S3r4 | 2023

MATEMÁTICAS : Bachillerato I y II

Funciones

Apuntes

by Sera

1 Funciones reales de variable real

1.1 Conceptos Generales

Definición.

Una función real de variable real $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una correspondencia de $A \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que asigne a todo $x \in A$ a lo más un número real $y = f(x)$.

Estudiaremos únicamente funciones reales de variable real, de forma que escribiremos directamente "funciones" para referirnos a ellas.

Definición.

Llamaremos **Dominio de** f, $Dom(f)$, al conjunto de elementos de A para los cuales existe $f(x)$.

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} | \exists y \in \mathbb{R} : \quad f(x) = y\}$$

Habitualmente consideraremos $A = Dom(f)$, en tal caso f será una aplicación.
Otra definición elemental es la del conjunto **Imagen de la función** f, $Im(f)$:
Llamamos Imagen de f o recorrido de una función al conjunto de valores de $\mathbb{R}$ que toma la variable dependiente:

$$Im(f) = y \in \mathbb{R} / \exists x \in A, f(x) = y$$

Ejemplo :

- La función: $f(x) = x^2 + 1$ está definida sobre todos los números reales, es decir $Dom(f) = \mathbb{R}$, pero su imagen la constituyen tan sólo los números reales mayores o iguales a 1 : $Im(f) = [1, \infty)$.
- La "raız cuadrada", entendiendo por raíz cuadrada la función que hace corresponder a cada $x \in R^+$ los números reales y tales que $y^2 = x$.
    - Tenemos entonces que: $Dom(\sqrt{x}) = \mathbb{R}^+$, mientras que $Im(\sqrt{x}) = \mathbb{R}^+$.

- $f(x) = \sqrt{7x - 21}$ El índice de la raíz es par (2), por tanto debe suceder que $7x - 21 \geq 0$ dominio entonces será el conjunto de todos los reales en el intervalo $[3, +\infty)$.
- $f(x) = \log(x)$ El dominio de esta función es $(0, +\infty)$ ya que los logaritmos están definidos sólo para números positivos.
- $\log(x^2 - 9)$ Por la propiedad anteriormente citada, se observa que para que esta función esté bien definida, necesariamente $x^2 - 9 > 0$; despejando, se obtienen dos soluciones $x > 3$ y $x < -3$. La unión de ambas soluciones representa el dominio de la función, que está definida como el conjunto $(-\infty, -3) \bigcup (3, +\infty)$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ El dominio de esta función es puesto que la función no está definida para $x = 0$.

Nota: *utilizaremos siempre la notación $\sqrt{x}$ para referirnos la raíz cuadrada positiva del número real $x \in R+$. La raíz cuadrada negativa será denotada por tanto: $-\sqrt{x}$*

Se dice que una función $y = f(x)$ está expresada en **forma analítica** si se define por la **fórmula** que indica las operaciones que debemos realizar con todo valor del dominio de f para obtener el correspondiente valor de la imagen.

En general, si no está especificado, se sobreentiende que el dominio de la función es el conjunto de valores reales para los cuales la expresión analítica que define la función toma sólo valores reales y finitos.

1.2 Gráfica de una función

Se denomina gráfica de una función $y = f(x)$ al conjunto de puntos que se obtienen tomando los pares de valores $(x, f(x))$ como coordenadas de un punto del plano. Una función está expresada gráficamente si viene dada por su gráfica.

$$graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\}$$

Una función se dice prefijada en forma tabular si se indican los valores numéricos de la función para algunos valores de la variable x. Los hechos experimentales suelen estar descritos por este tipo de expresión.

2 Propiedades generales de las funciones

2.1 Corte con los ejes

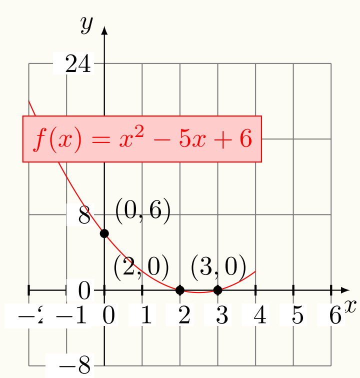
Los puntos de corte con los ejes coordenados son los puntos en los cuales la gráfica de la función corta al eje de abscisas y/o al eje de ordenadas.

Corte con el eje **OY**: Para hallar dicho punto de corte con el eje de ordenadas (será uno como máximo) sustituimos x por 0 (0 debe pertnecer al dominio Dom(f)) y se halla el valor de y: Dada $y = f(x) \to$ Si $x = 0 \in Dom(f) \Rightarrow y_o = f(0) \Rightarrow$ Punto de corte: $(0, y_o)$

Corte/s con el eje **OX**: Para hallar ,si existen, los puntos de corte con el eje X se iguala a cero la función y se resuelve la ecuación : Dada $y = f(x) \to$ Si y $= 0 \Rightarrow f(x) = 0$ .Entonces si tenemos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soluciones de dicha ecuación tendremos n puntos de corte$\Rightarrow$ Puntos de corte: $(x_1, 0), (x_2, 0) \ldots, (x_n, 0)$

Corte con los ejes

Corte eje Y: $(0, f(0)) = (0, 6)$
Corte eje X;$0 = f(x); 0 = x^2 - 5x + 6; x = 2, x = 3 \Rightarrow (2, 0)\ y\ (3, 0)$



2.2 Crecimiento y decrecimiento.

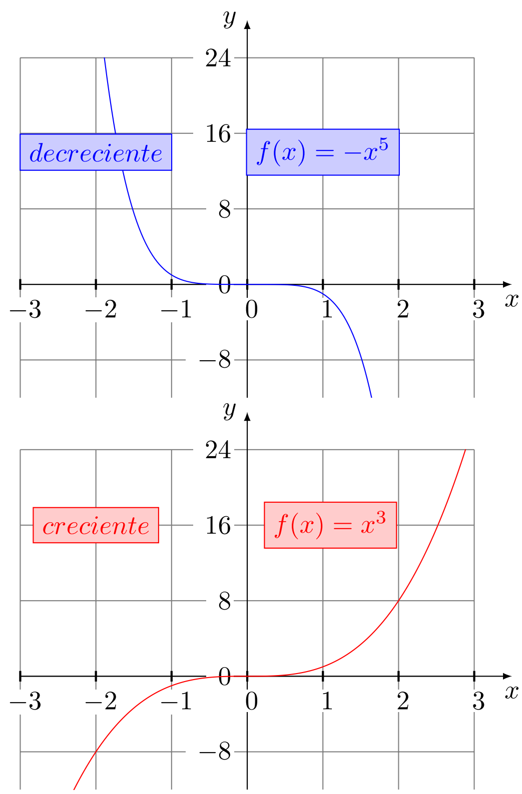
Sea $f : D \to R(D = Dom(f))$ y sea $B \subset D$.

Entonces:

f es **creciente** en B si $\forall x_1, x_2 \in B$ tales que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$.

f es **estrictamente creciente** en B si $\forall x_1, x_2 \in B, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x1) < f(x2)$.

f es **decreciente y estrictamente** decreciente en B de maneras análogas.

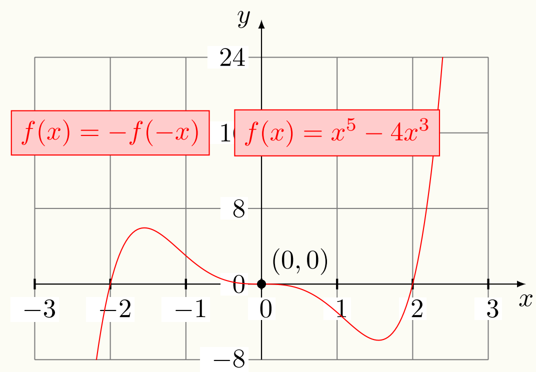


2.3 Paridad e imparidad.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, con $Dom(f) = A$ y tal que si $x \in A \Rightarrow -x \in A$. Entonces se define:

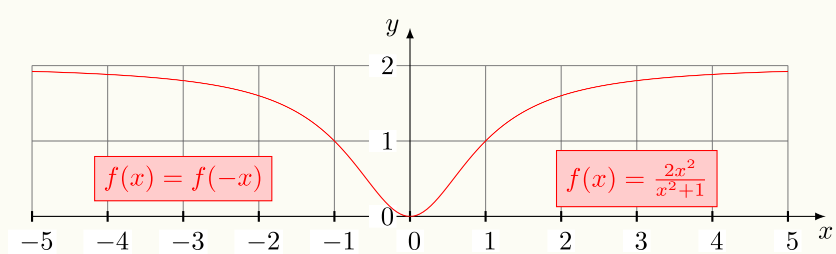
- f es una **función impar** si $\forall x \in A$ se verifica $f(-x) = -f(x)$.

Función impar



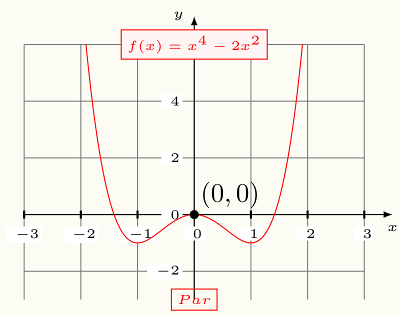
- f es una **función par** si $\forall x \in A$ se verifica $f(-x) = f(x)$.

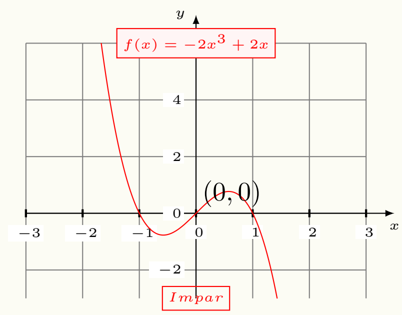
Función par



La gráfica de una función par presenta una simetría con respecto al eje de ordenadas mientras que la de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas

Ejemplos



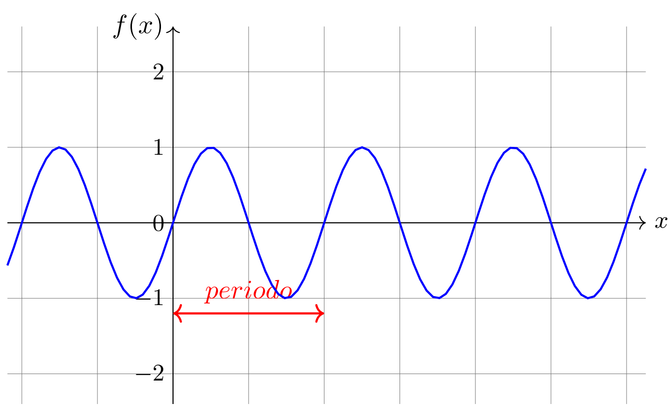


PAR:$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$;
IMPAR:$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -f(x)$

2.4 Periodicidad.

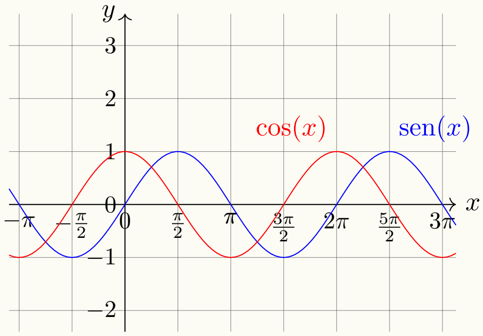
f es una función **periódica** si existe $h \in R, h > 0$, tal que:

$$f(x) = f(x+h), \qquad \forall \quad x, x+h \in Dom(f)$$



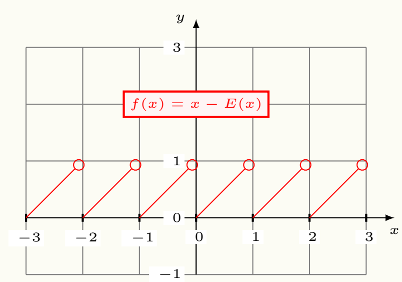
h recibe el nombre de periodo de la función $f(x)$.

Funciones periódicas



- Parte fraccionaria de $x \Longrightarrow f(x) = x - E(x)$ donde $E(x) = Parte\ Entera\ de\ x$

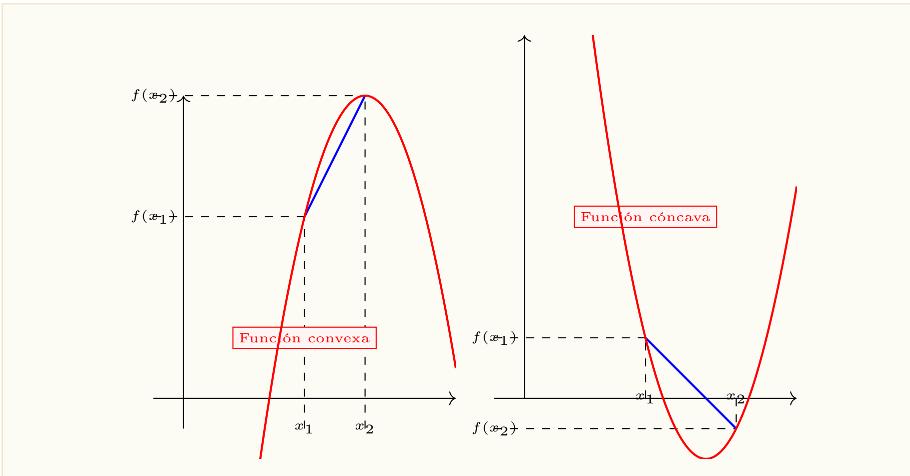
Función periódica



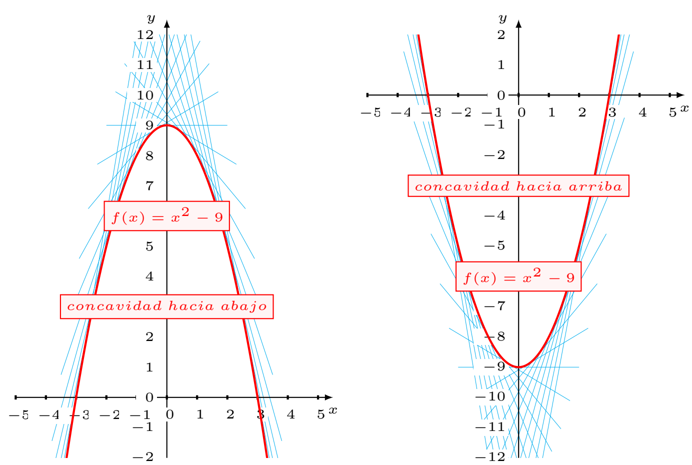
2.5 Concavidad y convexidad.

Desde un punto de vista geométrico, para una función tal que su gráfica en el intervalo (x_1, x_2) sea una curva continua, diremos que $f(x)$ es **cóncava** en (x_1, x_2) si dados dos puntos cualesquiera de la gráfica el segmento que los une queda por encima de la curva.

Si dicho segmento queda por debajo entonces la función será convexa.

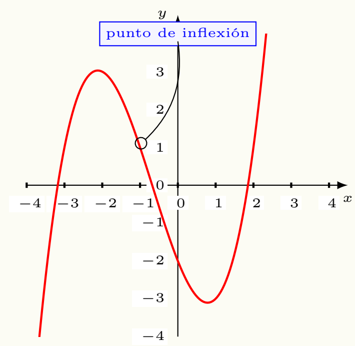


Nota: *Con frecuencia se define función cóncava y convexa con el criterio exactamente contrario, por ello es habitual también llamar función cóncava hacia arriba y función cóncava hacia abajo a las funciones cóncavas y convexas respectivamente.*



Los puntos en los que una función cambia su concavidad por convexidad (y recíprocamente) se denominan **puntos de inflexión de la función**.

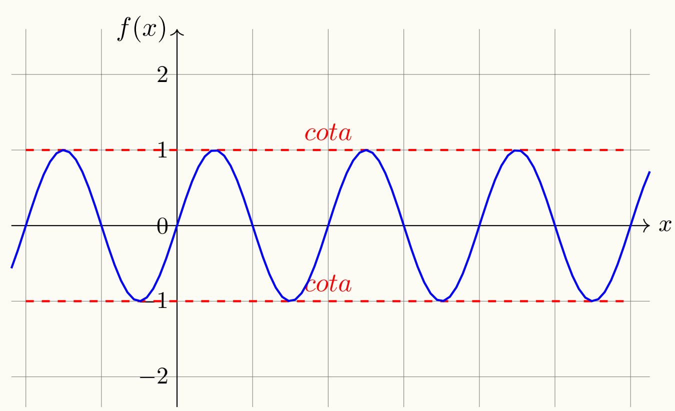
Punto de inflexión



2.6 Acotación.

$f(x)$ es una función **acotada** si $Im(f)$ es un conjunto acotado en R.

función acotada



2.6.1 Función acotada superiormente en un dominio D

Dada una función $f(x)$, se dice que tiene una cota superior o que está acotada superiormente si existe un valor K tal que $f(x) \leq K$ para cualquier valor de x perteneciente al dominio D. K se llama **cota superior** de $f(x)$ en D.

Dicho formalmente:

$f(x)$ es **acotada superiormente** si $\exists K \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \leq K \ \forall \ x \in D$.

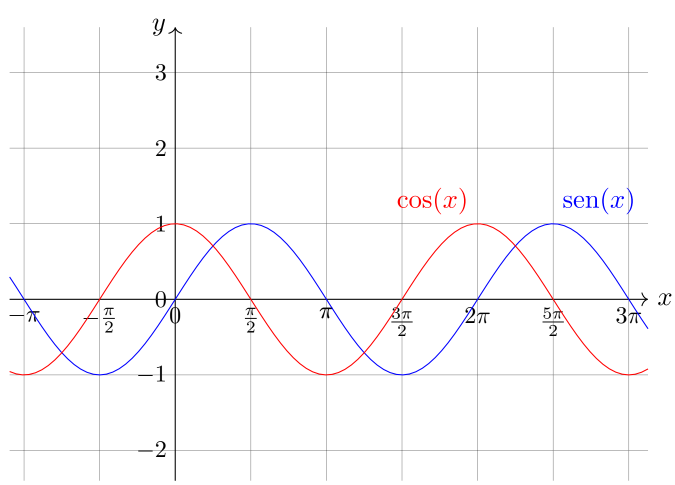
La función $y = f(x) = -x^2$ (parábola invertida) es una función **acotada superiormente** en el eje real con cota igual a 0.

2.6.2 Función acotada inferiormente en un dominio D

Dada una función $f(x)$, se dice que tiene una cota inferior o que está **acotada inferiormente** si existe un valor K tal que $f(x) \geq K$ para cualquier valor de x perteneciente al dominio D. **K** se llama **cota inferior** de $f(x)$ en D.

Ejemplos

- La función $y = f(x) = x^2$ es una función **acotada inferiormente** en el eje real con cota igual a 0.
- La función $y = f(x) = \sin(x)$ (función seno) es una función **acotada** en el eje real, con cota inferior igual a -1 y cota superior igual a 1.
- La función $y = f(x) = cos(x)$ (función coseno) es una función **acotada** en el eje real, con cota inferior igual a -1 y cota superior igual a 1.
- La función $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ (hipérbola) es una función **NO acotada**.



2.7 Función inversa.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, con $Dom(f) = A$, una función inyectiva (es decir, tal que si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$), entonces existe y es única la función $h : Imf \to \mathbb{R}$ tal que $h(f(x)) = x, \forall x \in A$, a la que llamaremos función inversa de f y denotaremos $h = f^{-1}$. También es inyectiva y verifica

$$f(h(x)) = x, \qquad \forall x \in Dom(h) = Im(f).$$

Ejemplo 1

Calcular la inversa de la siguiente función:$y = f(x) = \sqrt[3]{x+1}$
Solución: Igualamos a y y despejamos x :$y = \sqrt[3]{x+1} \Longrightarrow y^3 = x+1$
$\Longrightarrow y^3 - 1 = x$
Finalmente, cambiamos la y por la x y viceversa:
Con lo que la función inversa es $f^{-1}(x) = x^3 - 1$

Ejemplo 2

Calcular la inversa de la siguiente función: $y = f(x) = \dfrac{5x-3}{x}$
Solución: Igualamos a y y despejamos x :
$y = \dfrac{5x-3}{x} \Longrightarrow xy = 5x - 1 \Longrightarrow xy - 5x = -1 \Longrightarrow x(y-5) = -1$
$\Longrightarrow x = \frac{-1}{y-5}$
Finalmente, cambiamos la y por la x y viceversa:
Con lo que la función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{-1}{x-5}$

Ejemplo 3

Calcular la inversa de la siguiente función $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$**:**
*Solución:*Llamamos y a la función y despejamos la x elevando al cuadrado:
$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Longrightarrow y^2 = \frac{x+1}{x-1} \Longrightarrow y^2(x-1) = x+1$
$xy^2 - y^2 = x + 1 \Longrightarrow xy^2 - x = 1 + y^2 \Longrightarrow$
$x(y^2-1) = 1 + y^2 \Longrightarrow x = \frac{y^2+1}{y^2-1}$
Finalmente, cambiamos la y por la x y viceversa:

$y = \frac{1+x^2}{x^2-1}$
Luego la función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{x^2-1}$

2.8 Tipos de funciones

En general las funciones reales de variable real se suelen dividir en dos grandes grupos, funciones **algebraicas** y funciones **trascendentes**.

2.8.1 Funciones algebraicas

Función polinómica Son de la forma: $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + k$

Su dominio es $\mathbb{R}$.

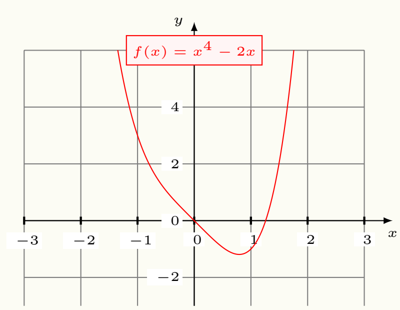
Son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$.

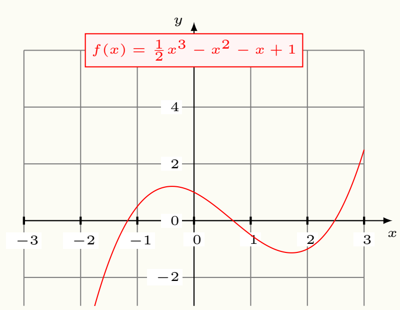
Si todos sus términos son de grado par, son simétricas respecto al eje Y, y si todos sus términos son de grado impar son simétricas respecto al origen de coordenadas.

No son periódicas.

No tienen asíntotas de ningún tipo. Por tanto, tienen ramas parabólicas.

Ejemplo 3



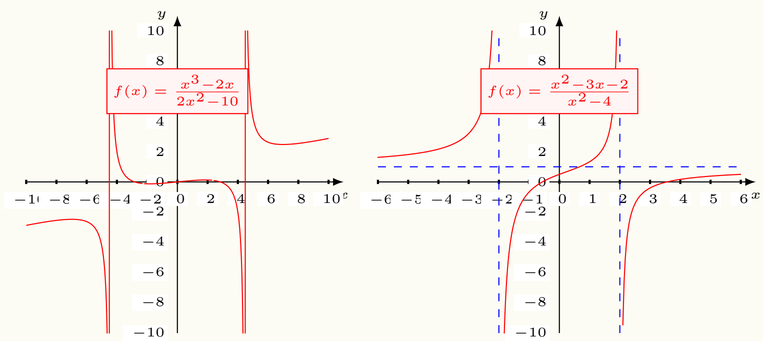


Función racional Una función racional de una variable es una función que puede ser expresada de la forma:

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios y x una variable, siendo Q distinto del polinomio nulo.

La palabra "racional" hace referencia a que la función racional es una razón o cociente (de dos polinomios).

Ejemplo



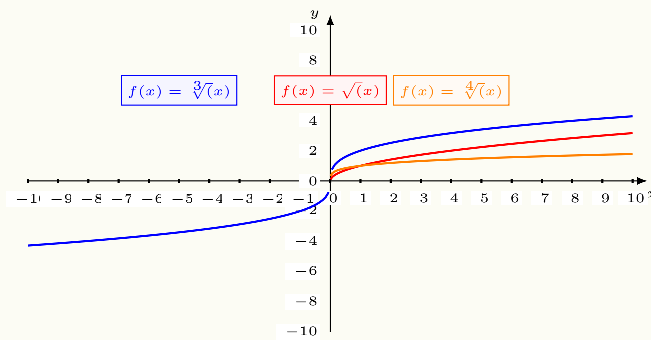
Función irracional Las funciones irracionales son aquellas cuya expresión matemática $f(x)$ presenta un radical:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

donde $g(x)$ es una función polinómica o una función racional.

Si n es par, el radical está definido para $g(x) \geq 0$; así que a los efectos de calcular el dominio de $f(x)$ que contenga un radical, habrá que imponer la condición anterior al conjunto de la expresión $f(x)$.

Ejemplo $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x}$; $\sqrt[4]{x}$



Función valor absoluto que se expresa:

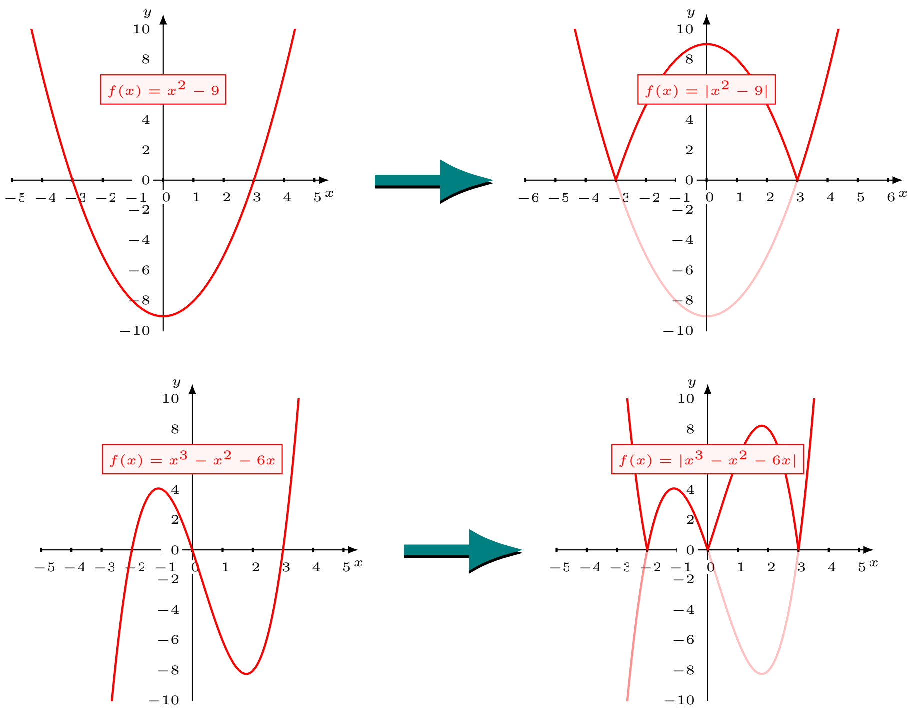
$$\text{abs}(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

De manera general, el valor absoluto de una función $f(x)$, o función en valor absoluto, se define según:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & sif(x) \geq 0 \\ -f(x) & sif(x) \leq 0 \end{cases}$$

Ejemplos

En una función que esté afectada por la función valor absoluto todos los valores de y deben ser positivos, por lo que su gráfica siempre quedará en la parte del semieje y positivo. De esta manera, conocida la gráfica de una función cualquiera, se obtiene su valor absoluto haciendo el simétrico respecto al eje horizontal de los tramos negativos de la función.



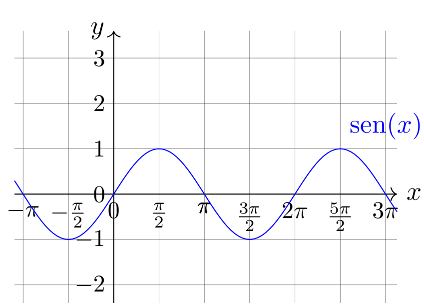
2.8.2 Funciones trascendentes

No pueden ser expresables por medio de un número finito de operaciones aritméticas

Funciones trigomométricas

---

f(x)=seno(x)



La función **seno(x)** tiene las siguientes características:

- Dom $f = \mathbb{R}$.todos los números reales ya que, como se ve en la gráfica, la función existe por cualquier valor de la variable independiente x.
- El recorrido o rango de la función *seno x* va desde el 1 negativo hasta el 1 positivo (ambos incluidos). $Imf = [-1, 1]$.Está acotada superior e inferormente
- Se trata de una función continua e impar

de periodicidad 2π. $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\ x$

- Este tipo de función trigonométrica tiene un único punto de corte con el eje de las ordenadas (eje Y) en el punto (0,0). (0,0)

- En cambio, intercepta periódicamente con el eje de las abscisas (eje X) en las coordenadas múltiples de π. $(k\pi, 0) \qquad k \in \mathbb{Z}$

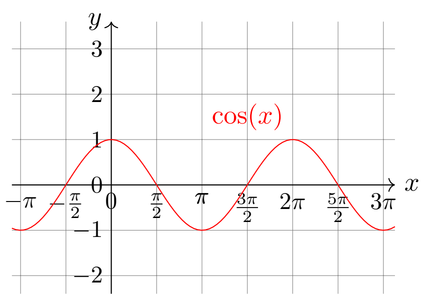
- El máximo de la función seno se produce cuando: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

- Y al contrario, el mínimo de la función seno tiene lugar en: $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

- No existe $\underset{x \longmapsto \infty}{lim} sen(x)$ ni $\underset{x \longmapsto -\infty}{lim} sen(x)$ ya que la función oscila permanentemente

---

coseno(x)



- Dom $f = \mathbb{R}$. En cambio, su imagen es el intervalo$Imf = [-1, 1]$, ya que el coseno de un ángulo siempre se encuentra entre estos valores.

- Esta función se repite exactamente igual cada 2π; es decir, los valores de la función en el intervalo del dominio [0 ,2π) son suficientes para conocer la función en cualquier punto. Así pues, es periódica, de período 2π.

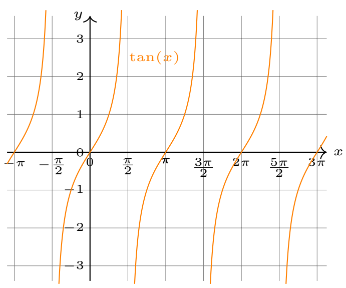
- La función se anula en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, siendo k cualquier número entero.

- La función alcanza sus extremos máximos, es decir, los valores mayores de la y, cuando el coseno del ángulo es 1, es decir, cuando la x es $2k\pi$, siendo $k \in Z$ un número entero cualquiera.

- Sus extremos mínimos, es decir, los valores menores de la y (cuando el coseno es -1), se encuentran cuando la x es $\pi + 2k\pi$, siendo k cualquier número entero.

- No existe $\underset{x \longmapsto \infty}{lim} cos(x)$ ni $\underset{x \longmapsto -\infty}{lim} cos(x)$ya que la función oscila permanentemente

Tangente



Tangente Recordemos que la función tangente se define como $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Dado que la división entre cero no está definida, la función tangente no está definida cuanto $\cos x = 0$, y esto ocurre para todo x de la forma $\frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$ es entero.

Así, el dominio de la tangente es

$$\text{Dom}(\tan(x)) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \middle| \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ahora, el conjunto imagen (o simplemente imagen o recorrido) de una función es el conjunto de valores que toma la función después de aplicarse sobre todos los elementos del dominio. En este caso, si vemos la imagen, es claro que la imagen es todo el conjunto de los reales, esto es \mathbbR, por lo tanto

$\text{Img}_{x\in\text{Dom}}(\tan(x)) = \tan(\text{Dom}) = \mathbb{R}$

Otra caracteristica importante de la función tangente es que es periódica, esto es, existe un número real $k \in \mathbb{R}$ tal que

$\tan(x) = \tan(x+k), \quad \forall x \in \text{Dom}$ en este caso el periodo es $k = \pi$ radianes.

De la gráfica también se nota que la función es continua para todo $x \in \text{Dom}$, esto ya que no importa por donde nos acerquemos a un punto sobre la grafica, si es por la izquierda o derecha, siempre llegamos al mismo punto.

Por último, debemos notar que la función es impar, esto es, para todo $x \in \text{Dom}$ se cumple que $\tan -x = -\tan x$

Así, en resumen tenemos lo siguiente:

1 Dominio: $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \middle| \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$.

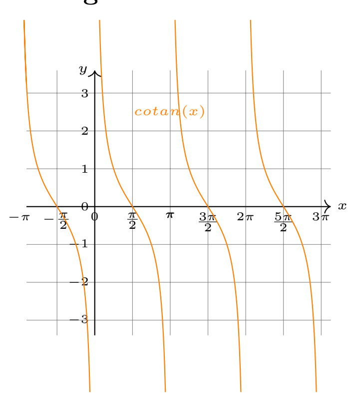
2 Imagen: $\mathbb{R}$.

3 Periodo: $k = \pi$.

4 Continua: Es discontinua de salto infinito en $\frac{\pi}{2} + \pi k$

5 Función impar.$\tan(-x) = -\tan(x)$

Cotangente



$f(x) = \cot x = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Dado que la división entre cero no está bien definida, la cotangente no está definida para los valores de x en los cuales el seno es igual a cero; estos valores son $x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ es entero. Por lo tanto, el dominio de la cotangente es $\text{Dom}(\cot(x)) = \mathbb{R} - \left\{ \pi k \quad \middle| \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\text{Img}_{x\in\text{Dom}}(\cot(x)) = \mathbb{R}$

Otra caracteristica importante de la función cotangente es que es periódica, esto es, existe un número real $k \in \mathbb{R}$ tal que $\cot(x) = \cot(x+k), \quad \forall x \in \text{Dom}$

en este caso el periodo es $k = \pi$ radianes.

De la gráfica también se nota que la función es continua para todo $x \in \text{Dom}$, esto ya que no importa por donde nos acerquemos a un punto sobre la grafica, si es por la izquierda o derecha, siempre llegamos al mismo punto.

Por último, debemos notar que la función es impar, esto es, para todo $x \in \text{Dom}$ se cumple que

$\cot -x = -\cot x$

Así, en resumen tenemos lo siguiente:

1 Dominio:$\mathbb{R} - \left\{ \pi k \quad \middle| \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$.

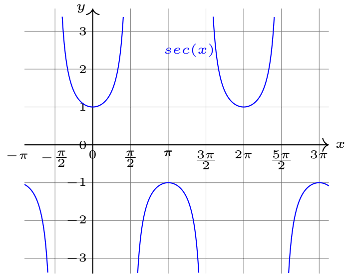
2 Imagen: $\mathbb{R}$.

3 Periodo: $k = \pi$.

4 Continua: Discontinua de salto finito en $k\pi$.

5 Función impar.

Secante



Las características fundamentales de la función **secante** son las siguientes:

1) Su dominio es R - {π/2 + k·π} con k∈Z .

2) Su recorrido es $R-(-1,1)$.

3) No corta al eje X.

Corta al eje Y en el punto $(0,1)$.

4) Es par, es decir, simétrica respecto al eje Y.

$sec(-x) = sec(x)$

5) Tiene infinitos máximos relativos en los puntos de la forma $(\pi + 2 \cdot k \cdot \pi, -1)$ con k∈Z .

Tiene infinitos mínimos relativos en los puntos de la forma (2·k·π, 1) con k∈Z .

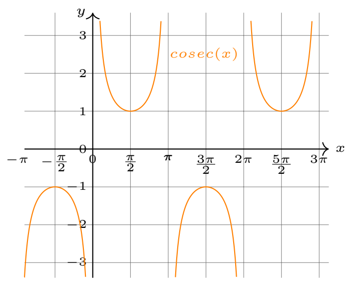
6) Es periódica de periodo 2π .

$sec(x) = sec(x + 2\pi)$

7) Tiene asíntotas verticales en los puntos de la forma $x = \pi/2 + k \cdot \pi$ con k∈Z .

8) No está acotada.

Cosecante x=$\frac{1}{sen(x)}$



Las características fundamentales de la función **cosecante** son las siguientes:

1) Su dominio es R - {k·π} con k∈Z .

2) Su recorrido es R - (- 1, 1) .

3) No corta al eje X ni al eje Y.

4) Es impar, es decir, simétrica respecto al origen.

cosec (- x) = - cosec (x)

5) Tiene infinitos máximos relativos en los puntos de la forma $(-\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi, -1)$ con k∈Z .

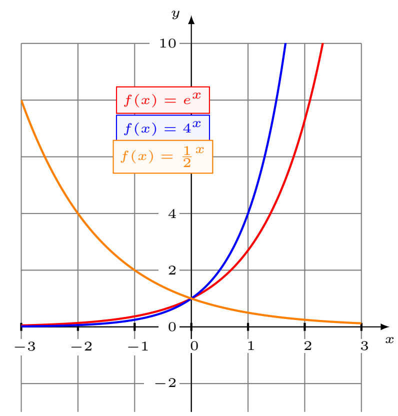
Tiene infinitos mínimos relativos en los puntos de la forma $(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi, 1)$ con k∈Z .

6) Es periódica de periodo 2π $.cosec(x) = cosec(x + 2\pi)$

7) Tiene asíntotas verticales en los puntos de la forma x = k·π con k∈Z .

8) No está acotada.

Función Exponencial $f(x) = a^x$

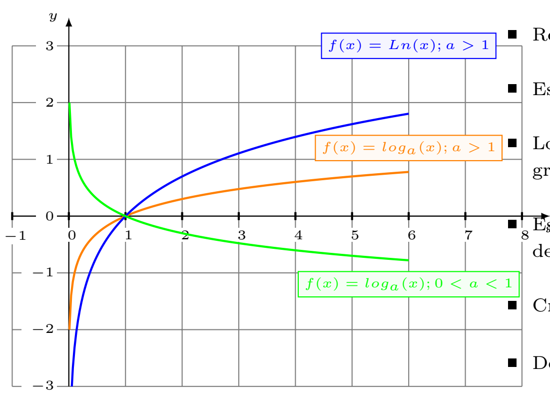


Propiedades de la función exponencial

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Recorrido: $(0, \infty)$.

- Es continua.
- Los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$ pertenecen a la gráfica.
- Es inyectiva $\forall a \neq 1$ (ninguna imagen tiene más de un original).
- Creciente si $a > 1$. $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} a^x = \infty$
- Decreciente si $0 < a < 1$. $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} a^x = 0$ Asíntota horizontal
- Las curvas $f(x) = a^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto al eje {y}.
- La función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 1$ eventualmente crece más rápido que la función potencia x^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
- La función inversa de la función exponencial $f(x) = a^x$es $f^{-1}(x) = \log_a x$. La función inversa de la exponencial natural es $f^{-1} = \ln x$.

Función logaritmo $f(x) = log_a x$



Las propiedades de las funciones logarítmicas

- Dominio: $\mathbb{R}^+$
- $\lim\limits_{x \longmapsto 0^+} log_a x = -\infty$ si a>1 Asíntota vertical

- $\lim\limits_{x \longmapsto 0^+} log_a x = \infty$ si 0<a<1 Asíntota vertical
- Recorrido: $\mathbb{R}$
- Es continua
- Los puntos (1,0) y (1,0) pertenecen a la gráfica.
- Es inyectiva (ninguna imagen tiene más de un original).
- Creciente si a>1 $\lim\limits_{x \longmapsto \infty} log_a x = \infty$
- Decreciente si 0<a<1 $\lim\limits_{x \longmapsto \infty} log_a x = -\infty$
- Las gráfica de la función logarítmica es simétrica (respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante) de la gráfica de la función exponencial, ya que son funciones reciprocas o inversas entre sí. $\lim\limits_{x \longmapsto \infty} log_a x = \infty$