$$

o bien

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_3 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Despejando λ, μ en dos de las ecuaciones paramétricas y sustituimos en las restantes ecuaciones se obtendrá una ecuación cartesianas del tipo $Ax + By + Cz + D = 0$

2.7. Ecuación general del plano o ec. implícita del plano.Vector normal

En la sección anterior vimos que $\overrightarrow{PX} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$, es decir que el vector $\overrightarrow{XP}$ depende linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, lo que implica que el determinante

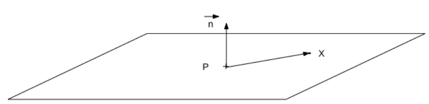
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

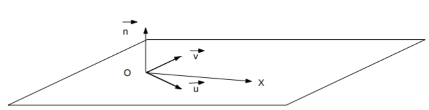
Desarrollando el determinante nos queda una ecuación de la forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

, que es la **ecuación general del plano**, tambien denominada **ecuación en forma implícita** del plano.

Veremos a continuación como (A, B, C) nos da precisamente la dirección perpendicular al plano.





Los planos π_0 y π_1 que pasan por O (origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y por P, respectivamente, tienen el mismo vector normal $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$, y por tanto son paralelos entre sí.

π_0

Los puntos $X = (x, y, z)$ del plano π_0 serán tales que $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{OX} = 0$, por tanto $(A, B, C).(x, y, z) = Ax + By + Cz = 0$

La ecuación implícita es: $Ax + By + Cz = 0$

π_1

Los puntos $X = (x, y, z)$ del plano π_1 serán tales que $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{PX} = 0$, por tanto $(A, B, C).(x - p_1, y - p_2, z - p_3) = Ax + By + Cz - Ap_1 - Bp_2 - Cp_3 = 0$

La ecuacióon implícita de π_1 es:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

, con $D = -Ap_1 - Bp_2 - Cp_3$

2.8. Ecuación segmentaria del plano

Si en la ecuación general del plano $D \neq 0$, podemos dividir ambos términos entre D y obtenemos:

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + \frac{D}{D} = 0$$

$$A'x + B'y + C'z + 1 = 0$$

Representando un plano genérico, que $D \neq 0$ nos garantiza que cortará a los tres ejes cartesianos: Si denominamos los puntos de corte como$A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$, como todos pertenecen al plano deben verificar la ecuación del mismo, es decir:

π :

$$A'x + B'y + C'z + 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} punto & A : A'a + B'0 + C'0 + 1 = 0 \\ punto & B : A'0 + B'b + C'0 + 1 = 0 \\ punto & C : A'0 + B'0 + C'c + 1 = 0 \end{cases}$$

despejando

$$\begin{cases} A' = -\frac{1}{a} \\ B' = -\frac{1}{b} \\ C' = -\frac{1}{c} \end{cases}$$

o sea la ecuación del plano es

$$\Pi \equiv \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0$$

2.9. Ecuación del plano dado su vector normal y un punto

Dado un punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (A, B, C)$ podemos hallar la ecuación general del plano aprovechando la condición de perpendicularidad vista anteriormente : $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow v \perp u$

Si llamamos P (x, y,z) a un punto genérico del plano, en la figura vemos que los vectores AP y n son perpendiculares.

Por tanto: ,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{n} \Leftrightarrow (x - a_1, y - a_2, z - a_3) \cdot (A, B, C) = 0$$

Operando:

$$A(x - a_1) + B(y - a_2) + C(z - a_3) = 0$$

Que es la ecuación del plano dado un punto y su vector normal

2.10. Haz de planos paralelos

El conjunto de todos los planos paralelos, con vector normal (perpendicular) $n = (a_1, a_2, a_3)$, viene dado por la ecuación: $a_1x + a_2y + a_3z + d = 0$, d ∈ R

3. Posiciones relativas de rectas y planos

Hablamos de posiciones relativas para indicar si dos o más figuras en el espacio tienen o no puntos en común. Las situaciones básicas a reconocer son:

Secantes: Las figuras tienen uno o más puntos en común.

No secantes: Las figuras no tienen puntos en común.

Coincidentes: Todos los puntos son comunes, por tanto son la misma figura.

Contenidas: Todos los puntos de una figura pertenecen a la segunda, pero no a la inversa.

Además, podemos clasificarlas en función de su dirección como:

1. Paralelas: Todos los puntos de una figura están a la misma distancia de la otra.

2. Perpendiculares: Las figuras forman un ángulo de 90˚.

La estrategia fundamental para abordar este apartado es:
El tercer concepto básico para resolver problemas de geometría en el espacio: *"Para determinar los puntos en común de dos figuras (si existen) se resolverá el sistema formado por sus ecuaciones"*

3.1. Posiciones relativas de dos planos en el espacio

Sean los planos π y π', dados por su ecuación general:
π : $Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' : A\prime x + B\prime y + C\prime z + D\prime = 0$
Si consideramos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Sea M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada con los términos independientes

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

y

$$M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de M y M * . Se pueden dar los siguientes casos:

- CASO 1.
  - Si $rango(M) = rango(M*) = 1 < 3$(nº incógnitas) ==>S C I El sistema tiene infinitas soluciones.

- Todos los puntos comunes (la intersección) es todo el plano, por tanto los planos son coincidentes.
- El rango es 1 sólo si las dos filas de M y M * son proporcionales, lo que algebraicamente puede interpretarse como que simplificando una de las ecuaciones, puede obtenerse la otra.

- CASO 2
  - Si $1 = rango(M) \neq rango(M^*) = 2 \Longrightarrow S.I.$El sistema no tiene solución.
  - Los dos planos no tienen puntos en común, luego son paralelos.

- CASO 3
  - Si $1 = rango(M) = rango(M^*) = 2 \Longrightarrow S.C.I.$ (1 parámetro)
  - El sistema tiene infinitas soluciones. En este caso los planos son secantes y su intersección es una recta.
  - Esta interpretación geométrica nos permite simplificar la obtención del vector director de la recta definida por sus ecuaciones implícitas: es trivial observar que v está contenido en ambos planos, π_1 y π_2. Por ese motivo, u es perpendicular a los dos vectores normales de dichos planos, n_1 y $\vec{n_2}$, lo que nos permite identificarlo con el producto vectorial: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2$

3.2. Posiciones relativas de tres planos en el espacio

Consideramos los planos π, π´ y π´´ dados por sus respectivas ecuaciones generales:

$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' : A\prime x + B\prime y + C\prime z + D\prime = 0$ y π" : $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$

Formamos con ellas el siguiente sistema $\left\{ \begin{array}{c} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D'' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{array} \right.$

Sean M la matriz de coeficientes y M * la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

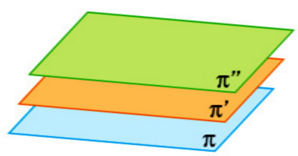
y

$$M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

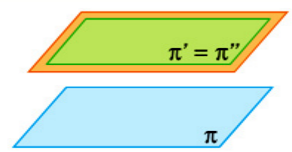
Estudiaremos los rangos de M y M * .

Se pueden dar los siguientes casos

- CASO 1.
  - Si $rango(M) = rango(M*) = 1 < 3$(nº incógnitas)$\Longrightarrow$ S C I .(2 grados de libertad)
    - Las ecuaciones son proporcionales.
    - El sistema tiene infinitas soluciones.
    - Los tres planos son coincidentes.
- CASO 2.
  - Si $rango(M) = 1$ y $rango(M^*) = 2 \Longrightarrow$ S. I .
    - Si dos ecuaciones son proporcionales y la otra no, tendremos dos planos coincidentes y paralelos al tercero
      - ◇ Que el rango de M sea uno indica que los planos tienen sus vectores ortogonales proporcionales y, por tanto, son planos paralelos.
      - ◇ El plano no coincidente será aquél cuyo término D no sea proporcional a los otros dos, y su ecuación no sea simplificable a una equivalente.
    - Si ninguna de las ecuaciones es proporcional, tendremos tres planos paralelos.

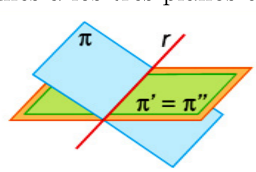


Tres planos paralelos

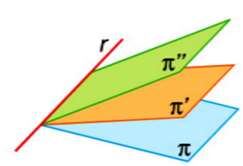


Dos planos coincidentes y otro paralelo a ellos

- CASO 3
  - Si $rango(M) = 2 = rango(M^*) \Longrightarrow$ S C I
  - Pueden darse dos casos:
    - Si dos de las ecuaciones son proporcionales, tenemos dos planos coincidentes que cortan al tercero. Los dos planos coincidentes son el caso conocido de ecuaciones proporcionales.
    - Si no hay ecuaciones proporcionales, no hay planos coincidentes. Los tres planos se cortarán en una recta.
  - Geométricamente, esta situación se traduce en que los tres vectores normales a los planos son linealmente dependientes, pero los infinitos puntos comunes a los tres planos están alineados.

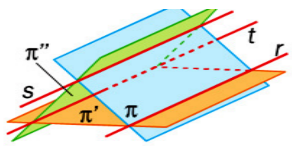


Dos planos coincidentes y otro que los corta en la recta *r*

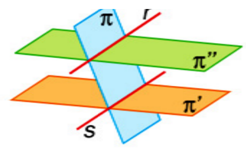


Tres planos que se cortan en la recta *r*

- CASO 4
  - Si $rango(M) = 2$ y $rango(M^*) = 3 \Longrightarrow$ S I
  - En este caso puede ocurrir:
    - Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero. Determinamos qué planos son paralelos analizando qué pareja de vectores normales son proporcionales, pero no hay puntos comunes a los tres planos.
    - Ninguno de los planos es paralelo al otro. Se cortan dos a dos y definen un prisma sin bases.
  - Esta situación se traduce en que los tres vectores normales son linealmente dependientes, pero no puede haber puntos comunes a los tres planos ya que el sistema es incompatible.

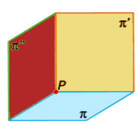


Planos que forman un prisma.
Se cortan dos a dos en las rectas *r*, *s* y *t*



Dos planos paralelos y otro que los corta

- CASO 5
  - Si $rango(M) = rango(M^*) = 3 \Longrightarrow$ S C D
    - El sistema tiene una única solución.
    - Los tres planos se cortan en un punto.



Ejemplo Dados estos tres planos, estudia la posición relativa entre cada dos de ellos: $\pi : 2x – y + 3z = 8$;$\pi' : x + 3y – z = 5$;$\pi'' : 2x + 6y – 2z = 5$¿Tienen los tres planos algún punto común?

- $\pi : 2x – y + 3z = 8$;$\pi' : x + 3y – z = 5$ se cortan en una recta
- $\pi' : x + 3y – z = 5$;$\pi'' : 2x + 6y – 2z = 5$ son paralelos
- $\pi : 2x – y + 3z = 8$;$\pi'' : 2x + 6y – 2z = 5$ se cortan en una recta
  Luego los tres planos no tienen ningún punto en común

RESUMEN Para estudiar la posición relativa de tres planos discutimos el sistema:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

Y sean:

r = rango de la matriz de los coeficientes.

r' = rango de la matriz ampliada.

Las posiciones relativas de los tres planos vienen dada por la siguiente tabla:

r	r'		POSICIÓN	
1	1	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	Planos coincidentes.	
1	2	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	2.1 Planos paralelos y distintos dos a dos.	
		$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	2.2 Planos paralelos y dos coincidentes.	
2	2		3.1 Planos secantes y distintos.	
		$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	3.2 Dos planos coincidentes y uno secante	
2	3		2.1 Planos secantes dos a dos	
		$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	2.2 Dos planos paralelos y el tercero secante.	
3	3		Planos secantes en un punto	

3.3. Posiciones relativas de una recta y un plano

Consideramos la recta r, dada por las ecuaciones implícitas

$$\left\{ \begin{array}{c} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array} \right.$$

, y un plano π, dado por su ecuación general: $\pi : A''x + B''y + C''z + D'' = 0$.

Consideramos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\left\{ \begin{array}{c} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D'' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{array} \right.$$

Sean M la matriz de coeficientes y M * la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

y

$$M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Se pueden dar los siguientes casos:

- CASO 1.
  - Si $rango(M) = 2 \ = \ rango(M^*) \Longrightarrow$ S C I
    - El sistema tiene infinitas soluciones.
    - La recta está contenida en el plano.
  - La interpretación geométrica es simple, los tres planos (los dos que definen la recta y el plano π) pertenecen a un mismo haz.
- CASO 2
  - $rango(M) = 2 \ y \ rango(M^*) = 3 \Longrightarrow$ S I
    - El sistema no tiene solución.
    - La recta y el plano no se cortan, por tanto son paralelos.
  - Geométricamente se interpreta que el vector de la recta es combinación lineal de los vectores del plano, pero no tienen ningún punto en común.caso
- CASO 3.
  - $rango(M) = 3 \ = y \ rango(M^*) = 3 \Longrightarrow$S C D
    - El sistema tiene una única solución.
    - La recta y el plano son secantes y se cortan en un punto.
- Ejemplo: Estudia la posición relativa del plano y de la recta: $\pi : 2x–y + 3z = 8$ r:$(x, y, z) = (2 + 3\lambda, -1 + 3\lambda, -\lambda)$
  - Método 1:: $\left\{ \begin{array}{c} 2x - y + 3z - 8 = 0 \\ \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} \\ \frac{x-2}{3} = \frac{z}{-1} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} 2x - y + 3z - 8 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \\ -x - 3z + 2 = 0 \end{array} \right.$ .Estudiamos los rangos rango $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$ $6 - 3 - 3 = 0$ y rango $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -8 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 3$

ya que $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -8 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$=S.I.=> Paralelos

Método 2 :Hallamos los puntos de corte de r y π:

$$2(2 + 3\lambda)–(-1 + 3\lambda) + 3(-\lambda) = 8$$

-

$$4 + 6\lambda + 1–3\lambda–3\lambda = 8; 0\lambda = 3$$

  No tiene solución. La recta y el plano son paralelos, pues no tienen ningún punto en común.

3.3.1. Posiciones relativas de 2 rectas

Para estudiar la posición relativa de dos rectas en el espacio **a partir de sus ecuaciones implícitas**:

Consideramos la recta r, dada por las ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

, y la recta s dada por las ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

Consideramos el sistema formado por las ecuaciones de la rectas .

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D'' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$$

Sean M la matriz de coeficientes y M * la matriz ampliada con los términos independientes.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix}$$

y

$$M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B'''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

Se pueden dar los siguientes casos:

- CASO 1.
    - Si $rango(M) = 2 \; = \; rango(M^*) \Longrightarrow$ S C I
        - El sistema tiene infinitas soluciones.
        - Las dos recta son la misma
        - Que el rango de ambas matrices sea dos implica que sólo dos de las ecuaciones son linealmente independientes o, geométricamente, que los cuatro planos pertenecen al mismo haz.
    - La interpretación geométrica es simple, los tres planos (los dos que definen la recta y el plano π) pertenecen a un mismo haz.
- CASO 2

- $rango(M) = 2$ y $rango(M^*) = 3 \Longrightarrow$ S I
  - El sistema no tiene solución.
  - El sistema no tiene solución y sus vectores directores son proporcionales. Las dos rectas son paralelas.

- CASO 3.
  - $rango(M) = 3 \ = y \ rango(M^*) = 3 \Longrightarrow$S C D
    - El sistema tiene una única solución.
    - Las dos rectas son secantes y su intersección es un punto.

- CASO 4
  - $rango(M) = 3$ y $rango(M^*) = 4 \Longrightarrow$ S I
    - El sistema no tiene solución.
    - Sus vectores directores no son proporcionales.
    - Las dos rectas se cruzan.

Si las rectas vienen dadas a partir de la determinación de un punto y un vector de dirección es estudio es más rápido. Realizamos el estudio analizando sus vectores directores y puntos por los que pasan (vectores de posición).

Consideramos las rectas r y s, que vendrán determinadas por un punto y un vector director:

Si suponemos que la determinanción de r es $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $u = (u_1, u_2, u_3)$, y la determinación de s es $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$,

Las situaciones antes estudiadas se determinan del siguiente modo **a partir de sus vectores y puntos**:

- CASO 1
  - Si las rectas r y s son coincidentes (r y s son la misma recta) Esto significa que los vectores u, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ serán proporcionales, y por tanto:

$$rango\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 - p_1 & p_2 - q_2 & q_3 - q_3 \end{pmatrix} = 1$$

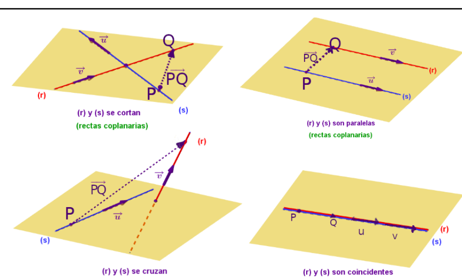
- CASO 2
  - Las rectas r y s son secantes Esto significa que r y s se cortan en un único punto.
  - Los vectores u y v no son proporcionales, pero el vector PQ es combinación lineal de ellos.
  - Por tanto, $rango\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$ y $rango\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 - p_1 & p_2 - q_2 & q_3 - q_3 \end{pmatrix}$ =2

- CASO 3
  - Las rectas r y s son paralelas
  - En este caso las rectas no tienen ningún punto en común, pero están contenidas en el mismo plano.
  - Por tanto, los vectores u y v son proporcionales, pero no serán proporcionales al vector PQ .
  - Tenemos:
$$rango \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 1$$
    y
$$rango \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 - p_1 & p_2 - q_2 & q_3 - q_3 \end{pmatrix} = 2$$
- CASO 4
  - Las rectas r y s se cruzan Esto significa que las rectas no tienen ningún punto en común ni están contenidas en el mismo plano.
  - En este caso, los vectores , v y PQ son linealmente independientes.
  - Por tanto:$rango \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 - p_1 & p_2 - q_2 & q_3 - q_3 \end{pmatrix}$=3

Resumen :

Las posiciones relativas de 2 rectas vienen dada por la siguiente tabla:

$rango(\vec{u},\vec{v})$	$rango(\vec{u},\vec{v},\vec{P}Q)$	POSICIÓN
1	1	rectas coincidentes.
1	2	rectas paralelas
2	2	rectas se cortan
2	∞	Rectas que se cruzan



3.4. Resumen de las condiciones de paralelismo y ortogonalidad entre rectas y planos

- Dos rectas se dicen paralelas si tienen la misma dirección $X = P + \lambda\vec{u}$, variando P , determina todas las rectas paralelas de dirección $\vec{u}$.
- Dos rectas con direcciones $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se dice que son perpendiculares si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
- Dos planos con vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$, respectivamente, son paralelos si $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ tienen la misma dirección.
- Dos planos con vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$, respectivamente, son perpendiculares si $\mathrm{n}_1\cdot\mathrm{n}_2 = 0$
- Una recta de dirección $\vec{u}$ es paralela a un plano de vector normal $\vec{n}$ si $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0$. Otra forma de expresarlo: Una recta es paralela a un plano si su dirección está contenida en el plano
- Una recta de dirección $\vec{u}$ es perpendicular a un plano de vector normal $\vec{n}$ si $\vec{n}$ y $\vec{u}$ tienen la misma dirección.