S3r4 | 2023

MATEMÁTICAS : Bachillerato I y II

Probabilidad

Apuntes

by Sera

Experimentos aleatorios. Espacio muestral.

Definición: Espacio muestral

Llamamos **experimiento aleatorio** a todo experimiento en el que es imposible determinar a priori el resultado.

Cualquier juego de azar como lanzar un dado, una moneda, extraer una carta de una baraja, sacar una bola de color de una bolsa, ...

En el experimento aleatorio de lanzar un dado el espacio muestral sería $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$..

- El espacio muestral del experimento de lanzar dos dados (36 *elementos*).

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

- Espacio muestral del experimento de lanzar una moneda al aire $\Omega = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$
- El espacio muestral del experimento de lanzar dos monedas al aire está formado por cuatro sucesos elementales,

$$\Omega = \{(cara, cara), (cara, cruz), (cruz, cara), (cruz, cruz)\}.$$

- El espacio muestral de resultados para un equipo en un partido de fútbol:

$$S = \{Ganar, Perder, Empatar\}$$

- El espacio muestral de girar una ruleta de 6 números: S= {1,2,3,4,5,6}
- El espacio muestral de disparar un penalti: $S = \{Gol, No\ Gol\}$
- El espacio muestral de lanzar 3 monedas: $S = \{ccc, ccs, csc, css, scc, scs, ssc, sss\}$
- El espacio muestral de posibles buenos y malos saques en el tenis con 2 intentos: $S = \{BB, MM, BM, MB\}$, etc...

Tipos de espacios muestrales

Los tipos de espacios muestrales son:

Espacio muestral discreto (o numerable): un espacio muestral es discreto cuando el número de posibles resultados es finito o infinito numerable.{1,2,3......}

Espacio muestral continuo: un espacio muestral es continuo cuando el número de posibles resultados es infinito.

Por ejemplo, el lanzamiento de un dado y el lanzamiento de una moneda tienen espacios muestrales discretos finitos. Pero lanzar una moneda hasta que salga cara consiste en un espacio muestral discreto infinito numerable, porque el número de resultados es finito pero el número de lanzamientos no, ya que no sabes cuántas veces debes tirar la moneda hasta que salga cara.

Por otro lado, un ejemplo de espacio muestral continuo es **el peso de un individuo de un grupo**, que puede ser cualquier número real positivo.

Ejemplo:

- El experimento de observar el tiempo de vida de un electrodoméstico: $\Omega = [0,\infty)$.
- Lanzar dos dados al aire y anotar la suma de las caras superiores . $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- Experimento de contar el número de autos que cruzan en determinado intervalo de tiempo por un peaje de autopista: $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$.

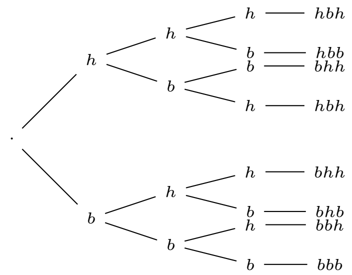
Ejemplo:

En algunos experimentos es útil listar los elementos del espacio muestral de forma sistemática mediante un **diagrama de árbol** :"Una mujer es portadora de hemofilia. Aunque la mujer no tenga la enfermedad, puede transmitirla a sus 3 hijos. Obtener las trayectorias para este experimento mediante un diagrama de árbol" Construir un espacio muestral que describa la situación

***Solución*:**

Dos de los resultados son "dos no enfermos y luego un enfermo", que podríamos denotar bbh , y "un enfermo y luego dos no enfermos", lo que denotaríamos hbb .

Claramente hay muchos resultados, y cuando tratamos de enumerarlos todos podría ser difícil estar seguros de que los hemos encontrado todos a menos que procedamos sistemáticamente. El diagrama de árbol muestra una manera fácil de hacer las cosas.



Es decir $\Omega = \{bbb, bbh, bhb, bhh, hbb, hbh, hhb, hhh\}$

Sucesos. Operaciones con sucesos.

Definición: Suceso

Llamamos **Suceso** de un experimento aleatorio a cualquier subconjunto del espacio muestral Ω

- **Suceso elemental**: suceso formado por un único resultado del experimento aleatorio.
- **Suceso compuesto**: suceso formado por más de un suceso elemental.
  - Por ejemplo, al lanzar un dado, el resultado 2 es elemental, mientras que el resultado par está compuesto por tres individuales:'2','2' y '6' .
- **Suceso seguro**:Ω (Ocurre siempre)
- **Suceso imposible**: $\emptyset$(No ocurre nunca)

Ejemplo:

En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:
A: "sacar al menos una cara y una cruz".
B: "sacar a lo sumo una cara".
Determine el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.

Solución
E = {{c, c, c}, {c, c, x}, {c, x, c}, {c, x, x}, {x, c, c}, {x, c, x}, {x, x, c}, {x, x, x}}.
A = {{c, c, x}, {c, x, c}, {c, x, x}, {x, c, c}, {x, c, x}, {x, x, c}}.
B = {{c, x, x}, {x, c, x}, {x, x, c}, {x, x, x}}

- Lanzar un dado Ω ={1,2,3,4,5,6}.
  - Suceso A={sacar un 3}={3} (suceso elemental)
  - Suceso B = {Obtener par} = {2,4,6} suceso compuesto
  - Suceso C = {Obtener impar} = {1,3,5} suceso compuesto
  - Suceso D={sacar mas de un 8}=Ø (Suceso imposible)
  - Suceso E={sacar mas de 0}=Ω (Suceso seguro)
- En el experimento de observar el tiempo de vida de un electrodoméstico:

- A ="dura más de un año pero menos de 2". $A = \{(1,2)\}$ suceso compuesto
- B ="al menos un año". $B = \{(1,\infty)\}$.suceso compuesto

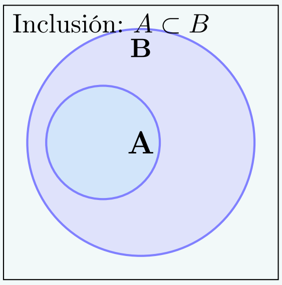
.

Operaciones con sucesos:

Sean A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio:

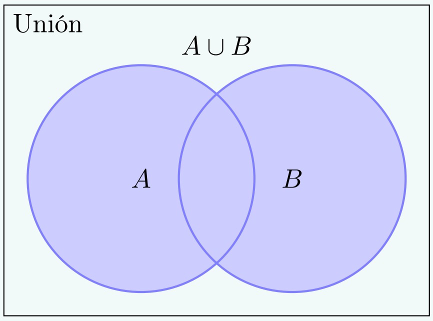
Definición: Inclusión conjuntos

Inclusión: $A \subset B$ si todo suceso elemental de A pertenece también a B .



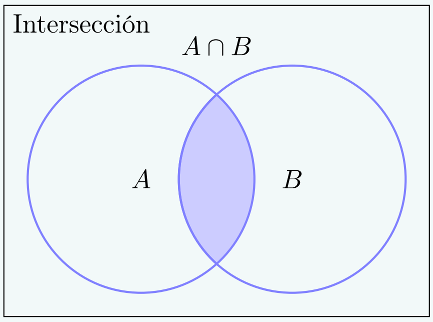
Definición: Unión

Unión: $A \cup B$ es el suceso formado por todos los elementos de A y de B
.



Definición: Intersección

Intersección $A \cap B$ es el suceso formado por todos los elementos que pertenece a A y a B



Propiedades

La **unión** de conjuntos verifica las siguientes propiedades, donde A, B y C son conjuntos cualesquiera:

- $A \cup B = B \cup A (conmutativa)$.
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)(asociativa)$.
  - $A \subset A. \cup B$
  - $B \subset A \cup B$.
  - $\varnothing \cup A = A$.
  - $\Omega \cup A = \Omega$.

  La intersección de conjuntos verifica las siguientes propiedades, donde A, B y C son conjuntos cualesquiera:

  - $A \bigcap B = B \bigcap A (conmutativa)$.
  - $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)(asociativa)$.
  - A⋂B⊂A.
  - $A \bigcap B \subset B$.
  - ∅⋂A=∅.
  - $\Omega \bigcap A = A$.
  - $A \subset B \Leftrightarrow A \bigcap B = A$.

  Las propiedades siguientes se cumplen cuando se operan las dos operaciones conjuntamente

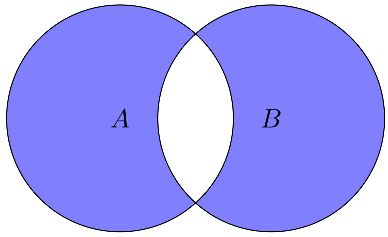
  - **Simplificativa**:
    - $A \cup (B \cap A) =$ A
    - $A \cap (B \cup A) = A$

Leyes de Morgan

$$\overline{A\cup \boldsymbol{B}} = \overline{A}\cap\overline{B}$$

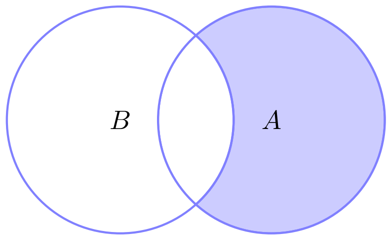
$$\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$$

$\overline{A\cap B}$



- **Diferencia**: $A-B$ es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.

$A-B$



- **Complementario**: $\overline{A}$ ó A^c ó A'es el suceso que se realiza cuando no se realiza A.

Definición: Sucesos compatibles e incompatibles

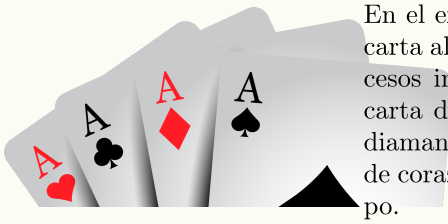
Dos sucesos A y B se llaman **Incomptatibles** si $A\cap B=\emptyset$
Dos sucesos A y B se llaman **Comptatibles** si $A\cap B\neq\emptyset$

Es compatible sacar una figura con sacar rey pero es incompatible par e impar

Ejemplo:

Al lanzar un dado, si A = «múltiplo de dos»=$\{2, 4, 6\}$, y B = $\{3, 4\}$. Los sucesos A y B son compatibles pues $A\cap B=\{4\}$. Sucesos incompatibles serían "sacar un número menor que 2" y "sacar múltiplo de 3" pues es imposible que se verifiquen a la vez

Ejemplo:



En el experimento aleatorio de extraer una carta al azar de una baraja francesa, dos sucesos incompatibles podrían ser «sacar un carta de corazones» y «sacar una carta de diamantes». Ya que una carta no puede ser de corazones y de diamantes al mismo tiempo.

Ejemplo:

Dado el experimento aleatorio "extraer una carta de una baraja española", se consideran los sucesos: A = "salir as" B = "salir rey" C = "salir copas" D = "salir figura"

A y B son incompatibles A y C son compatibles
A y D son incompatibles
B y C son compatibles
B y D son compatibles
C y D son compatibles
A y A^c son incompatibles

Ejemplo:

En una urna hay 15 bolas numeradas de 2 al 16. Extraemos una bola al azar y observamos el número que tiene.
a) Describe los sucesos: $A =$ "Obtener par" , $B =$ "Obtener impar" , $C =$ "Obtener primo" y $D =$ "Obtener impar menor que 9" escribiendo todos sus elementos.
b) ¿Qué relación hay entre A y B? ¿Y entre C y D?
c) ¿Cuál es el suceso $A \cup B$? ¿y $C \cap D$?

Solución:
a)$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$;$B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$;$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$; $D = \{3, 5, 7\}$
b) $B = \overline{A}$; $D \subset C$
c) $A \bigcup B = E =$ Espacio muestral; $C \bigcap D = D$

Ejemplo:

Lanzamos un dado $A = \{par\} = 2,4,6; B = \{3,5\}$ y $C =$ "*sacar múltiplo de* 3"={3,6}

$\bar{A} = impar = \{1,3,5\};$
$\overline{B} = \{1,2,4,6\}$
$\overline{A \bigcap B} = \overline{\emptyset} = E$
$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,3,5\} \cup \{1,2,4,6\} = \{1,2,3,4,5,6\} = E$
$A - C = \{2,4\}$
$B - C = \{5\}$
$C - B = \{6\}$

Probabilidad.

La probabilidad de un suceso indica el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Esta probabilidad se expresa con un número comprendido entre cero y uno. Este es el número al que se acerca la frecuencia relativa cuando el experimento se repite muchas veces.

Definición: Probabilidad

Sea Ω espacio muestral de un experimento aleatorio. Llamamos **Probabilidad** a toda aplicación definida entre los conjuntos S (Conjunto de todos los sucesos de Ω) y $[0,1]$
.

$$P : S \rightarrow [0,1]$$

$$A \rightarrow P(A)$$

que verifica los siguientes axiomas

- $P(\Omega) = 1$
- Para todo suceso A, se verifica $P(A) \geq 0$
- Si $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propiedades de la probabilidad:

- Dados dos sucesos contrarios A y $\overline{A}$, $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
- Para cualquier suceso A, se verifica que $0 \leq P(A) \leq 1$

- Si $A \cap B \neq \emptyset \to P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Definición: Regla de Laplace

Si todos los sucesos elementales de un experimento son **equiproblables**, es decir, tienen la misma probabilidad de ocurrir, entonces

$$P(A) = \frac{N^{o} casos\ favorables\ a\ A}{N^{o}\ casos\ posibles}$$

Ejemplo:

De una baraja de 40 cartas española, se extrae una carta. Calcular las probabilidades siguientes:
$R=$ ser rey ;
$C=$ ser copa ;
$F=$ ser figura.

Solución

a) Que sea un rey $P(R) = \frac{Casos\ fav}{Casos\ posibles} = \frac{4}{40}$
b) Que sea de copas $P(C) = \frac{Casos\ fav}{Casos\ posibles} = \frac{10}{40}$
c) Que no sea figura $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{Casos\ fav}{Casos\ posibles} = 1 - \frac{12}{40} = \frac{28}{40}$
d) Que sea el 7 de espadas $P(7E) = \frac{Casos\ fav}{Casos\ posibles} = \frac{1}{40}$

Cuando jugamos a la lotería, hay 2 posibilidades: que te toque o que no te toque. Como hay 2 casos posibles y uno favorable, cabría pensar que la probabilidad de que me toque la lotería es $\frac{1}{2}$. Este es un razonamiento falso pues los sucesos que me toque la lotería y que no me toque la lotería no ocurren con la misma frecuencia.

La regla de Laplace, como hemos visto en el ejemplo anterior, tiene el inconveniente de que los sucesos elementales han de ser equiprobables, es decir, todos con la misma probabilidad. Por tanto, hemos de conocer a priori estas probabilidades elementales, cosa que no siempre es posible.

Para evitar este y algún otro problema, se incluye la definición axiomática de probabilidad, establecida a principios del siglo XX por Andrei Kolmogorov.

Definición: Definición axiomática de probabilidad

Una distribución de probabilidad o simplemente probabilidad sobre un espacio muestral , es una aplicación P que asigna a cada suceso $A\Omega$ un valor numérico $P(A)$, cumpliendo las siguientes reglas:

- Axioma 1:$P(A) \geq 0$ para cualquier suceso A
- Axioma 2:$P(\Omega) = 1$
- Axioma 3: Si $A \subset B$ con $A \cap B = \varnothing$ entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Propiedades
Se cumplen las siguientes propiedades.

- P($\varnothing$) = 0.

  Demostración :

  Pongamos $A = B = \varnothing$. Como $A \bigcap B = \varnothing \bigcap \varnothing = \varnothing$, el Axioma 3 garantiza que $P(\varnothing) = P(A \bigcup B) = P(A)+P(B) = P(\varnothing)+P(\varnothing) = 2P(\varnothing)$, de donde la única opción es que P($\varnothing$) = 0

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ también se escribe $P(A^c) = 1 - P(A)$.

  Demostración :

  Como $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$ y $A \bigcup \overline{A} = \Omega$, se tiene que $1 = P(\Omega) = P(A \bigcup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$, de donde $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

- Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

  Demostración :

  Es fácil ver que, si A $\subset$ B, entonces $A \bigcap (B - A) = \varnothing$ y $A \bigcup (B - A) = B$. Entonces $P(B) = P(A \bigcup (B - A)) = P(A) + P(B - A) \geq P(A)$.

- Para cualquier suceso A es $0 \leq P(A) \leq 1$.

  Demostración :

  Dado cualquier suceso A, se cumple que $\varnothing \subset$ A $\subset \Omega$. Entonces, aplicando propiedades anteriores , se tiene que $0 = P(\varnothing) \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

- Para dos sucesos generales cualesquiera $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

  Demostración :

  $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ y que los 3 conjuntos son disjuntos.Además, $A = (A - B) \cup (A \cap B) \;\; y \;\; B = (A \cap B) \cup (B - A)$ (y de nuevo los conjuntos tienen intersección vacía). Por tanto, aplicando varias veces el Axioma 3, se tiene que

$$P(A) + P(B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) + P(A \cap B) =$$

$$= P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) + P(A \cap B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

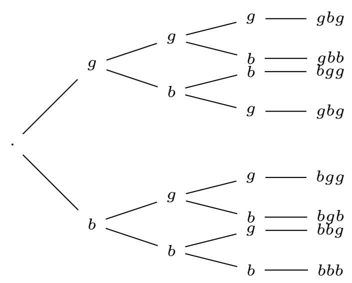
- Dados los sucesos A, B y C, se verifica que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)P(A \cap B)P(B \cap C)P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo:

"Una mujer es portadora de hemofilia. Aunque la mujer no tenga la enfermedad, puede transmitirla a sus 3 hijos. Obtener las trayectorias para este experimento mediante un diagrama de árbol" Construir un espacio muestral que describa la situación

***Solución*:**
Dos de los resultados son "dos no enfermos y luego un enfermo", que podríamos denotar bbg , y "un enfermo y luego dos no enfermos", lo que denotaríamos gbb .
Suponiendo que es igualmente probable que se trasmita o no la enfermedad. Obtener las probabilidades de los siguientes sucesos:
1.- Ningún hijo tenga la enfermedad, (suceso A)
2.- Dos hijos tengan la enfermedad, (suceso B)



- $P(A) = \frac{Casos\ fav}{Casos\ posibles} = \frac{1}{8}$
- $P(B) = \frac{Casos\ fav}{Casos\ posibles} = \frac{3}{8}$

Ejemplo:

El temario de un examen consta de 80 temas . En el examen, cada persona saca 5 bolas de una bolsa que contiene 80 bolas con cada uno de los temas. El alumno elige el tema que desee (uno sólo) de entre esos cinco y lo desarrolla. Una persona acude al examen habiendo estudiado sólo 25 temas.
¿Cuáles la probabilidad de aprobar el examen?

Solución

El espacio muestral equiprobable, ya que todos los temas tienen igual probabilidad de ser seleccionados, por tanto podemos aplicar la Regla deLaplace. El suceso "aprobar la oposición habiendo estudiado 25 temas" corresponde con el suceso "de los 5 temas seleccionados, al menos 1 es de los 20 preparados".

Podemos contar los casos del suceso complementario, es decir del suceso "no aprobar la oposición" y que corresponde con el suceso ninguno de los 5 temas elegidos al azar está entre los 20 preparados.

Por tanto vamos a calcular la probabilidad del suceso complementario:

$P(No\ aprobar)=$ P(0 de los 5 temas están entre los 20) $= \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$

Los casos posibles son todas las posibles combinaciones de temas, es decir, las posibles formas de escoger 5 temas de entre los 80, esto es $\begin{pmatrix} 80 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{80!}{4!76!} = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 24040016$ combinaciones diferentes

Los casos favorables al suceso no aprobar el examen son en las que los 5 temas salen de entre los 60 que la opositora no se ha preparado. El número de posibilidades es $\begin{pmatrix} 60 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{60!}{5!56!} = 5461512$,es decir, en 5461512 combinaciones de 24040016 posibles. el alumno no sabrá ninguno de los temas, por tanto:$P(Suspender) = \frac{5461512}{24040016}$ =0.227. Por lo tanto

$$P(Aprobar) = 1 - P(suspender) = 1 - 227 = 0{,}77 = 77\,\%$$

Ejemplo:

En un coro musical hay 7 mujeres y 12 hombres. Si escogemos tres personas al azar para formar un grupo . Halla la probabilidad de que se seleccionen 2 mujeres y un hombre.

Solución

En la elección no importa el orden, por lo que los resultados posibles al elegir 3 personas de las 19 son las combinaciones de orden 3 de las 19 personas:

$$C_{19}^{3} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{19!}{3!16!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 919$$

Los resultados favorables al suceso A = "se eligen 2 mujeres y 1 hombre", se obtienen seleccionado a las 2 mujeres de las 7 y, por cada una de estas, un hombre de los 12.

Es decir:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0{,}10 = 0{,}2 C_7^2 \cdot C_{12}^1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{7!}{3!5!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} 12 = 252$$

Por tanto, como los resultados posibles son equiprobables, la probabilidad del suceso A se obtiene mediante la regla de Laplace: $P(A) = \frac{252}{969} = 0,2601$

Ejemplo:

Se elige al azar un número de 5 cifras distintas escrito con las cifras 2, 3, 5, 7 y 8.
a) Calcula la probabilidad de que dicho número sea mayor que 87 000.
b) Calcula la probabilidad de que sea menor que 32 000.
c) Calcula la probabilidad de que el número esté entre 30 000 y 60 000.

Solución

Con las cifras 2, 3, 5, 7 y 8 se pueden formar $P_5 = 5! = 120$ números de cifras distintas. De los 120 números, son mayores que 87 000: 87235; 87253, 87325, 87352, 87523 y 87532 ($P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$). De modo que la probabilidad del suceso A = "el número sea mayor que 87 000" es:

$$P(> 87000) = \frac{6}{120} = 1/20$$

De los 120 números, serán menores que 32 000 aquellos que empiecen por 2:

$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números. De manera que la probabilidad del suceso B = "el número es menor que 32 000" es:

$$P(B) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 0,2$$

De los 120 números, estarán entre 30 000 y 60 000 aquellos números que:

Empiecen por 3: $P_4 = 4! = 24$ números.

Empiecen por 5: $P_4 = 4!$ 24 números. De manera que la probabilidad del suceso C = "el número está entre 30 000 y 60 000" es:$P(C) = \frac{24}{120} + \frac{24}{120} = \frac{48}{120} =$ 0,4

Probabilidad condicionada. Sucesos dependientes e independientes.

En el cálculo de probabilidades de algunos sucesos, el valor de dichas probabilidades varía en función del conocimiento de determinadas informaciones relativas a estos sucesos.Por ejemplo, si se informa que al lanzar un dado (perfecto) ha salido un número par, la probabilidad de que haya salido un 3 pasa a ser igual a cero, mientras que antes era igual a $1/6$. Hablaríamos, así, de la probabilidad de obtener un 3 condicionada porque ha salido un número par.

Imaginemos el siguiente caso: Considerámos la clasificación de hombres y mujeres en función de padecer o no presbicia en la vista:

	$Presbicia(A)$	$Sin\ Presbicia(\overline{A})$	$Total$
$Hombres$	45	30	75
$Mujeres$	65	20	85
$Total$	110	50	160

Si entra en la consulta una mujer. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga presbicia? Observa que no es la misma pregunta que ¿Cuál es la probabilidad de que tenga presbicia una persona cualquiera? Esto se escribe $P(A \mid M)$ y se calcula como siempre, como casos favorables entre posibles (55 mujeres con presbicia, entre 70 mujeres).

$P(A \mid M) = 55/70$, sin embargo la $P(A) = \frac{100}{145}$. Como vemos no es la misma probabilidad ya que el conocimiento del hecho de que es mujer reduce el Espacio muestral de el total de la población a solo las mujeres.

A partir de información de la tabla llamada **TABLA DE CONTINGENCIA** , podemos ver que la probabilidad del suceso intersección es $P(A \bigcap M) = \frac{55}{145}$ y que la probabilidad de ser mujer $P(M) = \frac{55}{155}$ Se ve rápidamente la relación:

$$P\left(A\,|M\,\right) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$

Definición: Probabilidad condicionada

Llamamos probablidad del suceso B condicionada por el suceso A y la denotamos por $P(A|B)$ al cociente

$$P\left(B\,|A\,\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

A partir de definición de probabilidad condicionada, obtenemos la probabilidad compuesta o producto:

$$P\left(A\,|B\,\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P(B)} \rightarrow P\left(A \cap B\right) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$P\left(B\left|A\right.\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\rightarrow P\left(A\cap B\right)=P(A)\cdot P(B|A)$$

Ejemplo:

La siguiente es una tabla de contingencia sobre RH sanguineo y sus grupos de un colectivo de 100 personas

	O	A	B	AB	$Total$
RH^{+}	35	40	3	2	81
RH^{-}	6	9	3	1	19
$Total$	41	49	7	3	100

Probabilidad de que una persona sea grupo B $=P\left(B\right)=\frac{7}{100}=0,07$
Probabilidad de tener RH^{+}si se sabe que esa persona es grupo B$=P\left(RH^{+}|B\right)=\frac{4}{7}=0,5714$

En estas situaciones y otras análogas aparece el concepto de probabilidad condicionada.

Ejemplo:

El 40 % de los profesores hacen deporte y el 80 % de los que hacen deporte no fuman. Halla la probabilidad de que un profesor haga deporte y no fume.

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\left|A\right.\right)=0{,}4*0{,}8=0{,}32$$

Sucesos dependientes e independientes:

Imaginemos dos tiradas de un dado. Es bastante claro pensar que la segunda tirada no depende de lo que haya pasado en la primera tirada,da igual lo que haya salido que no influye en la tirada posterior.Sin embargo hay sucesos de influyen en otros, como por ejemplo si sale un rey en una extracción de baraja y la carta no se repone

Definición: Sucesos independientes

Se dice que dos sucesos A y B son **independientes** si la ocurrencia de uno de ellos no modifica la probabilidad del otro, es decir,

$$P\left(B\,|A\right) = P\left(B\right) \text{ ó } P\left(A\,|B\right) = P\left(A\right)$$

A y B son independientes $\iff P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\,|A\right) = P\left(A\right) \cdot P(B)$

Se dice que A y B son dependientes entre sí, si la ocurrencia de uno de ellos modifica la probabilidad del otro.

A y B son dependientes $\iff P\left(A \cap B\right) \neq P\left(A\right) \cdot P(B)$

Ejemplo:

Se lanza al aire un dado y se anota la puntuación de la cara superior. Se consideran los sucesos A: «Se obtiene un número mayor que 4»; B: «Aparece un múltiplo de 3»; C: «Se obtiene un número impar»; D: «Aparece un número mayor o igual que 5».
a) Comprueba que los sucesos A y B son dependientes.
b) Comprueba que los sucesos C y D son independientes.

Solución
El espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
a) $A = \{5, 6\}$ $P(A) = \frac{1}{3}$; $B = \{3, 6\} \implies P(B) = \frac{1}{3}$;$B \cap A = \{6\}$;$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$; $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} \neq \frac{1}{6}$ Por tanto, son dependientes.
b) $C = \{1, 3, 5\}$;$P(C) = \frac{1}{2}$; $D = \{5, 6\}$;$P(D) = \frac{1}{3}$;$D \cap C = \{5\}$;$P(D \cap C) = \frac{1}{6} = P(C)P(D)$Así pues, son independientes.

Ejemplo:

Sabiendo que $P(A|B) = 0,6$ y que la de la $P(A|B) = 0,2$, se pide calcular la probabilidad de A.

Solución
$P(A) = P[(A|B) \cup (A|\overline{B})] = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = 0,6 + 0,2 = 0,8$

Ejemplo:

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}4$, $P(\overline{B}) = 0{,}7$ y $P(A \cup B) = 0{,}6$, donde $\overline{B}$ es el suceso contrario de B.
a) ¿Son independientes A y B ? ¿y $\overline{A}$ y $\overline{B}$?

Solución
Calculamos $P(B) = 0{,}3$
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}1$, ahora podemos comprobar $P(A \cap B) = 0{,}1 \neq P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3$=0.12
NO SON INDEPENDIENTES Ahora bien, si A y B son independientes todos sus complementarios y combinaciones entre ellos lo son.
Calcule $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$
Calcule $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0{,}10 = 0{,}2$
Calcule $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
Calcule $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$
Calcule $P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}3 - 0{,}1}{0{,}4} = 0{,}5$

Ejemplo:

Una caja con una docena de tornillos contiene dos de ellos defectuosos. Se extraen al azar y **sin reemplazamiento** cuatro tornillos. Calcula la probabilidad de extraer:
a) Los cuatro tornillos en un buen estado.
b) De entre los cuatro tornillos, exactamente uno roto.

Solución
Llamemos H = {Extraer tornillo en buen estado}, así H_1, H_2, H_3 y H_4 será sacarlo en primer lugar, segundo, tercero o cuarto.
a) P(Sacar cuatro tornillos buenos)= $P(H_1) \cdot P(H_2|H_1)P(H_3|H_1 \cap H_2)P(H_4|H_1 \cap H_2 \cap H_3) = \frac{10}{12}\frac{9}{11}\frac{8}{10}\frac{7}{9} = \frac{14}{33}$
b) El tornillo roto lo podemos sacar en cualquiera de las 4 extracciones, así:
P(Sacar tres buenos y uno malo)=$P(\overline{H_1} \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4) + P(\overline{H_1} \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4) + P(H_1 \cap \overline{H_2} \cap H_3 \cap H_4) + P(H_1 \cap H_2 \cap \overline{H_3} \cap H_4) + P(H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap \overline{H_4})$=

$$\frac{2}{12}\frac{10}{11}\frac{9}{10}\frac{8}{9} + \frac{10}{12}\frac{2}{11}\frac{9}{10}\frac{8}{9} + \frac{10}{12}\frac{9}{11}\frac{2}{10}\frac{8}{9} + \frac{10}{12}\frac{9}{11}\frac{8}{10}\frac{2}{9} = \frac{16}{33}$$

Ejemplo:

Sean 2 sucesos A y B de los que se sabe que la probabilidad de B es el doble que la de A; que la probabilidad de su unión es doble que la de su intersección; y que la probabilidad de su intersección es de 0,1. Se pide:

a)Calcular la probabilidad de A.
b) ¿Qué suceso es más probable que ocurra sabiendo que ya ha ocurrido el otro?.

Solución

Sea $P(A) = x$; entonces: $P(B) = 2x$. Además $P(AUB) = 0,2$ y $P[A|B] = 0,1$

$P(AUB)] = P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = x + 2x - 0,1 = 3x - 0,1$

$P[AUB] = 3x–0,1 = 0,2$. despejando $x = 0{,}1$ Por tanto $P(A) = 0,1$ y $P(B) = 0,2$.

b)$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}1} = 1$;$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5$

Por tanto es más probable que ocurra B sabiendo que ha ocurrido A.

Ejemplo:

Un joven puede consultar diariamente con su móvil las siguientes aplicaciones: YouTube (Y), WhatsApp (W) e Instagram (T). Sabemos que: $P(W) = 0,56; P(T) = 0,36; P(Y \cap W) = 0,07, P(W \cap T) = 0,22\ y\ P(Y \cap W \cap T) = 0,03$.
¿Qué probabilidad hay de que un día no consulte ninguna de estas tres aplicaciones?

Solución

No consultar ninguna aplicación equivale al suceso $\overline{Y} \bigcap \overline{W} \bigcap \overline{T}$.

Por tanto: $P(\overline{Y} \bigcap \overline{W} \bigcap \overline{T}) = P(\overline{Y \bigcup W \bigcup T}) = 1 - P(Y \bigcup W \bigcup T)$

Calcularemos, en primer lugar, la probabilidad de la unión de los tres sucesos.

$$P(Y \cup W \cup T) = P(Y) + P(W) + P(T) - P(Y \cap W) - P(Y \cap T) - P(W \cap T) + P(Y \cap W \cap T)$$

$$= 0,12 + 0,56 + 0,36 - 0,07 - 0,09 - 0,22 + 0,03 = 0,69$$

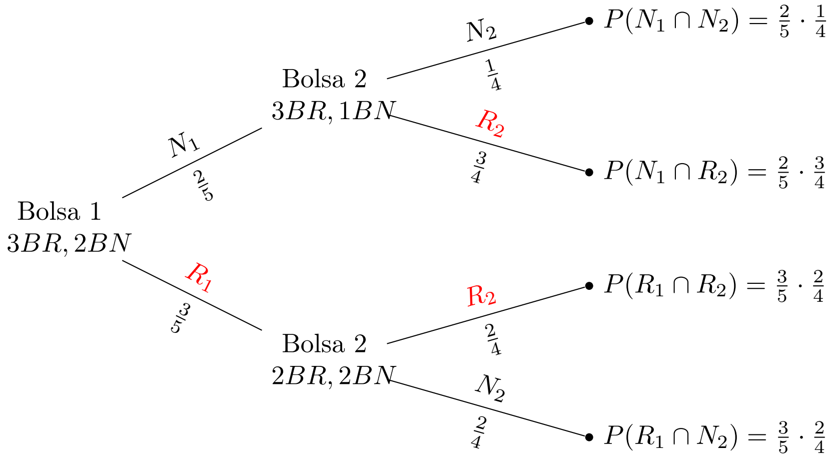
Por tanto, la probabilidad de que un día no consulte ninguna de estas tres aplicaciones es del 31 %

Ejemplo:

Tenemos una bolsa con 3 bolas rojas y 2 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja? Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de sacar dos bolas rojas?

La probabilidad de sacar una bola roja es 3/5. Pero la de sacar dos bolas rojas, depende que hagamos con la primera bola que extraigamos.

Si dejamos la bola fuera provoca tener que hacer una extracción de la bolsa con una composición diferente a la primera extracción (Bolsa 2)



Observando el diagrama de árbol comprobamos que la probabilidad de sacar primero una bola roja (R_1) y luego una bola negra (N_2) es $3/5 \cdot 2/4 = 3/10$ pues después de sacar una bola roja en la bolsa quedan sólo 4 bolas y de ellas 2 son negras.

La probabilidad de sacar primero una bola negra (N_1) y luego bola Roja (R_2) es $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$, y la de sacar dos bolas negras es: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

La probabilidad de sacar dos bolas rojas es $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Ejemplo:

Se extraen dos cartas de una baraja española de 48 cartas. Halla la probabilidad de que las dos cartas extraídas sean reyes si las extracciones se realizan en las siguientes condiciones:

a) Se extrae una carta, se devuelve a la baraja y, a continuación, se extrae la segunda carta (extracción con reposición). (1/144)

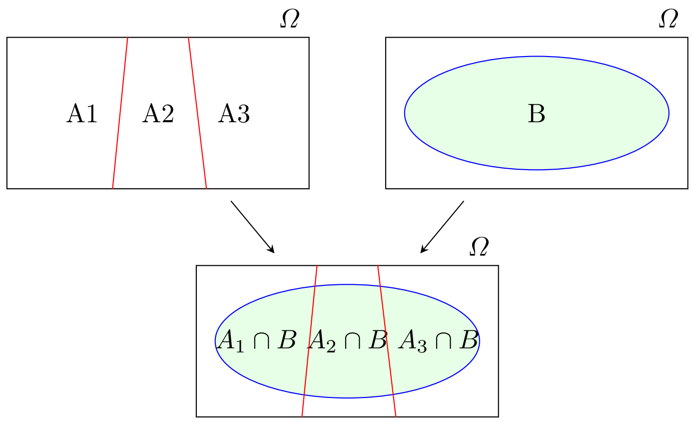
b) Se extrae una carta, no se devuelve a la baraja y, a continuación, se extrae la segunda carta (extracción sin reposición). (1/188)

Teoría de la probabilidad total

Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una familia de sucesos.

Decimos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman un **sistema completo de sucesos** si cumplen las siguientes condiciones

- Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son **incompatibles dos a dos** $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i \neq j}}$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$



Teorema de la probabilidad total

Teorema

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos y sea un suceso cualquier del que conocemos las probabilidades condicionadas , entonces

$$P(B) = P(A_1)\,P(B\,|A_1) + P(A_2)\,P(B\,|A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B\,|A_n)$$

En efecto $P(B) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 .... \cup A_n)) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) .... \cup (B \cap A_n)) =$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) .... + P(B \cap A_n) =$$

$$P(A_1)\,P(B\,|A_1) + P(A_2)\,P(B\,|A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B\,|A_n) =$$

$$P(B) = P(A_1)\,P(B\,|A_1) + P(A_2)\,P(B\,|A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B\,|A_n)$$

Ejemplo:

Una multinacional elabora sus piezas en 3 factorías. El porcentaje de piezas defectuosas y el total de producción de cada factoría viene dado en la siguiente tabla:

	$F1$	$F2$	$F3$
Producción	40 %	35 %	25 %
Defectuosas	2 %	3 %	1 %

Halla la probabilidad de que una pieza escogida al azar sea defectuosa

Solución

F1 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 1}
F2 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 2}
F3 = {Elegir pieza fabricada en la factoría 3}
D = {Elegir pieza defectuosa}

Lo podemos calcular directamente si sabemos detallar en que consiste el suceso "La pieza es defectuosa" y las distintas maneras en que se puede producir esta situación.

P(Elegir pieza defectuosa) $=P(F_1) \cdot P(D|F_1) + P(F_2) \cdot P(D|F_2) + P(F_3) \cdot P(D|F_3)$=$\frac{40}{100}\frac{2}{100} + \frac{35}{100}\frac{3}{100} + \frac{25}{100}\frac{1}{100} = 0,01875 = 1,8\,\%$

Ejemplo:

En un grupo de amigos, el 60 % tienen un tortuga. El 30 % de estos tienen también un gato, y el 20 % de los que no tienen tortuga, tienen un gato.

1. ¿Qué porcentaje tienen una tortuga y un gato? (18 %)
2. ¿Qué porcentaje tiene un gato? (26 %)

Diagramas de árbol y tablas de contingencia.

Los diagramas de árbol o las tablas de contingencia son de mucha ayuda para describir experimentos compuestos y para calcular probabilidades asociadas a estos experiencias.

Ejemplo:

Se sabe que el 70 % de los habitantes de una ciudad van alguna vez al año al cine. De los que van al cine, el 20 % van también alguna vez al año al teatro. De los que no van al cine, el porcentaje de los que van alguna vez al teatro es del 15 %. Halla la probabilidad de que un habitante de la ciudad:

1. Vaya al teatro alguna vez al año. 18,5 %
2. Vaya al cine y al teatro alguna vez al año. (14 %)

Solución

	Teatro	*No teatro*	*Total*
Cine	20	80 %	%
No cine	15 %	85 %	30 %

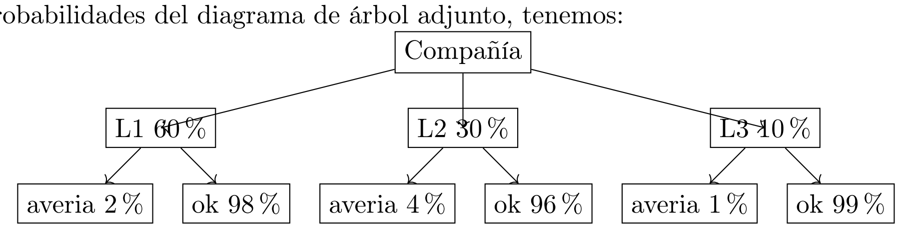
a)$P(teatro) = P(cine)P(teatro|cine) + P(nocine)P(Teatro|nocine) =$
$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}15 = 0,185 = 18,5\,\%$
b)$P(Cine \cap teatro) {=} P(cine)P(teatro|cine) {=} 0,7 \cdot 0,2 = 0{,}14 = 14\,\%$

Ejemplo:

Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60 % de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30 % cubre la segunda y el 10 % cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2 %, 4 % y 1 %, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

Solución

El suceso "sufrir una avería" (Av) puede producirse en las tres líneas, (L1, L2, L3). Según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades del diagrama de árbol adjunto, tenemos:



$P(Av) = P(L1)P(Av|L1)+P(L2)P(Av|L2)+P(L3)P(Av|L3) = 0,6 \cdot 0{,}02 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,1 \cdot 0,01 = 0,025$

Ejemplo:

Una encuesta realizada entre 104 hombres y 125 mujeres reveló que 13 hombres y 20 mujeres tenían necesidad de usar gafas para leer. Halla:

1. La probabilidad de que un persona usa gafas para leer. (14,41 %)
2. La probabilidad de que una mujer no utilice gafas para leer. (84 %)

Ejemplo:

Una casa tiene dos escaleras. La escalera A tiene 10 pisos y cuatro de ellos tienen alarma; en la escalera B, cinco pisos tienen alarma. Una persona despistada entra en una de las escaleras y luego intenta entrar en uno de los pisos. ¿Cuál es la probabilidad de que intente entrar en un piso con alarma?

A: Entra en la escalera A — S: Tiene alarma
B: Entra en la escalera B — $\acute{S}$: No tiene alarma

$$\begin{array}{lcll}
\quad 1/2 & & S: Tiene\ alarma & 4/10 \\
A: Entra\ en\ la\ escalera\ A & \nearrow & & \\
 & \searrow & \overline{S}: No\ tiene\ alarma & 6/10 \\
 & & & \\
 & & S: Tiene\ alarma & 5/10 \\
B: Entra\ en\ la\ escalera\ B & \nearrow & & \\
\quad 1/2 & \searrow & \overline{S}: No\ tiene\ alarma & 5/10
\end{array}$$

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) = P(A)\,P(S\,|A) + P(B)\,P(S\,|B) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$$

Teorema de Bayes

Thomas Bayes, matemático, nació en Londres, Inglaterra en 1702 y murió en Tunbridge Wells, Kent, Inglaterra el 17 de Abril de 1761.

El teorema de Bayes se utiliza para determinar la probabilidad de las **causas** a partir de los **efectos** que han podido ser observados.El teorema que lleva su nombre se refiere a la probabilidad de un suceso condicionado por la ocurrencia de otro suceso mientras que «inversa» es valorar probabilísticamente las posibles condiciones que rigen supuesto que se ha observado cierto suceso. Los defensores de la inferencia bayesiana (basada en dicho teorema) afirman que la trascendencia de la probabilidad inversa reside en que es ella la que realmente interesa a la ciencia, dado que procura sacar conclusiones generales (enunciar leyes) a partir de lo objetivamente observado, y no viceversa.

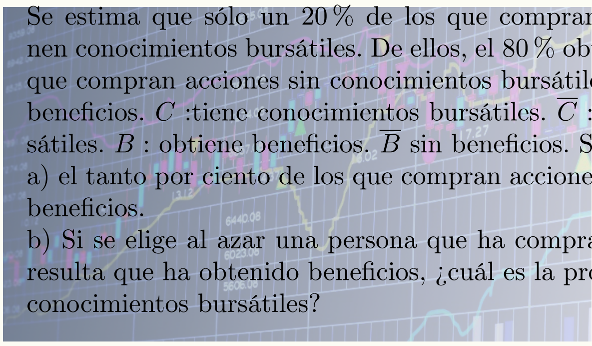
Actualmente, con base en su obra, se ha desarrollado una poderosa teoría que ha conseguido aplicaciones en diversas áreas del conocimiento. Especial connotación han tenido los sistemas para detección de spam en el ambiente de Internet. En el campo sanitario, el enfoque de la inferencia bayesiana experimenta un desarrollo sostenido, especialmente en lo que concierne al análisis de ensayos clínicos, donde dicho enfoque ha venido interesando de manera creciente a las agencias reguladoras de los medicamentos, tales como la norteamericana FDA (Food and Drug Administration).

Teorema de Bayes

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero y sea B un suceso cualquiera del que conocemos las $P(B|A_i)$. Entonces

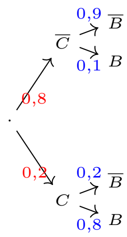
$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\,P(B|A_i)}{P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B|A_n)}$$

Ejemplo:



Se estima que sólo un 20 % de los que compran acciones en bolsa tienen conocimientos bursátiles. De ellos, el 80 % obtienen beneficios. De los que compran acciones sin conocimientos bursátiles, solo un 10 % obtiene beneficios. C :tiene conocimientos bursátiles. $\overline{C}$: sin conocimientos bursátiles. B : obtiene beneficios. $\overline{B}$ sin beneficios. Se desea saber:
a) el tanto por ciento de los que compran acciones en Bolsa que obtienen beneficios.
b) Si se elige al azar una persona que ha comprado acciones en Bolsa y resulta que ha obtenido beneficios, ¿cuál es la probabilidad de que tenga conocimientos bursátiles?

Solución
Sean los sucesos C = tienen conocimientos bursátiles B = obtienen beneficios



Solución

a)Se aplica la regla de la probabilidad total:

$$P(B) = P(C)P(B|C) + P(\overline{C})P(B|\overline{C}) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}16 + 0{,}08 = 0,24 \text{ó } 24\,\%$$

b)Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(C/B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C)P(B|C)}{P(B)} = \frac{0{,}16}{0{,}24} = \boxed{0.67 \text{ ó } 67\,\%}$$

Ejemplo:

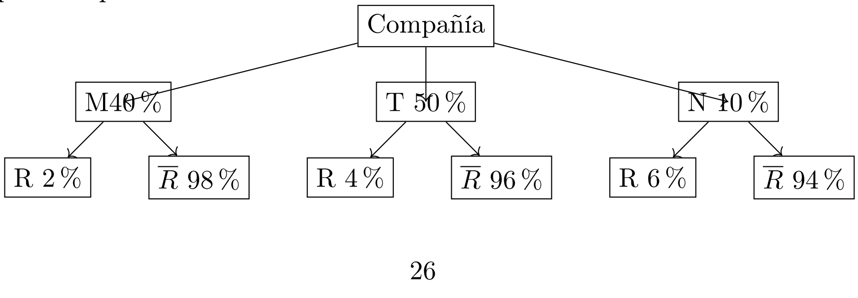
El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es 120, por la tarde, 150, y por la noche, 30. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde, del 4 %, y por la noche, de un 6 %.
a) Calcula la probabilidad de que se retrase un vuelo con destino a este aeropuerto.
b) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo nocturno?

Solución

Elegido un vuelo al azar, se consideran los sucesos:
M = "el vuelo llega por la mañana"
T = "el vuelo llega por la tarde"
N = "el vuelo llega por la noche"
R = "el vuelo llega con retraso"

Se proporcionan las siguientes probabilidades: $P(M) = \frac{120}{300} = 0,4; P(\overline{T}) = \frac{150}{300} = 0{,}5; P(T) = \frac{30}{300} = 0{,}1$
$P(R|M) = 0{,}02; P(R|T) = 0{,}04; P(R|N) = 0{,}06$

En el diagrama de árbol se pueden ver las distintas posibilidades con sus respectivas probabilidades



a)La probabilidad de que un vuelo elegido al azar se retrase se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(M)P(R|M)+P(T)P(R|T+P(N)P(R|N) = 0,4{\cdot}0,02+0,5{\cdot}0,04+0,1{\cdot}0,06 = 0,034$$

b) Se utiliza la regla de Bayes:

$$P(N|R) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{P(N)P(R|N)}{P(R)} = \frac{0,1 \cdot 0,06}{0,034} = 0{,}17$$

Ejemplo:

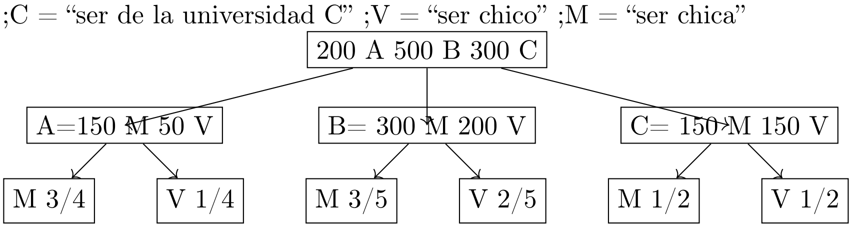
En una universidad existen tres facultades: A,B y C.En A hay matriculadas 150 chicas y 50 chicos; en B, 300 chicas y 200 chicos; y en C, 150 chicas y 150 chicos.

a) Calcula la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, sea chico.

b) Si un estudiante elegido al azar resultara ser chico,¿cuál es su facultad más probable?

Solución

Sean los sucesos A = “ser de la universidad A” ;B = “ser de la universidad B” ;C = “ser de la universidad C” ;V = “ser chico” ;M = “ser chica”



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$$P(V) = P(A)P(V|A) + P(B)P(V|B) + P(C)P(V|C) = \frac{1}{5}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\frac{1}{2} =$$

$$P(V) = 1/20 + 1/5 + 3/20 = 2/5$$

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$P(A|V) = \frac{P(A\cap V)}{P(V)} = \frac{P(A)P(V|A)}{P()} = \frac{1/20}{2/5} = \frac{1}{8}$

$P(B|V) = \frac{P(B\cap V)}{P(V)} = \frac{P(B)P(V|B)}{P()} = \frac{1/5}{2/5} = 1/2$

$P(C|V) = \frac{P(C\cap V)}{P(V)} = \frac{P(C)P(V|C)}{P()} = \frac{3/20}{2/5} = 3/8$ .La universidad más probable es la B

Ejemplo:

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene

2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

b) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

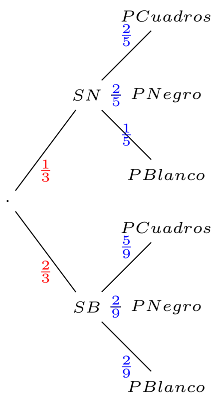
c) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Solución

Considerando los sucesos: SB = "Elegir sombrero blanco" SN = "Elegir sombrero negro"

PB = "Elegir pañuelo blanco" PN = "Elegir pañuelo negro" PC="elegir pañuelo de cuadros"

Podemos construir el siguiente diagrama de árbol:



a)$P((SB \cap PN) \cup (SN \cap PB)) = P(SB)P(PN|SB) + P(SN)P(PB|SN) = \frac{2}{3}\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\frac{1}{5} = 0{,}2148$

b)Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

$$P(SB)P(PN|SB) + P(SB)P(PC|SB) + P(SN)P(PB|SN)+$$
$$P(SN)P(PN|SN) + P(SN)P(PC|SN) = 0{,}851$$
$$\frac{2}{3}\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\frac{2}{5} = 0{,}851$$

c)Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

$$P(SN|PC) = \frac{P(SN \cap PC)}{P(PC)} = \frac{P(SN)P(PC|SN)}{P(SN)P(PC|SN) + P(SB)P(PC|SB)} = 0{,}27$$

Ejemplo:

El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales, lo hacen en hoteles, mientras que el resto lo hace en apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

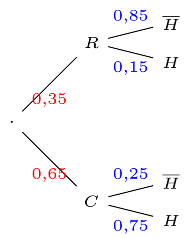
b) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Solución

Los sucesos a considerar son los siguientes:

C ="Alojarse en la Capital";R="Alojarse en zonas Rurales";H= "Alojarse en Hoteles";$\overline{H}$= "Alojarse en apartamentos turísticos"

Dibujamos el diagrama de árbol con las probabilidades



a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

Seguimos las ramas que acaban en H (y las sumamos)

$P(H) = 0{,}65 \cdot 0{,}75 + 0{,}35 \cdot 0{,}15 = \boxed{0.54}$

b) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Es una probabilidad condicionada(Bayes)

$P(R/H^c) = \frac{P(R\cap H^c)}{P(H^c)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}85}{1-0{,}54} = \boxed{0.646 \cdots}$

Problemas propuestos

1. Dos personas juegan con una moneda, a cara (C) o cruz (X). La que apuesta por la cara gana cuando consiga dos caras seguidas o, en su defecto, tres caras; análogamente con la cruz . El juego acaba cuando gana uno de los jugadores. Halla:

   a) El espacio muestral, E.

   b) Los sucesos: A = "En el juego salieron, al menos, dos caras seguidas"; B = "En el juego no salieron ni dos cruces ni dos caras seguidas".

2. La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es x, mientras que con otra moneda esa probabilidad es y. Se lanzan las dos monedas. Calcula la probabilidad de:

   a) No obtener cara.

   b) Obtener exactamente una cara.

   c) Obtener dos caras. ¿Es posible elegir x e y de modo que las probabilidades de los apartados a, b y c sumen 1?

3. Se dispone de 6 tarjetas; en cada una de ellas hay una letra y un número, que son los siguientes: A1, B1, B2, C2, C3. Se considera el siguiente experimento aleatorio: Se toman dos de estas tarjetas, simultáneamente. Halla:

   a) El espacio muestral.

   b) Los sucesos: S = "Las letras que se obtienen son distintas"; T = "Los números que se obtienen son distintos"; U = "Se obtienen dos números iguales".

4. Con las cifras del 1 al 9 se forman al azar números de 4 cifras. Calcula la probabilidad de que el número formado sea múltiplo de cinco si:

   a) El número tiene las cifras distintas.

   b) El número puede tener cifras repetidas.

5. Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 3 rojas. De la bolsa se extraen 3 bolas al azar. Calcula la probabilidad de que:

   a) Haya al menos una bola roja entre las extraídas.

   b) Las 3 sean del mismo color

6. Si A, B y C son tres sucesos de un experimento aleatorio, sean R y S los sucesos siguientes: R = Sucede A pero no suceden ni B ni C. S = Sucede A o sucede B, pero no sucede C. Expresa R y S en función de A, B y C .

7. Una urna contiene 10 bolas iguales; 9 de ellas son blancas y una es negra. Se extraen sucesivamente bolas hasta obtener la bola negra (las bolas no se restituyen a la urna). Halla el espacio muestral y las probabilidades de cada uno de sus resultados.

8. En una urna hay 10 bolas iguales, marcadas con los números 1, 2, 3 ... 10. Se extraen, al azar, 5 bolas. Halla las probabilidades de los siguientes sucesos:

   a) Entre las bolas extraídas está la marcada con el número 10.

   b) Entre las bolas extraídas están las marcadas con los números 9 y 10.

9. Sean A y B dos sucesos, de un experimento aleatorio, de los que se sabe que: $P(A) = 5/8$, $P(A \cup B) = 7/8$, $P(A \cap B) = 1/4$ Halla las probabilidades de los sucesos $A, B\ y\ A \cap \overline{B}$

10. Conocemos las siguientes probabilidades:$P[A] = 0,4P[B] = 0,7P[\overline{A} \bigcup \overline{B}] = 0,8.$Calcula $P[\overline{(A \bigcap B)}]$, $P[A \bigcap B]$, $P[A \bigcup B]$.

11. Sabemos que:$P[M \bigcup N] = 0{,}6; P[M \bigcap N] = 0{,}1, P[\overline{M}] = 0,7.$Calcula $P[M], P[N], P[\overline{N}], P[\overline{M} \bigcap \overline{N}]$.

12. Se sabe que p(A)=0.4, p(B) =0. 6 y $p(A \cup B) = 0,7$.

    a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

    b) Calcula p(A $\bigcap$ $\overline{B}$), donde $\overline{B}$ representa el suceso complementario o contrario de B.

    c) Calcula $p(\overline{A} \bigcap \overline{B})$.

13. Un estudio revela que el 10 % de los oyentes de radio sintoniza a diario las cadenas Music y Rhythm, que un 35 % sintoniza a diario Music y que el 55 % de los oyentes no escucha ninguna de las dos emisoras. Obtén:

    a) La probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm.

    b) La probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm pero no la Music.

    c) La probabilidad de que un oyente, del que sabemos que escucha Rhythm, escuche Music.

14. Sean A y B dos sucesos con P(A)=0,5; P(B)=0,3 y P(A$\bigcap$B)=0,1. Calcular las probabilidades siguientes: $P(A \cup B)$, $P(A|B)$, $P(A|A \bigcap B)$ y $P(A|A \cup B)$.

15. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0{,}9$; $P(\overline{A}) = 0{,}4$, donde $\overline{A}$ denota el suceso contrario o complementario del suceso A, y $P(A \bigcap B) = 0{,}2$. Calcula las probabilidades siguientes: $P(B), P(A \mid B)$,$P(A \bigcap \overline{B})$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

16. En un grupo de 2º de bachillerato el 15 % estudia Matemáticas, el 30 % estudia Economía y el 10 % ambas materias. Se pide:

    a) ¿Son independientes los sucesos Estudiar Matemáticas y Estudiar Economía?

    b) Si se escoge un estudiante del grupo al azar, calcular la probabilidad de que no estudie ni Matemáticas ni Economía.

17. La probabilidad de que haya un incidente en una fábrica que dispone de alarma es 0,1. La probabilidad de que suene ésta si se ha producido algún incidente es 0,97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0,02.

    a) Calcula la probabilidad de que no suene la alarma.

    b) En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

18. Un ordenador personal tiene cargados dos programas antivirus A1 y A2 que actúan simultánea e independientemente. Ante la presencia de un virus, el programa A1 lo detecta con una probabilidad de 0,9 y el programa A2 lo detecta con una probabilidad de 0,8. Calcular de forma razonada: a) La probabilidad de que un virus cualquiera sea detectado. b) La probabilidad de que un virus sea detectado por el programa A1 y no por A2

19. Una urna contiene dos monedas de plata y tres de cobre. Otra urna contiene cuatro monedas de plata y tres de cobre. Si se elige una urna al azar y se extrae una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda extraída sea de plata?

20. En un aparato de radio hay presintonizadas tres emisoras A, B y C que emiten durante todo el día. La emisora A siempre ofrece música, mientras que la B y la C lo hacen la mitad del tiempo de emisión. Al encender la radio se sintoniza indistintamente cualquiera de las tres emisoras.

    a) Obtener de forma razonada la probabilidad de que al encender la radio escuchemos música.

    b) Si al poner la radio no escuchamos música, calcula de forma razonada cuál es la probabilidad de que esté sintonizada en la emisora B.

21. En una pequeña ciudad hay dos bibliotecas. En la primera, el 50 % de los libros son novelas mientras que en la segunda lo son el 70 %. Un lector elige al azar una biblioteca siguiendo un método que implica que la probabilidad de elegir la primera biblioteca es el triple que la de elegir la segunda. Una vez llega a la biblioteca seleccionada, elige al azar un libro, novela o no. a) Calcular razonadamente la probabilidad de que elija una novela. b) Sabiendo que el libro seleccionado es una novela, obtener razonadamente la probabilidad de que haya acudido a la primera biblioteca.