S3r4 | 2022

MATEMÁTICAS : Bachillerato II

Geometría: Vectores (I)

Apuntes

by Sera

Definición Vector fijo

Llamaremos **vector fijo** a un par ordenado (A, B) de puntos del espacio ordinario, E.

Podría darse el caso de que ambos sean coincidentes, caso en el que hablaremos de vector nulo. Con el símbolo $\vec{AB}$ designaremos el vector denido por los puntos A y B, en ese orden,

y diremos que el vector $\vec{AB}$ tiene por origen A y por extremo B.

El vector $\vec{AB}$ está definido exclusivamente por los puntos A y B.

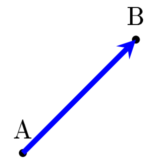
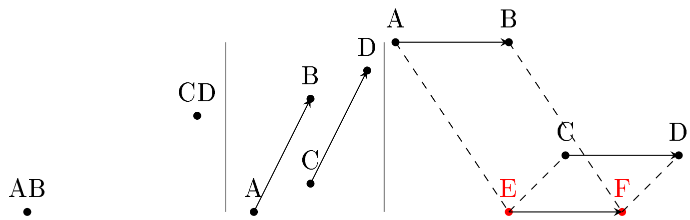


Figura 1: Vector fijo

Dibujar en la imagen la punta de flecha obedece a la necesidad de indicar un orden.

Definición (relación de equipolencia)

Con objeto de establecer una relación entre vectores fijos, considera las figuras :



- En las tres figuras aparecen los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ y en la última, aparece además un tercer vector, el $\vec{EF}$.
- En el primer caso, los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son nulos, es decir, $A = B$ y $C = D$.
- En el segundo caso, en el que los puntos A, B, C y D no están alineados, la figura $ABDC$ (Atención al orden de los vértices!) es un paralelogramo.
- En el tercer caso, en el que los puntos A, B, C y D están alineados, existe otro vector $\vec{EF}$ tal que las figuras $ABFE$, $CDFE$ son paralelogramos. Pues bien, cuando ocurra uno cualquiera de los tres casos anteriores (o, lo que es lo mismo: cuando trasladando $\vec{AB}$ paralelamente a sí mismo se pueda superponer con $\vec{CD}$, eso implica que la longitud o módulo es la misma) , diremos que los vectores fijos $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son equipolentes y escribiremos $\vec{AB} \simeq \vec{CD}$.

Estamos viendo que hay tres conceptos importantes referente a los vectores: **Módulo, dirección y sentido.**

- Diremos que dos vectores fijos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen igual **dirección**, en cuyo caso escribiremos $\vec{a}//\vec{b}$, cuando llas rectas donde están situadas son paralelas

- Dados dos vectores no nulos $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ de igual dirección, diremos que tienen el mismo **sentido** cuando B y D están en el mismo semiplano determinado por la recta que une A y C.

- Se define **módulo** de un vector como la longitud del mismo.

Definimos pues la siguiente relación: **Dos vectores son equipolentes si tienen el mismo módulo, igual dirección e igual sentido**

Definiciones (vector libre y espacio vectorial V^3)

Dado un vector fijo $\vec{AB}$, llamaremos **vector libre** $[\vec{AB}]$ al conjunto de todos los vectores fijos equipolentes a él:

$$[\vec{AB}] = \{\vec{XY} / \vec{XY} \simeq \vec{AB}\}$$

Es decir un vector libre es un conjunto infinito de vectores relacionados entre si por medio de tener la misma longitud , misma dirección e igual sentido.

Cuando no haya posibilidad de error, escribiremos $\vec{AB}$ en lugar de $[\vec{AB}]$ y utilizaremos los símbolos $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ... para designar vectores libres cualesquiera.

En particular, designaremos por $\vec{0}$ el vector libre nulo, es decir, el formado por todos los vectores fijos nulos.

Para mostrar en las figuras un vector libre, dibujaremos uno cualquiera de sus representantes o vectores fijos equipolentes que lo formen.

Con el símbolo V^3 designaremos el conjunto de todos los vectores libres del espacio. Este conjunto juega un papel muy importante en matemáticas y, sobre todo, en Física (magnitudes vectoriales).

V^3 dio origen al concepto de espacio vectorial, y por ello cualquier conjunto que esté dotado de esa estructura reciben el nombre de vectores, sean dichos elementos polinomios, funciones o lo que sea, siempre que el conjunto tenga estructura de espacio vectorial. Como veremos para tener estructura de espacio vectorial, necesitamos dos operaciones con las propiedades adecuadas.

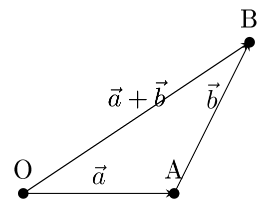
El espacio vectorial V^3

Establecido, pues, qué son los vectores libres, vamos a definir algunas operaciones que se pueden efectuar con ellos. Antes, necesitamos un sencillo resultado.

Fijado un punto O del espacio, es posible encontrar para todo vector libre $[\vec{AB}]$ un único representante de origen O.

Definición (de suma de vectores libres)

Estamos ahora en condiciones de definir una operación entre vectores libres a la que, convencionalmente, llamaremos suma. A tal fin, sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores libres del espacio. Como hemos dibujado en la figura, tomado un punto cualquiera, O, existirá un único punto A tal que $\vec{OA}$ sea representante del vector libre $\vec{a}$ y, considerado este punto A, otro único punto B tal que $\vec{AB}$ sea representante de $\vec{b}$:



Se define entonces la suma $\vec{a}+\vec{b}$ como el vector libre del cual $\vec{OB}$ es un representante. (regla del paralelogramo)

Propiedades de la suma de vectores libres

- Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+w = (u+(\vec{v}+w), \forall \vec{u}, \vec{v}, w \in V$
- Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+u, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
- Elemento neutro : $\vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u}, \forall \vec{u} \in V$
- Todo elemento tiene opuesto: $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}, \forall \vec{u} \in V$
- Definición (Producto de un número real por un vector libre)
- Sea a un vector libre no nulo y sea $\lambda \in$ R .Se define $\lambda \cdot \vec{u}$ como el vector libre de igual dirección que u , cuyo módulo es $|\lambda|.|\vec{u}|$ y cuyo sentido es el de a si $\lambda > 0$ y el opuesto si $\lambda < 0$.
- Si $\lambda = 0$ ó $\vec{u} = \vec{0}$, se define $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Propiedades del producto de un número real por un vector libre

- Propiedad asociativa: $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u}, \forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{u} \in V$
- Existe el elemento unidad: : $\exists 1 \in K : 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in V$
- Propiedad distributiva respecto de la suma vectorial: $\lambda \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}, \forall \lambda \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
- distributiva respecto de la suma escalar: $(\lambda+\mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}, \forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{u} \in V$:

$(V^3, +, \cdot k)$ es espacio vectorial

Comprobar que el producto de un número por un vector libre es una aplicación de R en V^3 que cumple las cuatro propiedades exigidas a la ley de composición externa de un espacio vectorial es relativamente sencillo.

Como, por otra parte, la suma de vectores libres también cumplía las oportunas propiedades, concluiremos que $(V^3, +, \cdot k)$ es un espacio vectorial.

La definición de espacio vectorial va mas allá del ejemplo concreto de V^3 .

Un conjunto con dos operaciones denidas cumpliendo las 8 propiedades de las dos operaciones, se dice que es un espacio vectorial.

Ejemplos de espacios vectoriales:

- Las matrices $(M_{mxn}, +, \cdot k)$
  - En este conjunto se cumplen las ocho propiedades para la $+$ y $\cdot k$ de matrices, por lo que ese conjunto tiene estructura de espacio vectorial.
- Los polinomios $P[x]$
- El espacio vectorial más conocido notado como K^n , donde $n > 0$ es un entero, tiene como elementos n-tuplas, es decir, sucesiones finitas de K de longitud n con las operaciones:

$$(u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$$

$$a(u_1, u_2, ..., u_n) = (a \cdot u_1, a \cdot u_2, ..., a \cdot u_n).$$

Combinación lineal

Dado el espacio vectorial V^3 , diremos que un vector u es combinación lineal de los vectores de $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\} \subset V^3$ si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tales que $\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$

Denotamos como $S_{(V^3)}$ el conjunto resultante de todas las combinaciones lineales de los vectores de $S \subset V^3$.

Se dice que el conjunto $S = \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \subset V^3$ es un **sistema de generadores si** todo vector $\vec{u}$ de V^3 se puede obtener a partir de $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ **.**

Independencia lineal

Diremos que un conjunto $S = \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ de vectores es **linealmente independiente** si el vector $\vec{0}$ no se puede expresar como combinación lineal no nula de los vectores de S, es decir:

Si

$$0 = a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_n\vec{v}_n = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$$

Diremos que un conjunto S de vectores es **'linealmente dependiente**' si no es linealmente independiente.

Proposición

$$\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \textit{ son linealmente dependientes } \Longleftrightarrow \exists \vec{v}_i \neq 0 : \vec{v}_i = \sum_{i \neq j \geq 1}^{n} \vec{\lambda_j v_j}$$

Es decir ,es linealmente independiente si uno de los elementos del conjunto puede obtenerse como combinación lineal del resto de elementos del conjunto.

Base de un espacio vectorial

Dado un sistema de generadores, diremos que es una **base** del espacio vectorial si son linealmente independientes.

Llamaremos dimensión de un espacio vectorial al número de elementos de dicha base.

Teorema (dependencia lineal de dos vectores libres)

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores libres no nulos. Entonces, las proposiciones siguientes son equivalentes :

1. $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.
2. Existe un número real λ tal que $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$
3. $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen igual dirección.

Demostración

En efecto, la equivalencia entre las dos primeras proposiciones es evidente, veamos la equivalencia entre la 2 y la 3:

- Si se verifica la 2, y existe un número λ tal que $\vec{u} = \lambda.\vec{v}$, es obvio que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tendrán igual dirección.

- Si se verifica la 3, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diferirán, a lo sumo, en módulo y sentido, luego tomando $\lambda = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$, será $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ ó $\vec{u} = -\lambda \cdot \vec{v}$.

Entonces la dependencia lineal de dos vectores libres no nulos equivale a que ambos (o representantes suyos, para ser más precisos), se hallan en la misma recta.

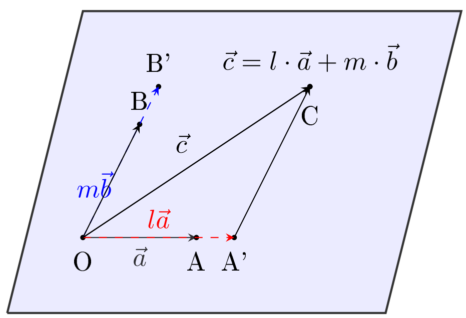
Teorema (dependencia lineal de tres vectores libres)

Tres vectores libres no nulos $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ de V^3 son linealmente dependientes $\Longleftrightarrow$ están en un mismo plano

(Cuando decimos que los vectores libres están en un mismo plano, queremos decir que se pueden elegir representantes suyos contenidos en él)

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos en primer lugar que $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ y $\vec{OC}$, representantes de $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ con igual origen, están en el mismo plano, como se indica en la figura:



Se tendrá: $\vec{OC} = l \cdot \vec{OA} + m \cdot \vec{OB}$ y como existen números l , m tales que: $OA' = l \cdot OA$, $OB' = m \cdot OB$, se concluirá: $OC = l \cdot OA + m \cdot OB$, o sea: $\vec{c} = l \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}$ luego $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes.

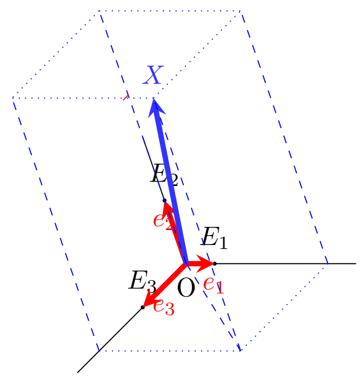
$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes

Al menos uno de ellos será combinación lineal de los otros dos, por ejemplo $\vec{c} = l \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}$, y tomando representantes con el mismo origen O, podremos escribir: $\vec{OC} = l \cdot \vec{OA} + m \cdot -\vec{OB}$ que indica que $\vec{OC}$ está en el mismo plano que $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$.

Definición (de bases en V^3 y de coordenadas de un vector)

Supongamos que $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ son tres vectores libres que, como los de la siguiente figura, no están en un mismo plano.

Como se sabe son linealmente independientes, veamos que constituyen un sistema generador del espacio vectorial V^3 :



Sean: $\vec{X}$ un vector cualquiera de V^3 , cuyo representante con origen O es $\vec{O}X$.

$\vec{O}E_1$, $O\vec{E}_2$ y $O\vec{E}_3$ los representantes con origen O de $\vec{e1}, \vec{e2}, \vec{e3}$.

Entonces, siendo $x_i (i = 1, 2, 3)$ los números reales que cumplen:

$OX_i = \vec{x}_i \cdot O\vec{E}_i$, podremos escribir:

$$\vec{x} = O\vec{X} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} + O\vec{X}_3 = x_1 \cdot \vec{O}E_1 + x_2 \cdot \vec{O}E_2 + x_3 \cdot O\vec{E}_3 = x_1 \cdot \vec{e1} + x_2 \cdot \vec{e2} + x_3 \cdot \vec{e3}$$

,

luego$\vec{x}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ que, por tanto, forman una base de V^3(pues son linealmente independientes y constituyen un sistema generador).

Como es normal, de (x_1, x_2, x_3) se dirá que son las $coordenadas\_del\_vectorx$ *en la base* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, y cuando no haya dudas sobre cuál es la base utilizada se escribirá simplemente:
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

Consecuencia

Las coordenadas en una base son únicas Más adelante nos será útil tener en cuenta que si se conocen las coordenadas de dos vectores libres: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, entonces se cumple:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

como podemos comprobar sin más que expresar $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en función de la correspondiente base y aplicar las propiedades de la suma de vectores libres y de la multiplicación de un número real por un vector.

Coordenadas de los elementos de una base en la propia base

Si $B = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ es una base de V^3 entonces: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ son las coordenadas de e_1 en la base B , ya que :

$$\vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

del mismo modo

$$\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = (0, 1, 0)$$

$$\vec{e}_3 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Observaciones

- Las bases son conjuntos ordenados. Es decir que si bien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ generan el mismo espacio vectorial, las bases no son iguales.
- Dado un vector $\vec{v}$ y una base B de un espacio vectorial V, existe una única manera de escribir a $\vec{v}$ como combinación lineal de los elementos de la base B.
- Es decir, la representación de un vector en una base es única.
    - De la observación anterior se desprende que las bases no son únicas. En general, suele haber infinitas bases distintas para un mismo espacio vectorial.
    - Por ejemplo, si $V = R^3$, una base muy sencilla de V es: $B = (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)$ la cual es conocida como base canónica de R^3 .
- No todas las bases tienen un número finito de elementos. Por ejemplo, las bases del espacio vectorial de los polinomios de una variable tienen infinitos elementos.
    - Una posible base es la formada por los polinomios potencias de X: $B = \{1, x, x^2, x^3, ...\}$

Cambio de base

En un espacio vectorial V, fijada una base $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ... \overrightarrow{v}_n$, todo vector $\vec{u} \in V$ puede ponerse de forma única como combinación lineal de dicha base:

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ...\alpha_n\vec{v}_n$$

Los escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ se llaman coordenadas del vector $\vec{u}$ en la base $B = \{v_1, v_2, ...v_n\}$.

Ejemplos de coordenadas.

Coordenadas en distintas bases. En R^2 fijemos la base canónica, $(1,0),(0,1)$.

Consideremos el vector $\vec{v}=(1,2)$. Para hallar sus coordenadas en esta base, ponemos $\vec{v}$ como combinación lineal de la misma: $(1,2)=1\cdot(1,0)+2\cdot(0,1)$

Por tanto, $(1,2)$ son las coordenadas de $\vec{v}$ en base canónica.

Cuando se utiliza la base canónica, obtenemos el sentido usual de coordenadas. Pero cuando se utiliza otra base no es así.

Por ejemplo, en R^2 fijemos ahora la base $B=(2,3),(1,1)$ y consideremos el mismo vector $\vec{v}=(1,2)$.

Hallemos sus coordenadas en la base B. Para poner \vec v como combinación lineal de dicha base, planteamos el sistema $(1,2)=\alpha(2,3)+\beta(1,1)$ cuya solución es $\alpha=\frac{3}{5},\beta=-\frac{1}{5}$.

Así pues, $\vec{v}=\frac{3}{5}(2,3)+-\frac{1}{5}(1,1)$

Por tanto, $\vec{v}=(\frac{3}{5},\frac{-1}{5})$ son las coordenadas de $\vec{v}$ en base B. No debe confundirse el vector con sus coordenadas; aquí el vector sigue siendo $\vec{v}=(1,2)$, y las coordenadas $(\frac{3}{5},\frac{-1}{5})$

Matriz del cambio de base.

En un espacio vectorial V, dadas dos bases B y B' , se llama **matriz de cambio de base** (o de cambio de coordenadas) de B a B' a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base B expresados en función de la base B'.

Su utilidad es la siguiente: Conocidas las coordenadas de un vector en base B, nos permitirá hallar las coordenadas de dicho vector en base B'. En efecto, sean $(a_1,a_2,..a_n)$ las coordenadas de un vector en base B, y sea P la matriz de cambio de base de B a B'. Entonces: $P\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\..\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\..\\b_n\end{pmatrix}$

o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\..\\a_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\..\\b_n\end{pmatrix}$$

obteniéndose así $(b_1,b_2,...b_n)$ las coordenadas del vector en base B'.

Ejemplo 1.

Consideremos en R^2 las dos bases siguientes: $B=(2,3),(1,1)$ la base canónica $B'=\{(1,0),(0,1)\}$

Vamos a construir la matriz de cambio de base de B a B'.

Para ello debemos expresar los vectores de la base B en función de la base canónica B'.

$$(2,3)=2\cdot(1,0)+3\cdot(0,1)\Rightarrow coordenadas(2,3)$$
$$(1,1)=1\cdot(1,0)1\cdot(0,1)\Longrightarrow coordenadas(1,1)$$

Introduciendo estas coordenadas en las columnas de una matriz, tendremos la matriz de cambio de base de B a B': $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Del mismo modo podemos construir la matriz de cambio de base de B' a B.

Para ello expresamos los vectores de la base canónica B' en función de la base B.

Podemos hallarlo planteando dos sistemas de ecuaciones, de los cuales se obtendrá

$(1,0) = \frac{1}{5}(2,3) + \frac{3}{5}(1,1) -> coordenadas(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$

$(0,1) = \frac{1}{5}(2,3) - \frac{5}{2}(1,1) -> coordenadas(\frac{1}{5}, \frac{-2}{5})$

Introduciendo estas coordenadas en las columnas de una matriz, tendremos la matriz de cambio de base de B' a B.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$$

Vamos a aplicar estas matrices para hallar las coordenadas en base B del vector $\vec{v} = (1,2)$.

Tenemos sus coordenadas en la base canónica B' que son $(1,2)$. Utilizamos la matriz Q de cambio de base de B' a B:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

Así hemos obtenido $(\frac{3}{5}, \frac{-1}{5})$, las coordenadas de $\vec{v}$ en base B. Comprobar que son las mismas que se obtuvieron en el ejemplo anterior. Podemos volver a las coordenadas en base B' utilizando la matriz P de cambio de base de B a B':

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

En R^3 consideremos las bases $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ y $B' = \{(1,0,-1),(0,-1,0),(-1,1,0)\}$ y calculemos la matriz P de cambio de base de B a B' .

En la primer columna de M debemos poner al primer vector de la base B (es decir $(1,1,1)$) escrito en las coordenadas de la base B' .

Planteamos

$(1,1,1) = a(1,0,-1) + b(0,-,0) + c(-1,1,0)$ de donde $a = -1, b = -3$ y $c = -2$.

Por lo tanto, $(1,1,1)_{B'} = (-1,-3,-2)$.

De la misma manera, hallamos que $(0,1,1)_{B'} = (-1,-2,-1)$ y $(0,0,1)_{B'} = (-1,-1,-1)$.

Por lo tanto,$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$