MATEMATICAS (MAT II)

2º Bachillerato

INTEGRAL INDEFINIDA

Departamento de Matemáticas

Ies Dionisio Aguado

1. Introducción.

La primitiva de una función $f(x)$ es otra función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Escribimos esto así:

$$F(x) \text{ es una primitiva de } f \text{ si sucede que } F'(x) = f(x).$$

Se llama **integral de** $f(x)$ al conjunto de todas las primitivas de $f(x)$ y se representa así:$\int f(x)dx$. Se lee "integral de f(x) diferencial de x"

Es claro que si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ también lo es $F(x) + C$ siendo $C \in R$

Así pues, si $F(x)$ es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

A la función $f(x)$ se le llama integrando y $F(x)$ es, como ya se ha comentado, *una* primitiva de $f(x)$.

Ejemplo

sen x es una primitiva de *cos* x ya que $(sen\ x)' = cos\ x$. Por lo tanto

$$\int cos(x)dx = sen(x) + C$$

2. Propiedades lineales de la integral.

Sean f y g dos funciones y sean α y β dos números reales. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
2. $\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$

Estas dos propiedades se pueden englobar en una:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

Ejemplo:

$$\int (7x - 4x^4)\, dx = 7 \int x\, dx - 4 \int x^4\, dx$$

3. Integrales inmediatas.

El proceso de integración lo podemos interpretar como el proceso inverso a la derivación. De esta forma podemos elaborar una tabla de integrales al igual que se hace una tabla de derivadas.

Se nos presentan los siguientes casos:

3.0.1. *Integral de la función nula.*

Si tenenmos $f(x) = C$ donde $C \in R$ entonces $f'(x) = 0$. Por lo tanto $\int 0\,dx = C, \quad donde \quad C \in R$

3.0.2. *Integral de una función constante.*

Si buscamos una función que al derivarla nos de una constante $k \in R$, observamos que la solución buscada es kx, así pues:

$$\int k\,dx = kx + C \quad \forall C \in R$$

3.0.3. *Tipo potencial.*

Haciendo uso de:

$$f(x) = x^{n+1} \Longrightarrow f'(x) = (n+1)x^n$$

obtenemos que:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Análogamente, haciendo uso de la regla de la cadena para el caso:

$$g(x) = (u(x))^{n+1} \Longrightarrow g'(x) = (n+1)(u(x))^n\,u'(x)$$

obtenemos que:

$$\int f^n(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Ejemplos:

- $\int x^{-1/3}dx = \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C$
- $\int (2x+1)(x^2+x+1)^{10}dx = \frac{(x^2+x+1)^{11}}{11}$+C

- $\displaystyle\int (2x^3 - x^2 + 4x - 2)\, dx = 2\,\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 4\,\frac{x^2}{2} - 2x + C = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 2x + C$
- $\displaystyle\int \frac{3}{x^2}\, dx = 3\int x^{-2}\, dx = 3\,\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\,\frac{3}{x} + C$

3.0.4. *Tipo logarímico.*

Como sabemos, la derivada de la función logaritmo es $1/x$. De aquí se deduce que:

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$$

Y como antes, usando la regla de la cadena, obtenemos su expresión para la forma compuesta:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + C$$

Ejemplos:

- $\int tg(x)\, dx = \int \frac{senx}{cosx} dx = Ln|senx| + C;$
- $\int \frac{sen(2x)}{1+sen^2x} dx = \int \frac{2sen(x)cosx}{1+sen^2x} = Ln(1 + sen^2x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 3}{x}\, dx = 2\int x\, dx - \int 1\, dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx = x^2 - x + 3\, ln\, x + C$

3.0.5. *Tipo exponencial.*

Como la derivada de e^x es ella misma, tenemos que:

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

Análogamente, para la derivada de la función exponencial compuesta tenemos que:

$$\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C$$

Para el caso en que $f(x) = a^x$, tenemos que $f'(x) = \ln a\, a^x$ por lo que llegamos a que:

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Algo similar se obtiene para el caso compuesto:

$$\int a^{f(x)} f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

Ejemplos:

- $\int xe^{x^2}\,dx = \int \frac{2}{2}xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C$
- $\int e^{sen(x)}cos(x)\,dx = e^{senx} + C$

3.0.6. *Tipo coseno y tipo seno.*

Haciendo uso de la derivada, tanto del seno como del coseno, razonando como en los casos anteriores se tiene sin ningún tipo de dificultad que:

$$\int sen(x)\,dx = -cos(x) + C$$

$$\int cos(x)\,dx = sen(x) + C$$

Y para la forma compuesta:

$$\int sen(f(x))f'(x)\,dx = -cos(f(x)) + C$$

$$\int cos(f(x))f'(x)\,dx = sen(f(x)) + C$$

Ejemplos:

- $\int \frac{cos(\ln x)}{x}dx$
- $\int cos(nx)\,dx$

3.0.7. *Tipo tangente.*

Como sabemos:

$$f(x) = tg(x) \implies f'(x) = sec^2x = \frac{1}{cos^2x} = 1 + tg^2x$$

Por lo tanto:

$$\int sec^2(x)\,dx = tg(x) + C$$

Y puesto que por aplicación directa de la regla de la cadena obtenemos que:

$$h(x) = tg(f(x)) \implies h'(x) = sec^2(f(x))f'(x)$$

es inmediata que la deducción del tipo tangente compuesto:

$$\int sec^2(f(x))f'(x)\,dx = tg(f(x)) + C$$

Ejemplos:

$$\int tg^2(x)\,dx; \qquad \int sec^4x\,dx$$

3.0.8. *Tipo cotangente.*

Razonando análogamente a como lo hicimos en el caso anterior, usando la derivada de la cotangente, llegamos a:

$$\int cosec^2(x)\,dx = \int \frac{1}{sen^2 x}dx = -cotg(x) + C$$

Y para el caso compuesto:

$$\int cosec^2(f(x))f'(x)\,dx = -cotg(f(x)) + C$$

Ejemplos:

$$\int cosec^2(2e^x)e^x\,dx; \qquad \int cosec^4 x\,dx$$

3.0.9. *Tipo arcoseno (=-arcocoseno).*

Basándonos en la expresión de la derivada de la función arcoseno tenemos que:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsen(x) + C$$

Y para la forma compuesta:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx = arcsen(f(x)) + C$$

Ejemplos:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-4e^{2x}}}dx; \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1-ln^2 x}}dx$$

3.0.10. *Tipo arcotangente (=-arcocotangente).*

La forma simple y la compuesta se deduce, al igual que todos los casos anteriores de la expresión de la derivada de esta función. Por lo tanto tenemos que:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x) + C$$

Y la forma compuesta será:

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = arctg(f(x)) + C$$

Nota:
Un caso muy frecuente es encontrarnos con la integral:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$$

que es un caso particular del tipo arcotangente, pero que no es mala idea recordarla pues es muy frecuente toparse con ella en muchos problemas. Su resolución es casi inmediata:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{1/a^2}{1+(x/a)^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1/a}{1+(x/a)^2}dx = \frac{1}{a}arctg(\frac{x}{a})$$

Y de la misma manera se concluye que:

$$\int \frac{f'(x)}{a^2+f^2(x)}dx = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{f(x)}{a}\right)$$

Ejemplos:

- $\int \frac{x}{1+x^4}dx;$ $\quad \int \frac{1}{x^2-x+1}dx$
- $\int \frac{x}{1+x^4}dx;$ $\quad \int \frac{1}{x^2-x+1}dx$

4. Método de integración por cambio de variable.

Ante integrales cuya resolución no se puede realizar como inmediata, ni racional, ni encaja con los modelos de integración por partes, se recurre al método de **sustitución o cambio de variable**, el cual es uno de los métodos de integración más amplios.

4.1. Métodos

Método 1

Consiste en encontrar una función $x = g(t)$, donde $dx = g'(t)dt$, que al sustituirla por x bajo el signo integral, convierta la integral en otra más sencilla (en la nueva variable t), normalmente en una inmediata o racional. Finalmente, una vez realizada la integral en la variable t, hay que deshacer el cambio y volver a la variable x.

Método 2

Consiste en hacer el cambio $t = u(x)$, donde $dt = u'(x)dx$, y se despeja x y dx sustituyéndolos en el integrando. Para terminar el proceso se halla la integral en la variable t y se deshace el cambio.

Nota: Si la integral que obtenemos al hacer estos cambios es más complicada de resover que la inicial, obviamente el cambio elegido no es el más apropiado y buscaremos otro cambio más adecuado.

Ejemplo.

$\int x\left(x^2+1\right)^{10}dx$

Llamamos t a la expresión que se encuentre entre paréntesis: $t = x^2 + 1$.

Encontramos su derivada: $\frac{t}{\mathrm{dx}} = 2x$

Despejamos dx: $\mathrm{dx} = \frac{dt}{2x}$

Realizamos las sustituciones en la integral dada y simplificamos los términos semejantes.

$$\int x\left(x^2+1\right)^{10}dx = \int xt^{10}\frac{\mathrm{dt}}{2x} = \int \frac{t^{10}dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{10}\mathrm{dt}$$

Encontramos la última integral: $\int x\left(x^2+1\right)^{10}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{11}}{11} + C$

sustituimos nuevamente t por equivalente:

$\int x\left(x^2+1\right)^{10}dx = \frac{\left(x^2+1\right)^{11}}{22} + C$

Ejemplo.

$\int 3x^2\sqrt[3]{\left(5x^3+4\right)^5}dx$

Sabemos la integral la podemos expresar como: $\int 3x^2\left(5x^3+4\right)^{\frac{5}{3}}\mathrm{dx}$

Llamamos t a la expresión que se encuentre entre paréntesis: $t = 5x^3 + 4$

Encontramos su derivada: $\frac{\mathrm{dt}}{dx} = 15x^2$; Despejamos dx: $dx = \frac{\mathrm{dt}}{15x^2}$

Realizamos las sustituciones en la integral dada y simplificamos los términos semejantes.

$$\int 3x^2\left(5x^3+4\right)^{\frac{5}{3}}\mathrm{dx} = \int 3x^2t^{\frac{5}{3}}\frac{\mathrm{dt}}{15x^2} = \int \frac{t^{\frac{5}{3}}\mathrm{dt}}{5} = \frac{1}{5}\int t^{\frac{5}{3}}\mathrm{dt}$$

Encontramos la última integral: $\int 3x^2\sqrt[3]{\left(5x^3+4\right)^5}\mathrm{dx} = \frac{3}{40}t^{\frac{8}{3}} + C$

sustituimos nuevamente t por equivalente:

$\int 3x^2\sqrt[3]{\left(5x^3+4\right)^5}dx = \frac{3}{40}\left(5x^3+4\right)^{\frac{8}{3}} + C$

Ejemplo.

$\int \frac{3x^2}{4x^3-5}\mathrm{dx}$

Llamamos t a la expresión que se encuentre en el denominador:

$t = 4x^3 - 5$

Encontramos su derivada: $\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} = 12x^2$

Despejamos dx: $\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{12x^2}$

Realizamos las sustituciones en la integral dada y simplificamos los términos semejantes.

$$\int \frac{3x^2}{t}\frac{dt}{12x^2} = \int \frac{\mathrm{dt}}{4t} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{dt}}{t}$$

Encontramos la última integral: $\int \frac{3x^2}{4x^3-5}\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\mathrm{Ln}|t| + C$

Sustituimos nuevamente t por equivalente:

$\int \frac{3x^2}{4x^3-5}dx = \frac{1}{4}Ln|4x^3 - 5| + C$

Ejemplo:

$\int e^{3x+1}\mathrm{dx}$

Llamamos t a la expresión que se encuentre como exponente de e.:

$t = 3x + 1$

Encontramos su derivada: $\frac{\mathrm{dt}}{dx} = 3;$

Despejamos dx: $dx = \frac{\mathrm{dt}}{3}$

Luego: $\int e^{3x+1}dx = \int e^t\frac{\mathrm{dt}}{3} = \frac{1}{3}\int e^t\mathrm{dt} = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$

Ejemplo:

$\int 4^{3x+5}dx$

Llamamos t a la expresión que se encuentre como exponente de 4.:

$t = 3x + 5$

Encontramos su derivada: $\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} = 3$; Despejamos dx: $\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{3}$

Luego:

$$\int 4^{3x+5}\mathrm{dx} = \int 4^t\frac{\mathrm{dt}}{3} = \frac{1}{3}\int 4^t\mathrm{dt} = \frac{1}{3}\frac{4^t}{\mathrm{Ln}4} + C = \frac{1}{3Ln4}4^{3x+5} + C$$

Ejemplo:

$\int \text{sen}\,(5x-3)\,\text{dx}$
Llamamos t a la expresión que se encuentre como ángulo de la función $t = 5x - 3$.
Encontramos su derivada: $\frac{\text{dt}}{dx} = 5$; Despejamos dx:
$\text{dx} = \frac{\text{dt}}{5}$
Luego:
$\int sen\,(5x-3)\,\text{dx} = \int sent\,\frac{\text{dt}}{5} = \frac{1}{5}\int \text{sent dt} = \frac{1}{5}\,(-cos\ t) + C$
$= \frac{-1}{5}\cos\,(5x-3) + C$

Ejemplo

$\int \frac{3x^2}{4x^3-5}\text{dx}$
Llamamos t a la expresión que se encuentre en el denominador: $t = 4x^3 - 5$.
Encontramos su derivada: $\frac{\text{dt}}{\text{dx}} = 12x^2$
Despejamos dx: $\text{dx} = \frac{\text{dt}}{12x^2}$
Realizamos las sustituciones en la integral dada y simplificamos los términos semejantes.

$$\int \frac{3x^2}{t}\frac{\text{dt}}{12x^2} = \int \frac{\text{dt}}{4t} = \frac{1}{4}\int \frac{\text{dt}}{t}$$

Encontramos la última integral: $\int \frac{3x^2}{4x^3-5}\text{dx} = \frac{1}{4}\text{Ln}|t| + C$
Sustituimos nuevamente t por equivalente: $\int \frac{3x^2}{4x^3-5}\text{dx} = \frac{1}{4}\text{Ln}|4x^3-5| + C$

Ejemplo

- $\int \frac{\text{dx}}{\sqrt{5-9x^2}}$

Para resolver la integral, se trata de llevar el polinomio que esta dentro del radical a una expresión de la forma $a^2 - u^2$, para vemos que :

$$5 - 9x^2 = 5 - 3^2x^2 = 5 - (3x)^2$$

es decir, la integral nos queda:

$$\int \frac{\text{dx}}{\sqrt{5-9x^2}} = \int \frac{\text{dx}}{\sqrt{5-(3x)^2}}$$

ahora haciendo : $t = 3x$ se tiene que $\text{dt} = 3\text{dx}$ y al hacer la sustitución :

$$\int \frac{\text{dx}}{\sqrt{5-9x^2}} = \int \frac{\text{dx}}{\sqrt{5-(3x)^2}} = \int \frac{\text{dt}}{\sqrt{5-t^2}}$$

que tiene la forma de la integral $\int \frac{\mathsf{dt}}{\sqrt{a^2-t^2}} = arc\mathsf{Sen}\left(\frac{t}{a}\right) + C$ con $a^2 = 5$, luego la integral da como resultado:

$$\int \frac{\text{dx}}{\sqrt{5-9x^2}} = \int \frac{\text{dx}}{\sqrt{5-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{\text{dt}}{\sqrt{5-t^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\text{ArcSen}\left(\frac{t}{a}\right) + C = \frac{1}{3}\text{ArcSen}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Ejemplo

- $\displaystyle\int x^3\, cos\, x^4\ dx$
  Observamos que, salvo constante, en el integrando aparece la derivada de x^4
  $(x^4)' = 4\,x^3$.
  Por tanto parece razonable hacer el cambio de variable $t = x^4$, con lo que $dt = 4x^3\,dx$

  $$\int x^3\, cos\, x^4\ dx = \frac{1}{4}\int cos\ \underbrace{x^4}_{t} \cdot \underbrace{4x^3\,dx}_{dt} = \frac{1}{4}\int cos\, t\, dt = \frac{1}{4}\, sen\, t + C$$

  Deshaciendo el cambio: $\dfrac{1}{4}\, sen\, t + C = \dfrac{1}{4}\, sen\, x^4 + C$. Concluimos que:

  $$\boxed{\int x^3\, cos\, x^4\ dx = \frac{1}{4}\, sen\, x^4 + C}$$

  Podemos “*jugar*” con las constantes, ya que haciendo uso de la segunda propiedad de las integrales podemos extraer e introducir constantes bajo el signo integral.

- $\displaystyle\int \frac{sen\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

  Hacemos el cambio: $t = \sqrt{x}$, con lo que $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \Rightarrow 2\,dt = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

  $$\int \frac{sen\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int sen\ \underbrace{\sqrt{x}}_{t} \cdot \underbrace{\frac{dx}{\sqrt{x}}}_{2dt} = \int sen\, t \cdot 2\,dt = 2\,(-cos\, t) + C = -2\, cos\,\sqrt{x} + C$$

1. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

   Hacemos el cambio: $t = 1+x^2 \quad \Rightarrow dt = 2x\,dx \quad \Rightarrow \dfrac{dt}{2} = x\,dx$

   $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

   Nota:Hacerla usando el cambio de variable $t^2 = 1+x^2$

2. $\int tg\,x\,dx$

   Hay que darse cuenta que $tg\,x = \dfrac{sen\,x}{cos\,x}$ y que $(cos\,x)' = -sen\,x$

   Hacemos entonces el cambio: $t = cos\,x \quad \Rightarrow dt = -sen\,x\,dx$

   $$\int tg\,x\,dx = \int \frac{sen\,x\,dx}{cos\,x} = \int \frac{-dt}{t} = -ln\,t + C = -ln(cos\,x) + C$$

5. Método de integración por partes.

El método de integración por partes se basa en la regla de derivación de un producto de funciones. A partir de esta regla trataremos de buscar un método eficaz para resolver integrales de productos de funciones.

Sea u y v dos funciones derivables. La derivada del producto uv viene dada por la fórmula:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

si integramos en ambos miembros se obtiene:

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

y despejando $\int u\,dv$ se obtiene:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Para no olvidar esta fórmula es muy conocida la siguiente regla mnemotécnica: “Un día vi un valiente soldado vestido de de uniforme.”

A la hora de aplicar la fórmula tenemos que elegir quién será u y quién será dv. Para ello se suele escoger como u aquella función fácil de derivar y como dv la expresión fácil de integrar.

Ante la duda de elección, elegir una acertadamente requiere algo de práctica que se adquiere con los ejercicios. De todos modos, si al hacer una elección llegamos a una integral más difícil que la de partida se recomienda tomar otro camino.

A veces conviene aplicar dos veces la integración por partes. Puede darse el caso que obtengamos una integral similar a la de partida, para lo cual bastará despejar la integral y estará resuelto el problema.

Ejemplos:

- $\int xcos(x)\, dx$

  Tomemos las partes del método

  $u = x \Rightarrow du = 1dx$

  $dv = cosxdx \Rightarrow v = \int cosxdx = senx$

  Entonces

  $\int xcos(x)\, dx = xsenx - \int senxdx = x\ sen\ x - (-cos\ x) + C$

- $\int x^2 sen(x)\, dx$

  Tomemos las partes del método

  $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$

  $dv = senxdx \Rightarrow v = \int sen\ xdx = cos\ x$

  Entonces

  $\int x^2 sen(x)\, dx = x^2 cos\ x - \int 2xcos\ x\ dx$ *(Esta integral está resuelta en el ejemplo anterior)*

  $= x^2 cosx - 2\int xcosxdx = x^2 cosx - 2(xsenx + cosx) + C$

- $\int x^2 e^x \mathsf{dx}$;

$u = x^2\}\ \mathrm{dv} = e^x \mathrm{dx} \quad \begin{matrix} \mathrm{du} = 2xdx \\ v = \int e^x \mathrm{dx} = e^x \end{matrix}$

$I = x^2 e^x - \int 2\mathrm{xe}^x \mathrm{dx}$;

$$I_1 = \int 2\mathrm{xe}^x \mathrm{dx}$$

Hacemos nuevamente

$\left\{ \begin{matrix} u = 2x \\ \mathsf{dv} = e^x \mathsf{dx} \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \mathsf{du} = 2\mathsf{dx} \\ v = \int e^x \mathsf{dx} = e^x \end{matrix} \right.$

$$I_1 = 2\text{xe}^x - \int 2e^x dx = 2\text{xe}^x - 2e^x$$

Y volviendo nuevamente a la expresión (*) obtenemos el resultado final:$I = x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$

- $\int x^2 \mathsf{cos3xdx}$

$u = x^2\}$ $\mathsf{dv} = \mathsf{cos3xdx}$ $\begin{matrix} du = \mathsf{2xdx} \\ v = \int \mathsf{cos3xdx} = \frac{1}{3}\int \mathsf{3cos3xdx} = \frac{1}{3}\mathsf{sen}3x \end{matrix}$

$I = \frac{1}{3}x^2\mathsf{sen}3x - \int \frac{2}{3}x\mathsf{sen3xdx}$.

Aplicamos nuevamente el método de integración por partes:

$$\text{du} = \frac{2}{3}dx;\ \text{v=}\int \text{sen3xdx} = \frac{1}{3}\int \text{3sen3xdx} = -\frac{1}{3}\text{cos}3x$$

$\int \frac{2}{3}x\text{sen3xdx} = -\frac{2}{9}x\text{cos}3x + \int \frac{2}{9}\text{cos3xdx} = -\frac{2}{9}x\text{cos}3x + \frac{2}{27}\int \text{3cos3xdx} = -\frac{2}{9}x\text{cos}3x + \frac{2}{27}sen3x$

$$I = \frac{1}{3}x^2sen3x + \frac{2}{9}xcos3x - \frac{2}{27}sen3x + C$$

6. Integrales racionales.

Son integrales de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios de coeficientes reales y exponentes naturales. El proceso general para su resolución es el siguiente:

1. Se comprueba primeramente que no es inmediata del tipo logaritmo más arcotangente.

2. Se comprueba que el grado de $P(x)$ no sea mayor que el de $Q(x)$. Si lo fuera bastaría con efectuar la división de los polinomios $P(x)$ entre $Q(x)$ y nos quedaría una expresión del tipo:

$$P(x) = R(x) + Q_1(x)Q(x)$$

y si dividimos la expresión anterior por $Q(x)$ e integramos obtenemos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx + \int Q_1(x)dx$$

donde en la primera integral el grado del numerador es inferior al del denominador, y la segunda integral es inmediata (del tipo potencial). Una vez superado este paso podemos suponer que el denominador es de grado superior al numerador.

3. Se calculan las raíces o ceros del denominador, y nos enfrentamos a los siguientes casos:

   a) **Los ceros del denominador son reales y simples.**

   En este caso los pasos a seguir son los siguientes:

   Primeramente se efectúa la descomposición de $P(x)/Q(x)$ en factores simples. Una vez obtenida esta descomposición observemos que la integral de partida se ha transformado en una suma de integrales inmediatas del tipo logaritmo:

   $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a_0}dx + \int \frac{B}{x-a_1}dx + \dots$$

   donde $a_0, a_1, \dots$ son los ceros reales y simples de $Q(x)$

   b) **Los ceros del denominador son reales y múltiples.**

   Los pasos a seguir son similares al caso anterior salvo que la descomposición en este caso es:

   Si a_0 es un cero simple, a_1 es un cero de multiplicidad 3, entonces tenemos:

   $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a_0}dx + \int \frac{B}{x-a_1}dx + \int \frac{C}{(x-a_1)^2}dx + \int \frac{D}{(x-a_1)^3} + \dots$$

   Y llegado a este extremo se tiene que las integrales a las que hemos llegado son inmediatas del tipo logaritmo y del tipo potencial.

   c) **El denominador tiene una raíz imaginaria simple.**

   Primeramente vamos a tratar este caso de forma muy particular; buscamos resolver una integral del tipo:

   $$\int \frac{Mx+N}{x^2+\beta x+\gamma}dx$$

donde el denominador tiene una raíz compleja simple. Es decir, nos enfrentamos a un caso en que el denominador es un polinomio de grado 2 irreducible. Como el denominador es de la forma $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ de manera que $a+bi$ es su raíz entonces lo podemos expresar de la siguiente forma:

$$x^2 + \beta x + \gamma = (x-a)^2 + b^2$$

Por lo tanto, lo que intentamos resolver es una expresión del tipo:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx$$

Pasemos, pues, al cálculo de dicha integral:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx = \int \frac{Mx}{(x-a)^2+b^2}dx + \int \frac{N}{(x-a)^2+b^2}dx$$

Resolvamos las integrales siguiendo un orden. La primera de las dos integrales resultantes la descomponemos de la siguiente forma:

$$M\int \frac{x}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x}{(x-a)^2+b^2}dx == \frac{M}{2}\int \frac{2x\ -2a+2a}{(x-a)^2+b^2}dx$$

Por lo tanto, esta primera integral la hemos transformado en otras dos:

$$\frac{M}{2}\int \frac{2x-2a}{(x-a)^2+b^2}dx \qquad (1)$$

$$\frac{M}{2}\int \frac{2a}{(x-a)^2+b^2}dx \qquad (2)$$

No olvidemos que (1) y (2) componen la primera integral y también tenemos que resolver la segunda, que era:

$$N\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} \qquad (3)$$

Procedamos con los cálculos:

$$(1) = \frac{M}{2}\int \frac{2x-2a}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{M}{2}\ln|(x-a)^2+b^2|$$

Por otra parte, sacando fuera $2a$ de la integral (2) y sumándola con la integral (3), obtenemos:

$$(2)+(3) = Ma\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} + N\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = (Ma+N)\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} =$$

(dividiendo numerador y denominador por b^2)

$$= (Ma+n)\int \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{(x-a)^2}{b^2}+1}dx =$$

(que es una integral inmediata del tipo arco-tangente)

$$= \frac{Ma+N}{b}\int \frac{\frac{1}{b}}{(\frac{x-a}{b})^2+1}dx = \frac{(Ma+N)}{b}arctg(\frac{x-a}{b})$$

Por lo tanto, la integral que en principio buscábamos resolver resultará de sumar los resultados obtenidos al calcular (1) y (2)+(3), con lo que obtenemos:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{Ma+N}{b}arctg(\frac{x-a}{b}) + \frac{M}{2}\ln|(x-a)^2+b^2| + C$$

A este tipo de integrales comunmente se las denomina del tipo $arco - tangente$ más *logaritmo*.

d) **Los ceros del denominador son reales (múltiples o no) y complejos de multiplicidad 1.**

Para ver este caso con más claridad supongamos que nuestro denominador tiene una raíz real simple que denotaremos por c y una imaginaria simple o de multiplicidad 1 que denotaremos por $a+bi$. Entonces la descomposición en fracciones es la siguiente:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-c}dx + \int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx$$

La primera integral que aparece es inmediata del tipo logaritmo y la segunda es del tipo arco-tangente más logaritmo que hemos tratado justamente en el caso anterior.

Ejemplos:

- $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\mathsf{dx}$
  Como no puede obtenerse en el numerador la derivada del denominador, utilizaremos el método de descomposición en fracciones simples, ya que el denominador tiene raices reales.

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{matrix}3\\ \\2\end{matrix}$$

  Como los numeradores son iguales los denominadores también lo serán:

$$2x+1=A(x-2)+B(x-3)$$

  Para x = 3, 7 = A; Para x = 2, 5 = − B

  (A x se le han dado los valores de las raices del denominador.).

  Ahora procedemos de la siguiente manera:

  $I=\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\mathsf{dx}=\int \frac{7}{x-3}\mathsf{dx}+\int \frac{-5}{x-2}\mathsf{dx}=7L[x-3]-5L[x-2]$

- $I=\int \frac{x-3}{x^2+49}\mathsf{dx}$

La descomponemos en dos integrales. En la primera podemos buscar en el numerador la derivada del denominador y en la segunda buscamos el arco tangente

$I=\int \frac{x}{x^2+49}\text{dx}-\int \frac{3}{x^2+49}\text{dx}=I_1+I_2$

$I_1=\int \frac{x}{x^2+49}\text{dx}=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+49}\text{dx}=L(x^2+49)$

$I_2=\int \frac{3}{x^2+49}\text{dx}=\int \frac{\frac{3}{39}}{\frac{x^2}{49}+\frac{49}{49}}\text{dx}=\frac{3}{49}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{7}\right)^2}\text{dx}$

Haciendo el cambio $x/7=t$ resulta $x=7t$ y por tanto $dx=7dt$ por lo que

$I_2=\frac{3}{49}\int \frac{1}{1+t^2},7\text{dt}=\frac{21}{49}\int \frac{1}{1+t^2}\text{dt}=\frac{3}{7}\text{arctg}t=\frac{3}{7}\text{arctg}\frac{x}{7}$

luego

$$I=L(x^2+49)+\frac{3}{7}\text{arctg}\frac{x}{7}$$

- $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx;$

- $\int \frac{1}{x^3+1}dx$