Ejercicios resueltos

Geometría

BY S3R4

Evau 2023

2023.Geometría

Modelo Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada $ABCD$, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas $A(1,1,1)$ y $B(1,3,1)$.

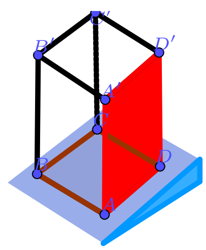
La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x-3z=1$ y el vértice sobre el punto A es $A\prime(1,1,6)$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA´ .

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

Solución:



El plano π' es el que contiene a las aristas AB y AA' . Dicho plano tiene como vectores directores los vectores $AB=(1,3,1)-(1,1,1)=(0,2,0)$ y $AA´=(1,1,6)-(1,1,1)=(0,0,5)$.

Por tanto el plano π´ es $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi' \equiv x-1=0$

b)Si tomo como vector director el $\vec{n}_\pi \times \vec{AB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$=$(6,0,8)$, este vector debe coincidir con el BC ya que la base es un cuadrado en la rampa $4x-3z=1$ y dado que debe tener módulo 2= $|AB|$, este vector habrá BC que normalizarlo y multiplicarlo por 2.

Por lo que $BC=\frac{2}{\sqrt{6^2+0^2+8^2}}(6,0,8)=(\frac{6}{5},0,\frac{8}{5})$

Ahora bien $BC=(c_1,c_2,c_3)-(1,3,1)=(\frac{6}{5}$,0,$\frac{8}{5}) \rightarrow C=(\frac{11}{5},3,\frac{13}{5})$

Para hallar D, basta considerar que $AC=DC \rightarrow D=(\frac{11}{5},1,\frac{13}{5})$

c)El volumen se calcula como el valor absoluto del producto mixto de los vectores AB,AC y $AA´$.

Volumen=$|[AB,AC,AA']|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \frac{6}{5} & 2 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=12u^3$

Modelo Se consideran las siguientes rectas: r, la recta que pasa por el punto $P(1,1,2)$ y tiene como vector director $\vec{u}=(0,1,2)$; s, la recta de ecuaciones $s \equiv \begin{array}{ll} x+y-4 & =0 \\ x-2z+2 & =0 \end{array}$;

t, la recta paralela a s que contiene al punto P.

a) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.

b) (0.75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.

c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.

Solución:

a)Vamos a usar ecuaciones paramétricas para las rectas r y s :

$r \equiv (x,y,z) = (1,1,2) + t(0,1,2) = (1, 1+t, 2+2t), t \in R$

Para hallar la paramétrica de la recta s :

Llamamos $z=\lambda$ y despejamos x e y quedando $s \equiv (x,y,z) = (-2+2\lambda, 6-2\lambda, \lambda), \lambda \in R$.

El sistema de ecuaciones en t y λ

Si planteamos $\left\{ \begin{array}{c} 1=-2+2\lambda \\ 1+t=6-2\lambda \\ 2+2t=\lambda \end{array} \right.$.

Este sistema es incompatible y como además las direcciones de las rectas r y s son distintas, estas dos rectas se cruzan.

b)La recta t es paralela a s por lo que tiene su misma dirección, la del vector $(2,-2,1)$.

El ángulo θ que forman estas dos rectas es el ángulo que forman sus vectores de dirección.

Calculando su coseno

$$cos\ \theta = \frac{(0,1,2)\cdot(2,-2,1)}{|(0,1,2)|\cdot|(2,-2,1)|} = 0.$$

Por tanto, las rectas r y t son perpendiculares.

c)La proyección del punto P sobre la recta s sera el punto intersección de la recta s con el plano π' que es perpendicular a dicha recta y contiene al punto P.

El plano indicado tiene por vector normal $n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2,-2,1)$.
La forma general de la ecuación ecuación de π': $2x-2y+z+D=0$.

Para hallar el valor de D, usamos el valor del punto P $\Rightarrow 2\cdot1-2\cdot1+2+D=0 \Rightarrow D=-2$.

Así pues, el plano π' tiene por ecuación $2x-2y+z-2=0$,

Usando una ecuación paramétrica de los puntos de la recta s :$s \equiv (x,y,z) = (-2+2\lambda, 6-2\lambda, \lambda)$

Al cortar la recta s con el plano π' , hallamos la solución

$\left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) = (-2+2\lambda, 6-2\lambda, \lambda)) \\ 2x-2y+z-2=0 \end{array} \right. \Rightarrow 2(-2+2\lambda)-2(6-2\lambda)+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=2$
.

La su intersección con la recta s, es decir, la proyección de P sobre s, es el punto $P'(2,2,2)$.

Ordinaria Sean los puntos $A(1,-2,3), B(0,2,-1)$ y $C(2,1,0)$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.

c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

Solución:

a) Para comprobar que A, B y C foman un triángulo basta comprobar que AB y AC son linealmente independientes.

$AB = (0,2,-1) - (1,-2,3) = (-1,4,-4)$

$AC = (2,1,0) - (1,-2,3) = (1,3,-3)$

Como rango de $\{(-1,4,-4),(1,3,-3)\} = rango \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ por lo que A,B y C forman un triángulo.

Para saber la ecuación del plano que contiene a A, B y C basta hacer $\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z+1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$

El plano tiene por ecuación $-7y - 7z + 7 = 0 \Rightarrow y + z - 1 = 0$

b)La recta que pasa por A y B tiene por ecuación $r \equiv (x,y,z) = (0,2,-1) + \lambda(-1,4,-4) = (-\lambda, 2+4\lambda, -1-4\lambda)$.

El punto de corte con $z = 1$ se hallará estableciendo $-1 - 4\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

Por lo tanto el punto se hallará sustituyendo este valor de \lambda en la ecuación de la recta r para hallar el punto P. P=$(\frac{1}{2}, 2+4\cdot(\frac{-1}{2}), -1-4\cdot(\frac{-1}{2}))$= $(\frac{1}{2}, 0, 1)$

c)Para averiguar el perímero del triángulo T basta sumar los módulo de los vectores AB, BC, AC

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{33}$

$|\vec{AC}| = \sqrt{(1)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

Entonces

Perímetro de T=$\sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6}$

Ordinaria Dada la recta$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi : x - z = 2$ y el punto $A(1,1,1)$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

Solución:

a)Vamos a considerar el vector $\vec{u}_r$ director de la recta r, $\vec{u_r} = (2,1,-2)$ y dos vectores directores $\vec{v}_1, \vec{v_2}$ del plano π

Podemos elegir $\vec{v}_1 = (1,0,1), \vec{v_2} = (0,1,0)$ ya que son perpendiculares a $\vec{n}_\pi$ =(1,0,-1) que es el vector normal de π y ademas son independientes, por lo que serán directores del plano π. Así pues,como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. el rango de los vectores es 3 y por lotanto el plano y la recta se cortan.

El punto de corte lo hallaremos solucionando el sistema formado por la recta y el plano. Para ello, pasamos la recta a la forma paramétrica $r \equiv (x,y,z) = (1+2\lambda, \lambda, -1-2\lambda)$ y sustituimos en el plano para hallar el valor de λ que nos permita hallar el punto de corte.

$(1+2\lambda) - (-1-2\lambda) = 2 \Rightarrow 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

El punto de corte lo hallamos sutituyendo ese valor de λ en la ecuación en forma paramétrica de r:$Q(1,0,-1)$

b)Para hallar la proyección ortogonal del punto A sobre π consideramos la recta perpendicular a \pi que pasa por A, es decir $s \equiv (1+\lambda, 1, 1-\lambda)$ y cortamos ésta con el plano π

$(1+\lambda) - (1-\lambda) = 2 \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1$.

El punto proyección A' de A sobre el plano π se averigua sustituyendo ese valor de λ. $A' = (2,1,0)$

c)Nos piden hallar el punto A'', simetrico de A respecto la recta. Lo primero que hacemos es hallar el plano π' perpendicular a r que contiene a A. el vector normal de ese plano es $(2,1,-2)$ que es el director de r. El plano en cuestión tiene por ecuación $2x + y - 2z + D = 0$, y para hallar el valor de D sustituimos el punto A(1,1,1) en los valor correspondientes de (x,y,z) y nos queda $D = 2 \cdot 1 - 1 - 2 \cdot 1 = -1 \Rightarrow \pi' \equiv 2x + y - 2z - 1 = 0$.

Ahora hallamos las coordenadas del punto de intersección de π' y r. Volvemos a hacer esto con las ecuaciones en forma paramétrica de $r \equiv (x,y,z) = (1 + 2\lambda, \lambda, -1-2\lambda)$.

Sustituyendo en el plano π'

$2(1+2\lambda) + \lambda - 2(-1-2\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow 9\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{3}$.

Así pues el punto $M = (\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$. Este punto M es el punto medio entre A y su simétrico A'' con respecto a la recta r

AM=$(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}) - (1,1,1) = (\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-4}{3})$

$A'' = M + AM = (\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}) + (\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}) = (\frac{-1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-5}{3})$

Coincidentes Sean los planos $\pi_1 : y = x, \pi_2 : y = x + 1, \pi_3 : z = -1$ y $\pi_4 : z = 1$.

a) (0.5 puntos) Compruebe que son paralelos los planos π_1 y π_2, y que son paralelos los planos π_3 y π_4.

b) (0.5 puntos) Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4.

c) (0.5 puntos) Halle una recta que sea paralela a los cuatro planos y pase por el punto (1, 0, 2).

d) (1 punto) Halle dos planos perpendiculares a π_1, π_2, π_3 y π_4, que cumplan que el volumen del paralelepípedo comprendido entre los seis planos sea 1.

Solución:

a) Hallamos el vector normal $\vec{n}_1$ a $\pi_1 \equiv x - y = 0 \Rightarrow \vec{n_1} = (1, -1, 0)$

El vector normal $\vec{n}_2$ a $\pi_2 \equiv x - y + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n_2} = (1, -1, 0)$

Como $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \Rightarrow$ los planos π_1 y π_2 son paralelos o bien el mismo plano, pero un punto de π_1 ,por ejemplo O(0,0,0) no pertenece a $\pi_2 \Rightarrow \pi_1$ y π_2 son paralelos

El vector normal $\vec{n}_3$ a $\pi_3 \equiv z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n_3} = (0, 0, 1)$ y el vector normal $\vec{n}_4$ a $\pi_4 \equiv z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n_4} = (0, 0, 1)$

Como $\vec{n}_3 = \vec{n}_3 \Rightarrow$ los planos π_3 y π_4 son paralelos o bien el mismo plano, pero un punto de π_3 ,por ejemplo A(0,0,-1) no pertenece a $\pi_4 \Rightarrow \pi_3$ y π_4 son paralelos

b) Son perpendiculares porque $\vec{n_1} \cdot \vec{n_3} = 0$.

c) La dirección de la recta buscada es perpendicular a $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_3$, por lo que su vector director es $\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 0)$.

Como debe pasar por el punto (1, 0, 2), una ecuación suya será

$s \equiv (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(-1, -1, 0) \Rightarrow (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(1, 1, 0) \Rightarrow (x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, 2)$

d) Los planos buscados tendran como vector normal $\vec{n_1} \times \vec{n_2} = (-1, -1, 0)$, con ecuaciones $-x - y = D_1$ y $-x - y = D_2$.

La distancia entre ellos es $d(\pi_5, \pi_6) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{2}}$.

la distancia entre π_1 y π_2 es $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|0-(1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. y la distancia entre π_3 y π_4 es $d(\pi_3, \pi_4) = \frac{|1-(-1)|}{\sqrt{1}} = 2$.

Por tanto el volumen del paralelepípedo comprendido es $V = 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{2}} = |D_1 - D_2|$. Esto nos permite ver la relación entre D_1 y $D_2 \Rightarrow 1 = |D_1 - D_2|$

En consecuencia, un ejemplo de estos dos planos es $\pi_5 \equiv -x - y = 0$ y $\pi_6 \equiv -x - y + 1 = 0$. o mas convenientemente escritos $\pi_5 \equiv x + y = 0$ y $\pi_6 \equiv x + y - 1 = 0$

Coincidentes

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ y los planos $\pi : x + 2y + 2z - 1 = 0$ y $\pi' : 2x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) (0.75 puntos) Comprobar que los planos π y π' se cortan. Hallar el ángulo que forman.

b) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π. Hallar, si es posible, el punto de corte.

c) (1 punto) Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y π' .

Solución:

a)Consideramos los vectores normales de $\pi \to \vec{n_\pi} = (1, 2, 2)$ y de $\pi' {\to} \vec{n}_{\pi\prime} = (2, 2, 1)$, se tiene que rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \pi\ y\ \pi\prime$ se cortan.

Para hallar el ángulo $\alpha = ang(\pi, \pi\prime)$ =ang$(\vec{n}_\pi, \vec{n}_{\pi'}) \Rightarrow cos\alpha = \frac{|\vec{n_\pi} \cdot \vec{n_{\pi'}}|}{|n_\pi| \cdot |n_{\pi'}|} = \frac{(1,2,2)(2,2,1)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{8}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9} \Rightarrow \alpha = arc\ cos\frac{8}{9}$.

b) La recta r tiene vector director $d_r = (3, 1, -1)$ y el plano π tiene vector normal $\vec{n_\pi} = (1, 2, 2)$.

Como $\vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi}$=(3,1,-1)(1,2,2)=3+2-2$\neq$ 0 $\Rightarrow$ r corta a π. Si $P = r \bigcap \pi$.

Como r $\equiv$ (x,y,z) =($1 + 3\lambda$, λ , $-2 - \lambda$)$\Rightarrow 1 + 3\lambda + 2\lambda - 4 - 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$, luego $P = (5, \frac{4}{3}, \frac{-10}{3})$.

c) Tomamos $P_r(1+3\lambda, \lambda, -2-\lambda)$ punto genérico de r expresado como forma paramétrica. Buscamos los puntos P_r tales que

$$d(P_r, \pi) = d(P_r, \pi') \Rightarrow \frac{|1 + 3\lambda + 2\lambda - 4 - 2\lambda - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|2 + 6\lambda + 2\lambda - 2 - \lambda + 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}$$

$$\Rightarrow |3\lambda - 4| = |7\lambda + 4|$$

Esta ecuación tiene dos soluciones

$\Rightarrow 3\lambda - 4 = 7\lambda + 4 \Rightarrow \lambda = -2$

$\Rightarrow 3\lambda - 4 = -7\lambda - 4 \Rightarrow \lambda = 0$

Primera solución para $\lambda = -2 \Rightarrow P_1(-5, -2, 0)$

Segunda solución para $\lambda = 0 \Rightarrow P_2(1, 0, -2)$.

Extraordinaria

Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1,1,1)$ y $Q(0,0,1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.

b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Solución:

a) Las coordenadas de P y Q satisfacen la ecuación de π ya que la última componente de los puntos P y Q es 1,por lo que los dos puntos pertenecen al plano $z = 1$.

b) La recta solución tiene como vector director el mismo de la recta r, $\vec{v} = (1,1,0)$ y como está contenida en el plano $z = 0$ pasará por el punto (0, 0, 0), por lo que su ecuación será

$$(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 0), \lambda \in R$$

.

c) La recta r es $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 1), \lambda \in R$. La recta buscada, s, está contenida en el plano que tiene vector normal $\vec{n} = (1,1,0) \times (0,0,1) = (1,-1,0)$, $y = x$, por tanto su vector director es $v = (1, 1, v_3)$.

Como $\frac{\pi}{4}$ es el ángulo que forman ´ r y s se tiene que $cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|(1,1,v_3)\cdot(1,1,0)|}{|(1,1,v_3)||(1,1,0)|}$ $\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2+v_3^2}\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sqrt{2+v_3^2} = 4$

$\sqrt{2+v_3^2} = 2 \Rightarrow 2 + v_3^2 = 4 \Rightarrow v_3 = \sqrt{4} = \pm\sqrt{2}$.

Por tanto la recta buscada podrá ser

$$s \equiv (x, y, z) = (1+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda\sqrt{2}), \lambda \in \mathbb{R}$$

o

$$s \equiv (x, y, z) = (1+\lambda, 1+\lambda, 1-\lambda\sqrt{2}), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Extraordinaria

Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.

c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

Solución

a) El punto pedido P es la proyección del origen de coordenadas sobre el plano π. Así, usamos la recta con vector $\vec{n}_\pi(1, 3, 2)$ que pasa por $(0, 0, 0)$ y la cortamos con π

$s = \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$, el punto pedido pertenece a π y a s, $P = \pi \bigcap s$. Entonces

$\lambda + 3(3\lambda) + 2(2\lambda) = -14 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P = (-1, -3, -2)$

b)La proyección de la recta eje OZ será una recta en el plano π, para hallarla cortamos el plano π con el plano π' ortogonal a π que contiene al eje OZ.

el vector ortogonal a π' es $\vec{n}'_\pi = \vec{n}_\pi \times d_{OZ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3, -1, 0)$.

La proyección del eje OZ sobre el plano será la recta $s_2 = \begin{cases} x + 3y + 2z + 14 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

c)Sea t la recta buscada. Sabemos que $t \perp r \Rightarrow d_t \perp d_r$ y además t está contenida en π por lo que $d_t \perp n_\pi$. Así pues $d_t = d_r \times n_\pi$ ya que es perpendicular a esos dos vectores.

Hallamos primero el vector director de $r \Rightarrow d_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, 1, 0)$.

Ahora hallamos $d_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2, 0, -1)$. Ahora que ya tenemos el vector director necesitamos un punto de esa recta que será un punto del eje OZ que esté en π, éste punto será de forma $Q = (0, 0, \lambda)$ que cumpla la ecuación de $\pi \Rightarrow 0 + 3 \cdot 0 + 2\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda = -7$. Por lo tanto la recta es $t = \begin{cases} x & = 2\lambda \\ y & = 0 \\ z & = -7 - \lambda \end{cases}, \lambda \in R$