S3r4 | 2022

MATEMÁTICAS : Bachillerato II

Geometría Métrica

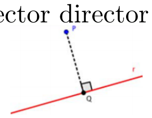
Apuntes

by Sera

1. Proyecciones ortogonales.

1.1. Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

La proyección ortogonal de un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ sobre una recta r será otro punto Q perteneciente a la recta, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al vector director de la recta.



- Para hallar Q procedemos de la manera siguiente:
- Determinamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P. Para ello, utilizamos el vector director $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ de la recta como vector normal del plano y utilizamos la ecuación del plano dado su vector normal y un punto:
$$u_1(x - p_1) + u_2(y - p_2) + u_3(z - p_3) = 0$$
- El punto que estamos buscando (la proyección ortogonal) Q es el punto de intersección de la recta r con el plano π.
- Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta r y del plano π.
$$u_1(a_1 + \lambda u_1 - p_1) + u_2(a_2 + \lambda u_2 - p_2) + u_3(a_3 + \lambda u_3 - p_3) = 0$$

de donde hallamos el valor de λ que nos permitirá calcular las coordenadas del punto Q

1.2. Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

La proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π es otro punto Q perteneciente al plano, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al plano.

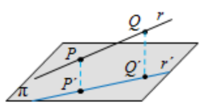
Para hallar la proyección ortogonal de un punto sobre un plano dado por la ecuación: $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ seguimos los siguientes pasos:

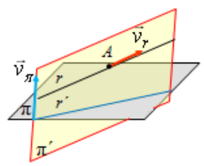
- Determinar la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Para ello, utilizamos el vector normal del plano π como vector director de la recta:
$$r : (x, y, z) = (p_1 + A\lambda, p_2 + B\lambda, p3 + \lambda C).$$
- El punto que estamos buscando (la proyección ortogonal) es el punto de intersección de la recta con el plano.
- Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.
$$A(p_1 + A\lambda) + B(p_2 + B\lambda) + C(p_3 + \lambda C) + D = 0.$$
- Despejamos λ y sustituimos en la ecuación paraétrica de las recta el valor λ hallado para obtener el punto Q.

1.3. Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

La proyección ortogonal de una recta r sobre un plano π es otra recta s que está contenida en el plano, y tal que el plano π' que contiene a las dos rectas es perpendicular al plano .

- Para hallar la proyección ortogonal de una recta sobre un plano, hallamos la ecuación del plano π' que contiene a r y es perpendicular al plano dado.
- La ecuación de la recta vendrá dada en forma implícita como intersección de los dos planos π y π'.

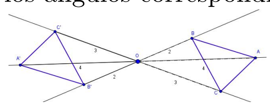




2. Simetrías

2.1. Simétrico de un punto respecto de otro punto.

En una simetría central, los segmentos homólogos son iguales y la medida de los ángulos correspondientes también es igual.



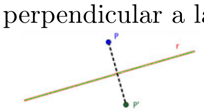
Ya vimos en un capítulo anterior cómo determinar el punto medio del segmento definido por los puntos A y B:

$$M = \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)}{2}$$

En este caso se trata de hallar A'(simétrico) conocidos es punto A y M

2.2. Simétrico de un punto respecto de una recta.

El simétrico de un punto P respecto de una recta r es otro punto P' de manera que la recta r pasa por el punto medio del segmento PP' y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular a la recta r.



Si tenemos la recta $r = (a_1 + \lambda u_1, a_2 + \lambda u_2, a_3 + \lambda u_3)$ o en su forma continua

$$r : \frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}$$

Para hallar el punto simétrico de un punto respecto de una recta dada seguiremos los siguientes pasos:

1. Determinar la proyección del punto sobre la recta r, usando el plano π cuyo vector normal es $\overrightarrow{n} = (u_1, u_2, u_3)$ y pasa por P. Llamaremos a ese punto Q.

   - Determinar la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto PPara ello, utilizamos el vector director de la recta como vector normal del plano y utilizamos la ecuación del plano dado su vector normal y un punto

   $$u_1(x - p_1) + u_2(y - p_2) + u_3(z - p_3) = 0$$

   - El punto que estamos buscando (la proyección ortogonal) Q es el punto de intersección de la recta r con el plano π.
   - Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.

   $$u_1(a_1 + \lambda u_1 - p_1) + u_2(a_2 + \lambda u_2 - p_2) + u_3(a_3 + \lambda u_3 - p_3) = 0$$

de donde hallamos el valor de λ que nos permitirá calcular las coordenadas del punto Q:

2. Determinamos el punto simétrico de P respecto de Q, como hicimos en el apartado anterior.

Ejemplo Vamos a resolver ahora un ejercicio aplicando el procedimiento anterior paso a paso para que te quede todo más claro.

Halla el punto simétrico del punto A (1,2,3) respecto de la recta: $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$

En primer lugar, vamos a calcular el plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto A.

Para ello, necesitamos el vector normal del plano, que es igual al vector de dirección de la recta.

La recta está en forma contínua, por lo que podemos obtener el punto por donde pasa P(2,-1,1) y su vector de dirección: $\vec{v} = (3, 2, 1)$

El vector normal del plano es igual al vector de dirección de la recta:$\vec{n} = \vec{v} = (3, 2, 1)$

La ecuación de la recta nos queda:$3x + 2y + 1z + D = 0$

Donde sólo nos queda conocer el valor del coeficiente D.

Vamos a calcular el valor de D. El plano pasa por el punto A, luego si sustituimos las coordenadas del punto A, en x, y, z de la ecuación del plano, se debe cumplir la igualdad:

Nos queda una ecuación donde podemos despejar el valor de D. Por tanto, operamos y despejamos D:$D = -10$

Por tanto, la ecuación del plano π perpendicular a la recta r y que pasa por el punto A es:$3x + 2y + 1z - 10 = 0$

Una vez tenemos la ecuación del plano, vamos a calcular el punto de corte de la recta r y del plano π.

Para ello la recta r que la tenemos en forma continua la expresamos en su forma paramétrica:$(x, y, z) = (2 + 3\lambda, -1 + 2\lambda, 1 + \lambda)$

Una vez tenemos las ecuaciones paramétricas de la recta, sustituimos x, y z de la ecuación del plano, por los valores de x, y z de la recta, que están expresados en función del parámetro λ. Al hacer esto, estamos calculando el punto donde la recta y el plano tienen el mismo valor, es decir, el punto donde se cortan:$3(2 + 3\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) + (1 + \lambda) - 10 = 0$

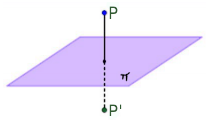
Nos queda una ecuación en función del parámetro λ, donde despejaremos su valor. Obtendremos cuánto debe ser el valor λ para que la ecuación tenga el mismo valor que el plano.

Y despejamos λ:$\lambda = \frac{5}{14}$. Este valor de λ, lo sustituimos en las ecuaciones paramétricas de la recta, operamos y nos queda:$(x, y, z) = (13/14, -2/7, 19/14)$

Ahora x, y z, tienen un valor numérico, por tanto, lo que nos ha quedado son las coordenadas del punto M, que es la intersección entre la recta y el plano:

El punto M, es el punto medio entre el punto A y su simétrico:$M = \frac{A+A'}{2}$.De donde despejamos el punto simétrico A' y nos queda:$A' = (36/7, -18/7, -2/7)$

2.3. Simétrico de un punto respecto de un plano.



El simétrico de un punto P respecto de un plano π es otro punto P' de manera que el plano pasa por el punto medio del segmento PP' y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular ($\perp$) al plano.

Para hallar el simétrico de un punto respecto de un plano dado por la ecuación: $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ y P debemos seguir los siguientes pasos:

- Determinar la proyección del punto sobre el plano , para lo que procedemos como se indicó en el apartado de **Proyección ortogonal de un punto sobre un plano**
- Llamaremos a ese punto Q.
- Determinamos el punto simétrico de P respecto de Q, como hicimos en el apartado anterior.

3. Distancias en el espacio

3.1. Distancia entre dos puntos

Si $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ son dos puntos de un espacio, entonces la distancia entre dichos puntos es calculable mediante el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

3.2. Distancia de un punto a una recta

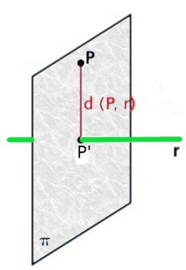
Definición: Se define la distancia entre un punto P y una recta $r = \{A, \overrightarrow{u}\}$ $r = (a_1 + \lambda u_1, a_2 + \lambda u_2, a_3 + \lambda u_3)$, que denotaremos por $d(P, r)$ a la **mínima distancia** entre P y un punto cualquiera de la recta r.

- En el caso en que el punto P pertenezca a la recta r, $d(P, r)$ será cero.
- En caso contrario, esta distancia se puede expresar como $d(P, r) = d(P, P')$, donde P' es la proyección ortogonal de P sobre r.

Método 1:

Se puede obtener el punto P' Hallando la proyección de P sobre la recta r, es decir cortando la recta r cuya ecuación es $r\{X = A + \lambda u\}$ con el plano π perpendicular a r pasando por P.

1. Determinamos el plano π perpendicular a r que contiene a P.
2. Obtenemos el punto P', intersección de π y r.
3. Hallamos $d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}|$



Método 2

1. Planteamos el punto $P'(x, y, z) = (a_1 + \lambda u_1, a_1 + \lambda u_2, a_3 + \lambda u_3)$ en forma paramétrica que pertenece a r.
   a) Exigimos que el vector $\overrightarrow{PP'} = (a_1 + \lambda u_1 - p_1, a_1 + \lambda u_2 - p_2, a_3 + \lambda u_3 - p_3)$ sea perpendicular al vector director de la recta, $\overrightarrow{u}$, es decir, su producto escalar debe ser nulo $\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

b) Hallamos P' obteniendo el valor λ correcto y sustituyendo ese valor en la paramétrica.

c) Hallamos $d(P,r) = d(P,P') = |\overrightarrow{PP'}|$

Método 3

Se puede realizar como un problema métrico, de forma genérica y usando un punto cualquiera A de la recta r, y siendo el $\overrightarrow{u}$ vector director de r

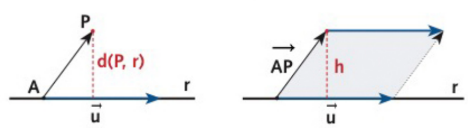
- Usando la fórmula del área de un paralelogramo: Área=Base·Altura=$|\overrightarrow{u}|\cdot h$
- De temas anteriores sabemos que la interpretación geométrica del producto vectorial es, precisamente, el área: $\acute{A}rea = |\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AP}|$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{u}|}$$

- Igualando ambas expresiones:

$$|\overrightarrow{u}| \cdot h = |\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AP}| \Longrightarrow d(P,r) = h = \frac{|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{u}|}$$

donde d(P,r) se obtiene como la altura del paralelogramo de lados $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{u}$.



Ejemplo Determina la distancia del punto P(1, 2, 3) a la recta: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}$

Solución

Tomamos un vector director u$_r$ y un punto A de la recta.

$u_r = (2,-1,-2), A(1,-1,0) \in r; \vec{AP} = (0,3,3)$

$$u_r \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3i - 6j + 6k = (3,-6,6)$$

$$|u_r| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$|u_r \times AP| = \sqrt{9+36+36} = 9$

La distancia del punto P a la recta r es: $d(P,r) = \frac{|u_r \times AP|}{|u_r|} = \frac{9}{3} = 3$

3.3. Distancia de un punto a un plano

Definición La distancia de un punto P a un plano π , que denotaremos por $d(P,\pi)$ es la mínima de las distancias entre P y un punto cualquiera del plano π.

- En el caso en que el punto P pertenezca al plano π , esta distancia valdrá cero.
- En caso contrario, esta distancia se puede expresar como d$(P,\pi) = d(P, P')$, donde P' es la proyección ortogonal de P sobre π.
- Si bien la obtención de dicho punto P' se puede realizar como un problema métrico, de forma genérica se tiene que, dado $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ y $P= (p_1, p_2, p_3)$

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{|A^2 + B^2 + C^2|}$$

En efecto, demostremos esa fórmula:

- Hallamos la proyección del punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ sobre el plano de ecuación: $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$
- Determinamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P con el vector normal del plano:

$$r \equiv (p_1 + \lambda A, p_2 + \lambda B, p_3 + \lambda C)$$

- Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.

$$A(p_1 + \lambda A) + B(p_2 + \lambda B) + C(p_3 + \lambda C) + D = 0$$

$$\lambda = -\frac{D + Ap_1 + Bp_2 + Cp_3}{A^2 + B^2 + C^2}$$

- La distancia es el módulo del vector

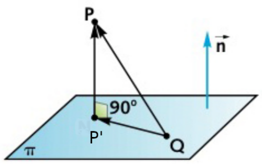
$\overrightarrow{PP'}$: $(p_1 - p_1 + \lambda A), p_2 - (p_2 + \lambda B), p_3 - (p_3 + \lambda C))$ $= (-\lambda A, -\lambda B, -\lambda C) = (-\lambda)(A, B, C)$

- Entonces entonces: $|\overrightarrow{PP'}| = \lambda\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$
- Y sustituyendo \lambda por su valor:$d(P,\pi) = |-\frac{D+Ap_1+Bp_2+Cp_3}{A^2+B^2+C^2}|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}=$

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Método 2

Consideramos un punto Q cualquiera del plano π, el punto desde donde se quiere hallar la distancia P y la proyección P' de este punto P sobre el plano π



En el triángulo formado por los puntos PP' y Q se verifica que :$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP'} + \overrightarrow{P'P}$.

Multiplicando escalarmente por $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$, tenemos

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{QP'} + \overrightarrow{P'P}) = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{QP'} + \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P'P}.$$

Como $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{QP'}$ son perpendiculares $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{QP'} = 0$.Por tanto $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P'P}$.

Tomando valores absolutos $|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P'P}| = |\overrightarrow{n}||\overrightarrow{P'P}||cos(n, P'P)| = |\overrightarrow{n}||\overrightarrow{P'P}||cos 0°| = |\overrightarrow{n}||\overrightarrow{P'P}| \cdot 1$

con lo que :

$$d(P, \pi) = |P'P| = \frac{|n \cdot QP|}{|n|}$$

Expresión analítica

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{QP}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{|(A, B, C)(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

Como $Q \in \pi$ Entonces -A$q_1 - Bq_2 - Cq_3 = D$. Con lo que

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejercicio Halla la distancia al plano $\pi : 8x - 4y + z - 5$ =0 de los puntos $P(2, 4, 12), Q(0, -1, 1)$ y $R(1, 3, 2)$. ¿Qué puedes decir del punto Q? ¿Y qué tienen en común P y R?

Solución $d(P, \pi) = |\frac{8 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 12 - 5}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}}| = \frac{7}{9} dP(R, \pi) = |\frac{8 \cdot 1 - 4 \cdot 3 + 2 - 5}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}}| = \frac{7}{9}$

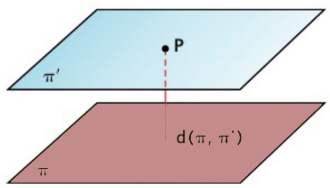
$d(Q, \pi) = |\frac{8 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) + 1 - 5}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}}| = 0$ .El punto Q pertenece al plano y los puntos P y R equidistan de él.

3.4. Distancia entre dos planos

Definición: La distancia entre dos planos π y π´se define como la menor de las distancias $d(A, B)$, siendo $A \in \pi$ y $B \in \pi'$.

Dados dos planos π y π', se pueden presentar los siguientes casos:

- Si los planos son coincidentes o secantes: la distancia es cero.
- Si los planos son paralelos: la distancia entre ellos será la distancia entre cualquier punto de uno de los planos al otro plano.



Ejercicio calcula la distancia entre las siguientes parejas de planos.

a) $\pi : \begin{cases} x = -4 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 1 + \lambda - \mu \\ z = 2 - \lambda - 5\mu \end{cases} \quad \pi' : \begin{cases} x = 4 + 4\mu \\ y = 3 + \lambda + \mu \\ z = -4 + 2\lambda - 4\mu \end{cases}$

Solución Escribimos los planos en forma implícita. p: x y z

$$\pi = \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -6x + 8y - 4z - 24 = 0$$

$$\pi' = \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -6x + 8y - 4z - 16 = 0$$

Los planos son paralelos. Tomando $P(4, 3, -4) \in \pi'$:

$d(\pi, \pi') = \frac{|-6\cdot 4 + 8\cdot 3 - 4\cdot(-4) - 24|}{\sqrt{36+64+16}} = \frac{8}{\sqrt{116}}$

3.5. Distancia entre una recta y un plano

Definición: La distancia entre una recta r y un plano π , se define como la menor de las distancias $d(A, B)$, siendo $A \in r$ y $B \in \pi$.

Dada una recta Dada r y un plano π , se pueden presentar los siguientes casos:

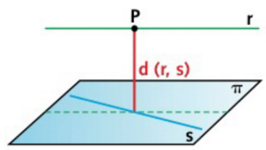
- Si la recta r y el plano π tienen algún punto en común: la distancia es cero.
- Si la recta r y el plano π son paralelos: la distancia entre ellos será la distancia entre cualquier punto de la recta y el plano.

3.6. Distancia entre dos rectas

Definición: La distancia entre dos rectas r y s se define como la menor de las distancias d(A, B), siendo $A \in r$, $B \in s$

Dadas dos rectas r y s, se pueden presentar los siguientes casos:

- Si las rectas r y s son **coincidentes o secantes**: la distancia es cero.
- Si las rectas r y s son **paralelas**: la distancia entre ellas será la distancia de un punto de cualquiera de las rectas a la otra recta.
- Si las rectas r y s se **cruzan**: la distancia entre ellas será la distancia de una de ellas al plano paralelo a ella que contiene a la otra recta. $d(r,s) = d(P,\pi), P \in r$ y π plano paralelo a r que contiene a s



En principio, deberíamos hacer un análisis de las posiciones relativas de las rectas antes de calcular la distancia entre ellas. Sin embargo, existe un razonamiento más simple que puede realizarse analizando los vectores directores y los vectores de posición de ambas rectas.

Dadas dos rectas r y s, sean los puntos $A \in r$, $B \in s$, y sean, además, $\overrightarrow{u}$ un vector director de r y $\overrightarrow{v}$ un vector director de s. Entonces, hallando el vector $\overrightarrow{AB}$:

- Si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 0$ y $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AB} = 0$ las rectas r y s son coincidentes $d(r,s) = 0$
- Si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 0$ y $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AB} \neq 0$ las rectas r y s son paralelas y se puede usar el apartado de distancia de punto a recta para resolver este caso.

$$d(r,s) = \frac{|u \wedge AB|}{|u|}$$

- Si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \neq 0$ y $[AB, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$ las rectas r y s se cortan $d(r,s) = 0$
- Si $\overrightarrow{u} \wedge v \neq 0$ y $[AB, \overrightarrow{u}, v] \neq 0$ las rectas r y s se cruzan Entonces, una vez que hemos comprobado las posiciones relativas de las rectas, procedemos según lo explicado:

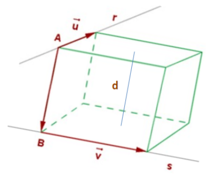
Si r y s se cruzan, de forma genérica, tomando dos puntos cualquiera A de r y B de s y usando los vectores directores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ de r y s

$$d(r,s) = \frac{|[AB, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]|}{|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|}$$

Donde dicha distancia se obtiene como la altura del paralelepípedo de lados $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$

Consideramos el paralelepípedo determinado por los vectores , $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Aplicando la fórmula del volumen de un paralelepípedo:

$$Volumen = \acute{A}rea\ de\ la\ base \cdot Altura = |\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}| \cdot h$$



Con la interpretación geométrica del producto mixto tenemos: $Volumen = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$

Igualando ambas expresiones: $|u \wedge v| \cdot h = |[\overrightarrow{AB}, u, v] \Longrightarrow$

$$d(r,s) = h = d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]|}{|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|}$$

Ejemplo

Halla la distancia entre las rectas: $r \equiv \frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$ $\quad s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$

Solución En primer lugar estudiamos la posición relativa de las rectas siguiendo este método Necesitaremos un punto y un vector de cada recta

$r \equiv \frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$ $\vec{v_r} = (3,-2,-2)$ $P_r(-3,9,8)$

$s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ $\vec{v_s} = (-2,1,2)$ $P_s(3,2,1)$

$P_r\vec{P}_s = (6,-7,-7)$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

$det(M) = 9 \longrightarrow$ r y s se cruzan

Ahora calculamos la distancia siguiendo el método de la teoría

$d(r,s) = \frac{\left|[\vec{v_r}, \vec{v_s}, P_r\vec{P}_s]\right|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|}$

$[\vec{v_r}, \vec{v_s}, P_r\vec{P}_s] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & -7 & -7 \end{vmatrix} = 9 \vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

$|\vec{v_r} \times \vec{v_s}| = +\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = +\sqrt{9} = 3; d(r,s) = \frac{|9|}{3} = \frac{9}{3} = 3$

Están a una distancia de 3 unidades.

4. Ángulos en el espacio

4.1. Ángulo entre dos rectas

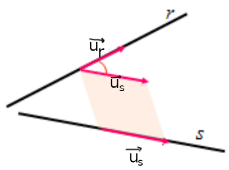
El ángulo que forman dos rectas r y s es el ángulo agudo determinado por los vectores directores de dichas rectas.

Su valor se obtiene aplicando el producto escalar.

Si las rectas son: $r : A + \lambda\overrightarrow{u}$ y $s : B + \mu\overrightarrow{u_s} \Longrightarrow ángulo(r, s) = ángulo(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s})$.

En consecuencia: $cos(r, s) = \frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|}$

Observaciones: Suele elegirse siempre el valor del ángulo agudo; por tanto, si $cos(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s})$ fuese negativo se tomará en valor absoluto.



Ejemplo: Calcula el ángulo que forman las rectas r y s, siendo sus ecuaciones las siguientes:

$$r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{2} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Solución Para hallar el ángulo entre dos rectas basta con determinar el ángulo que forman sus vectores directores. Usaremos el producto escalar para determinar el ángulo entre dos vectores

Vector director de r$\longrightarrow \vec{u} = (3, -1, 2)$

Vector director de $s \longrightarrow \vec{v} = (-3, 1, 1)$

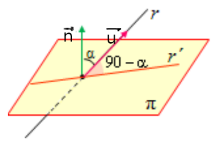
c

$$os(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|3\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + 1^1 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}}$$

El ángulo es $\alpha = arc\,cos\left(\frac{8}{\sqrt{154}}\right)$

4.2. Ángulo entre una recta y un plano

Es el menor de los ángulos entre la recta r y cualquier recta contenida en el plano π; coincide con el ángulo entre r y r´, siendo r´ la proyección de r sobre π. Su valor es complementario del ángulo formado por el vector de dirección de la recta y el vector normal del plano. Esto es, $ángulo(r, \pi) = 90^{\text{o}} – ángulo(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n})$



En consecuencia, sen (r, π) $=cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{u})$ $=(\frac{n\cdot u}{|n||u|})$. Recuérdese que $sen\alpha = cos(90°–\alpha)$.

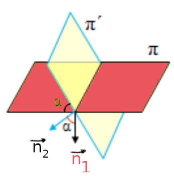
Si $\alpha = 0°$, la recta es paralela o está contenida en el plano; si $\alpha = 90°$, la recta y el plano son perpendiculares.

4.3. Ángulo entre dos planos

El ángulo formado por dos planos es el ángulo agudo determinado por los vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ de dichos planos.

Si $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$ángulo(\pi, \pi´) = ángulo(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$=$arccos(\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|})$



4.4. Lugares geométricos

4.4.1. Perpendicular común a dos rectas

Existen infinitas rectas perpendiculares a dos dadas r y s. El vector de dirección de las perpendiculares se obtiene mediante el producto vectorial de los vectores de dirección de las rectas dadas; esto es: u= $\mathrm{u}_r \wedge u_s$. Un problema que suele interesar es calcular la recta perpendicular común (la que se busca) que corta a ambas rectas.

Ejemplo

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(7, -2, 9)$ y es perpendicular a cada una de las rectas $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{3}$ y $x + 4 = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{-2}$

Solucion En primer lugar deberíamos estudiar la posición relativa de ambas rectas.

- Si las rectas son paralelas o coincidentes, para encontrar una recta perpendicular a ambas, basta con que sea perpendicular a una de ellas

- Si las rectas se cruzan o son secantes, para encontrar una recta perpendicular a ambas, podemos usar como vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

La recta $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{3}$ tiene como vector director $\vec{u} = (2, -2, 3)$

La recta x+4 $= \frac{y-2}{5} = \frac{z}{-2}$ tiene como vector director $\vec{v} = (1, 5, -2)$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, por tanto las rectas no son ni coincidentes ni paralelas (se cruzan o se cortan).

Recordemos que el vector producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, Por tanto $\vec{u} \times \vec{v}$ va a ser el vector director de la recta que nos piden. Como además nos dan un punto por donde pasa, podemos determinar completamente la recta que nos piden.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 7\vec{j} + 12\vec{k}$$

Con el vector obtenido (-11, 7, 12) y el punto que nos dan (7,-2,9) podemos construir la ecuación de la recta que nos piden, por ejemplo en ecuación continua $\frac{x-7}{-11} = \frac{y+2}{7} = \frac{z-9}{12}$

4.4.2. Perpendicular común a dos rectas que se cortan

Viene definida por el punto P de corte y por el vector $u = u_r \wedge u_s$. (Problema sencillo).

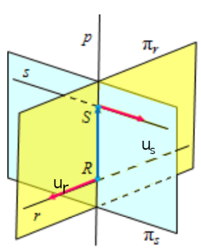
4.4.3. Perpendicular común a dos rectas que se cruzan

Primer método: A partir de dos puntos genéricos. Se toman dos puntos genéricos, uno de cada una de las rectas dadas, $A \in r$ y $B \in s$, y se impone la condición de que el vector $\overrightarrow{AB}$ (o $\overrightarrow{BA}$) sea perpendicular a los de dirección de las rectas, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$. Se obtiene así el sistema: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}_r = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0 \end{cases}$

Se resuelve el sistema para obtener los puntos A y B concretos. La recta p queda definida por el punto A (o B) y el vector $\overrightarrow{AB}$.

Segundo método: A partir de dos planos

La perpendicular común puede obtenerse mediante la intersección de los planos π_r y π_s . El plano π_r viene determinado por la recta r, a la que contiene, y por el vector $u_r \wedge u_s$. El plano π_s viene determinado por la recta s, a la que contiene, y por el vector $u_r \wedge u_s$.



Ejemplo

Considere las siguientes rectas:

$r:\ \frac{x-5}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+1}{1}$ y $s:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución

a) Estudiaremos la posición relativa mediante el método de los vectores Obtenemos un vector director de cada recta $r:\ \frac{x-5}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+1}{1}\longrightarrow \vec{v_r}=(1,1,1)$ $s:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}\longrightarrow \vec{v_s}=(1,1,-1)$

Ahora necesitamos un tercer vector formado por un punto de cada recta

- De la recta $r\longrightarrow A(5,6,-1)$

-De la recta s \longrightarrow $A(1,0,-1)$ Entonces $\vec{AB}=(-4,-6,0)$

Con los tres vectores formamos una matriz y analizamos su rango

$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -4 & -6 & 0\end{pmatrix}$

$|M|=-4\neq 0\longrightarrow rg(M)=3\longrightarrow$ se cruzan

- b) Para encontrar la perpendicular común a ambas rectas usaremos el método siguiente

$\vec{v_r}=(1,1,1)\vec{v_s}=(1,1,-1)$ Ahora necesitamos un punto genérico de cada recta. Para ello necesitamos las ecuaciones paramétricas:

$r:\ \frac{x-5}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+1}{1}\longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=5+\lambda\\ y=6+\lambda\\ z=-1+\lambda\end{array}\right.$ Punto genérico de r $\longrightarrow A(5+\lambda,6+\lambda,-1+\lambda)$

$s:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}\longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1+\mu\\ y=0+\mu\\ z=-1-\mu\end{array}\right.$ Punto genérico de s $\longrightarrow B(1+\mu,0+\mu,-1-\mu)$

$\vec{AB}=(1+\mu-(5+\lambda),\mu-(6+\lambda),-1-\mu-(-1+\lambda))$

$\vec{AB}=(\mu-\lambda-4,\mu-\lambda-6,-\mu-\lambda)$

El vector$\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a los vectores directores de ambas rectas:

$\vec{AB}\perp\vec{v_r}\longrightarrow\vec{AB}\cdot\vec{v_r}=0\vec{AB}\perp\vec{v_s}\longrightarrow\vec{AB}\cdot\vec{v_s}=0$ Por tanto: $(\mu-\lambda-4)\cdot1+(\mu-\lambda-6)\cdot1+(-\mu-\lambda)\cdot1=0(\mu-\lambda-4)\cdot1+(\mu-\lambda-6)\cdot1+(-\mu-\lambda)\cdot(-1)=0$

Simplificando obtenemos estas dos ecuaciones: $\left.\begin{smallmatrix}\mu-3\lambda-10=0\\ 3\mu-\lambda-10=0\end{smallmatrix}\right\}$Resolvemos el sistema y obtenemos como soluciones:$\lambda=\frac{-5}{2}\quad;\quad\mu=\frac{5}{2}$

Entonces el vector será: $\vec{AB}=(\mu-\lambda-4,\mu-\lambda-6,-\mu-\lambda)$

$\vec{AB}=\left(\frac{5}{2}-\frac{-5}{2}-4,\frac{5}{2}-\frac{-5}{2}-6,-\frac{5}{2}-\frac{-5}{2}\right)$

$\vec{AB}=(1,-1,0)$

El punto A es entonces: $A(5+\lambda,6+\lambda,-1+\lambda)$

$A\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{-7}{2}\right)$

Con vector y punto ya podemos definir la ecuación de la perpendicular común

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} + t \\ y = \frac{7}{2} - t \\ z = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

Otra forma de hacerlo De las ecuaciones de las rectas r y s podemos obtener punto y vector de cada recta

$r \equiv \begin{cases} P_r(5,6,-1) \\ \vec{v_r}=(1,1,1) \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} P_s(1,0,-1) \\ \vec{v_s}=(1,1,-1) \end{cases}$

El vector $\vec{v_r} \times \vec{v_s}$ nos servirá como vector director de la recta (p) perpendicular común (recordemos que el vector producto vectorial de dos vectores es perpendicular a cada uno de esos dos vectores).

Si lo calculamos obtenemos $\vec{v_r} \times \vec{v_s} = (-2, 2, 0)$ También podemos usar un vector proporcional $\vec{w} = (-1, 1, 0)$

Hallamos la perpendicular común como intersección de dos planos:

- plano 1(π_1) :contiene a r y es paralelo a$\vec{w}$

- plano 2 (π_2): contiene a s y es paralelo a $\vec{w}$

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} P_r(5,6,-1) \\ \vec{v_r} = (1,1,1) \\ \vec{w} = (-1,1,0) \end{cases} \qquad \pi_2 \equiv \begin{cases} P_r(1,0,-1) \\ \vec{v_r} = (1,1,-1) \\ \vec{w} = (-1,1,0) \end{cases}$$

Ahora podemos obtener la ecuación general de cada plano mediante determinantes y obtendremos:

$\pi_1 \longrightarrow -x - y + 2z + 13 = 0 \pi_2 \longrightarrow x + y + 2z + 1 = 0$

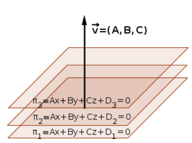
Por tanto, la ecuación de la perpendicular común (en ecuaciones implícitas) es:

$\left.\begin{matrix} -x-y+2z+13=0 \\ x+y+2z+1=0 \end{matrix}\right\}$

4.4.4. Haz de planos paralelos

Un haz de planos paralelos es un conjunto de planos que comparten el mismoo vector normal, por lo tanto la ecuación de todos esos planos tendrá un parámetro en el coef independiente de la ecuación.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad D \in R$$



4.4.5. Haz de planos con base una recta

Un conjunto de planos tiene una ecuación similar a la de un plano, con todos sus coeficientes determinados, excepto un parámetro libre k de primer grado. A cada valor del parámetro le corresponde a un plano del haz:

$A(k)x + B(k)y + B(k)z + D(k) = 0$

En el caso de un haz propio, siempre es posible realizar un agrupamiento parcial del parámetro k para separar la ecuación del plano de la siguiente manera:

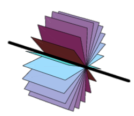
$Ax + By + Cz + D + k(A'x + B'y + C' + D) = 0$;

para obtener dos planos:

$\Pi_1 : Ax + By + Cz + D = 0$

$\Pi_2 : A'x + B'y + C' + D' = 0$

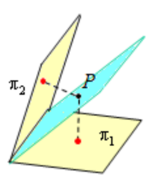
que se llaman ”generadores” del haz e identifican la línea recta que pertenece a todos los planos del haz. Π_1 se obtiene haciendo $k = 0$ mientras que Π_2, aunque pertenece al haz, no puede obtenerse para ningún valor real atribuible al parámetro, sino que solo puede aproximarse a través de los planos obtenidos para valores «muy grandes de k» .



4.4.6. Plano bisector de dos planos dados que se cortan

Dados dos planos π_1 y π_2 que se cortan en una recta, el plano bisector de ellos es el que divide el ángulo diedro que determinan en dos ángulos iguales. (Es el concepto análogo a la bisectriz de un ángulo determinado por dos rectas.)

Propiedad Todos los puntos del plano bisector están a la misma distancia de los planos dados.



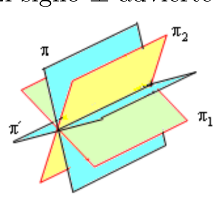
Esto es, si el punto $P(x, y, z)$ pertenece al plano bisector π, se cumple que $d(P, \pi) = d(P, \pi')$.

Por tanto, si los planos dados son: :π : $Ax + By + Cz + D = 0$ y π' : $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

La ecuación del plano(s) bisector será:

$$\frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm\frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

El signo $\pm$ advierte que hay dos soluciones.



5. Áreas y volúmenes

5.1. Área de un paralelogramo

Dado un paralelogramo $ABCD$ en el espacio, supongamos que las coordenadas de tres vértices son $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$,$C(c_1, c_2, c_3)$. Llamemos S al área del paralelogramo y $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$,$C(c_1, c_2, c_3)$. Entonces:

$$S = |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}|$$

5.2. Área de un triángulo

Dado un triángulo ABC en el espacio, supongamos que las coordenadas de tres vértices son $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$,$C(c_1, c_2, c_3)$. Llamemos S al área del triángulo y $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$,$C(c_1, c_2, c_3)$. Entonces: $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$

$$= |\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}|$$

Ejemplo Calcula el área del triángulo de vértices $A(0, 3, 0), B(2, 0, 0) y C(0, 0, -5)$

Solución Podemos usar el producto vectorial $\vec{AB} \times \vec{AC}$ y aplicar la fórmula $A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$\vec{AB} = (2, -3, 0)$; $\vec{AC} = (0, -3, -5)$
$\vec{AB} \times \vec{AC} = (15, 10, -6)$
$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{15^2 + 10^2 + (-6)^2} = 9{,}5\, u^2$

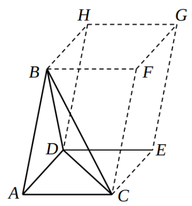
5.3. Volumen de un paralelepípedo

Un paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos. El volumen de un paralelepípedo es igual al área de la base multiplicada por la altura. Podemos tomar como base

cualquiera de las caras, y en este caso la altura será la distancia existente entre los planos que contienen a dos bases opuestas.

Dados cuatro puntos del espacio A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3) ,C(c_1, c_2, c_3) y D(d_1, d_2, d_3) , podemos realizar la construcción de la figura para obtener un paralelepípedo. Su volumen V es el valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$

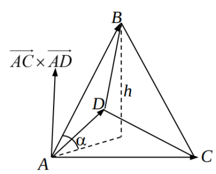
$$Vol = |\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix}|$$



5.4. Volumen de un tetraedro

Sean $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$,$C(c_1, c_2, c_3)$ y $D(d_1, d_2, d_3)$, , cuatro puntos del espacio. Al unirlos entre sí de todas las maneras posibles, determinan un tetraedro cuyo volumen V es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$, , es decir

$$Vol = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix}|$$



Ejemplo Los puntos $A(3, 0, 0), B(0, 3, 0)yC(0, 0, 3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A, ByC.

- a) Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.
- b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto P(1,1,1) y es perpendicular al plano π
- c) Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

Solución

a) Podemos determinar la ecuación del plano π mediante un punto: $A(3, 0, 0)$ y dos vectores: $\vec{AB} = (-3, 3, 0)y\vec{AC} = (-3, 0, 3)$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0;\ 9x + 9y + 9z - 27 = 0$$

Podemos simplificar dividiendo entre 9 $\pi \longrightarrow x + y + z - 3 = 0$

b) Ecuación de la recta (r) que pasa por $P(1, 1, 1)$ y es perpendicular a $\pi \longrightarrow x + y + z - 3 = 0$

Tomamos como vector director el vector normal al plano: $\vec{v} = (1,1,1)$ y como punto el P$(1,1,1)$

En ecuaciones paramétricas sería: $r \longrightarrow \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

- c) Del vértice D tenemos dos datos:

1) D está en la recta r por tanto sus coordenadas son de la forma: $D(1+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda)$

2) El volumen del tetraedro es 18 El volumen de un tetraedro se calcula mediante el producto mixto: $\frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$=Volumen del tetraedro ABCD

$\vec{AB} = (-3,3,0)\vec{AC} = (-3,0,3)\vec{AD} = (1+\lambda-3, 1+\lambda-0, 1+\lambda-0) = (\lambda-2, 1+\lambda, 1+\lambda)$

$\frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 18[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ \lambda-2 & +\lambda & +\lambda \end{vmatrix} = 27\lambda$

$\frac{1}{6} \cdot |27\lambda| = 18|27\lambda| = 18 \cdot 6|27\lambda| = 108|\lambda| = \frac{108}{27}|\lambda| = 4 \longrightarrow \lambda = \pm 4$

Como$D(1+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda)$ obtendríamos dos posibles valores para el punto D: $D(5,5,5) y D(-3,-3,-3)$