Ejercicios resueltos

Geometría

by S3r4

Evau 2024

2024.Geometría

(Ordinaria) Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z=0$.

b) (1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x+z=1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Solución

a) Consideramos el vector $\vec{AB}=(1,1,-1)$. El vector normal $\vec{n}_\pi$ del plano buscado debe ser perpendicular al normal $(0,0,1)$ del plano dado ($z=0$) y al vector $\vec{AB}$.

Por tanto $n_\pi=\vec{AB}\times(0,0,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,-1,0)$

Con esto la ecuación del plano debe ser de la forma $x-y+D=0$ y como pasa por (0, 0, 1) , hallaremos el valor de D sustituyendo las corrdenadas de A enn la ecuaciónndel plano

$\rightarrow D=0$. La ecuación será $\boxed{\pi\equiv \text{x-y}=0}$

b) Los vectores directores del plano $x+z=1$ son perpendiculares a $(1,0,1)$, es decir deben ser de la forma $(a,b,-a)$ ya que $(a,b,-a)(1,0,1)=0$

Así que consideremos que $(a,b,-a)$ sea el vector director de r_1, con a y b no ambos nulos.

La distancia entre r_1 y r_2 es la distancia entre el punto B y la recta r_1 : $d(B,r_1)=\frac{|\vec{AB}\times(a,b,-a)|}{\sqrt{2a^2+b^2}}$

$\vec{AB}\times(a,b,-a)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ a & b & -a \end{vmatrix}=(-a+b,0,b-a)\Rightarrow|\vec{AB}\times(a,b,-a)|=|b-a||(1,0,1)=|b-a|\sqrt{2}$

Por lo que $d(B,r_1)=\frac{|\vec{AB}\times(a,b,-a)|}{\sqrt{2a^2+b^2}}=\frac{|b-a|}{\sqrt{2a^2+b}}\sqrt{2}$

Como $1=d(B,r_1)=\frac{|b-a)|\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+b^2}}\Rightarrow(|b-a|\sqrt{2})^2=(\sqrt{2a^2+b^2})^2\Rightarrow 2b^2+2a^2-4ab=2a^2+b^2\Rightarrow b^2-4ab=0$

De donde se deduce que o bien $b=0$ ó $b=4a$ y en los dos casos $a\neq 0$

Por tanto las soluciones serían las siguientes:

Si $b=0$

$r_1\equiv(x,y,z)=(0,0,1)+\lambda(1,0,-1)$ y $r_2\equiv(x,y,z)=(1,1,0)+\mu(1,1,-1)$ $(\lambda,\mu\in R)$.

Si $b=4a$

$r1:(x,y,z)=(0,0,1)+\lambda(1,4,-1)$ y $r_2\equiv(1,1,0)+\mu(1,4,-1)$, $(\lambda,\mu\in R)$.

(Ordinaria) Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1), P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

b) (1 punto) Dado el punto $Q(3,3,3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

Solución

a) El volumen de un tetraedro cuyas aristas son los vectores u, v, w es un sexto del determinante de esos tres vectores (o, lo que es lo mismo, su producto mixto). En nuestro caso, las aristas son

$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-1)$; $\overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,1)$;$\overrightarrow{P_1P_4} = (2,a-1,2)$

Por lo tanto el volumen es $V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}|-a+9|$

Como $V = 1 = \frac{1}{6}|-a+9| \Rightarrow 6 = |-a+9|$

Por lo que $6 = a - 9 \Rightarrow a = 15$ o bien $6 = -a + 9 \Rightarrow a = 3$

Pero si $a = 15$ la longitud de arista del tetraedro $= \sqrt{2^2 + (15-1)^2 + 2^2} > 10$ y no cabria en impresora, con lo que la solución es $a = 3$

b)Dado el punto Q, podemos sacar otros tres puntos A, B, C del paralelepípedo a partir de

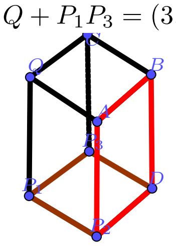
$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-1)$; $\overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,1)$; $\overrightarrow{P_1Q} = (2,2,2)$

$D = P_2 + P_2D = P_2 + P_1P_3 = (2,1,0) + (0,2,1) = (2,3,1)$

$A = Q + QA = Q + P_1P_2 = (3,3,3) + (1,0,-1) = (4,3,2)$

$B = A + AB = A + P_1P_3 = (4,3,2) + (0,2,1) = (4,5,3)$

$C = Q + QC = Q + P_1P_3 = (3,3,3) + (0,2,1) = (3,5,4)$



Modelo Sea la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \lambda \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$ y el plano $\pi : z = 0$.

a) (1 punto) Halle una ecuación de la recta paralela al plano π cuya dirección sea perpendicular a r y que pase por el punto $(1, 1, 1)$.

b) (1.5 puntos) Halle una ecuación de una recta que forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con la recta r, que esté contenida en el plano π y pase por el punto $(0, 0, 0)$.

Solución

a)La recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \lambda \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$ tiene por vector director $\overrightarrow{v}_r = (1, 0, 0)$ y el plano$\pi : z = 0$. tiene por vector normal $n_\pi = (0, 0, 1)$

La recta r y el plano π son paralelos

Como $(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow n_\pi \perp v_r \Rightarrow r \,||\, \pi$

La recta s paralela al plano π debe ser perpendicular al vector normal del plano, como también debe ser perpendicular a la recta r nos sirve como vector director de la recta s el

producto vectorial del vector normal n_π del plano y el director de la recta r v_r

$v_s = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = -\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$

La recta pedida es $s = (x, y, x) = (1, 1, 1) + \lambda(0, -1, 0)$

b)Como la recta t buscada está contenida en el plano su vector director $(u_t) = (a, b, c)$ debe ser perpendicular al vector normal del plano $\overrightarrow{n_\pi}$, por lo que su producto escalar debe ser nulo

$(a, b, c)(0, 0, 1) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow u_t = (a, b, 0)$

Como la recta t forma $\pi/4$ con la recta r

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(a,b,0)(1,0,0)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{1^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Con lo que $\frac{2}{4} = \frac{a^2}{a^2+b^2} \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 = 4a^2 \Rightarrow 2b^2 = 2a^2 \Rightarrow a = \pm b$

Así pues $\left\{ \begin{array}{lll} \text{Si } a = b & \Rightarrow & t = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) \\ \\ Si\ a = -b & \Rightarrow & t = (0, 0, 0) + \mu(1, -1, 0) \end{array} \right.$

Modelo

Dados los puntos $A(0,0,1), B(1,1,0), C(1,0,-1), D(1,1,2)$, se pide:

a) (0.75 puntos) Comprobar que los puntos A, B, C y D no son coplanarios y hallar el volumen del tetraedro que forman.

b) (0.75 puntos) Hallar el área del triángulo que forman los puntos B, C y D y el ángulo $\hat{B}$ del mismo.

c) (1 punto) Hallar uno de los puntos E del plano determinado por A, B y C tales que el cuadrilátero $ABCE$ sea un paralelogramo. Hallar el área de dicho paralelogramo.

Solución

a)Para ver si son coplanarios ,hallamos $\overrightarrow{AB} = (1,1,0)-(0,0,1) = (1,1,-1)$;$\overrightarrow{AC} = (1,0,-1)-(0,0,1) = (1,0,-2)$,$\overrightarrow{AD} = (1,1,2)-(0,0,1) = (1,1,1)$ y evaluamos su producto mixto

$[AB, AC, AD] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ son indepentes linealmente (libres)$\Rightarrow A, B, C, D$ no son coplanarios y $V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-2| = \frac{1}{3}u^3$

b)$\overrightarrow{BC} = (1,0,-1)-(1,1,0) = (0,-1,-1)$

$\overrightarrow{BD} = (1,1,2)-(1,1,0) = (0,0,2)$

Área$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} \times BD| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-2,0,0)| = 1u^2$

$cosB = \frac{\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BD}|} = \frac{(0,-1,-1)(0,0,2)}{\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+2^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ Con lo que $\hat{B} = \frac{3\pi}{4}$

c)Considero el caso en el que los puntos A, B y C son consecutivos $E = A + \overrightarrow{AE} = A + \overrightarrow{BC} = (0,0,1) + (0,-1,-1) = (0,-1,0)$

Área$=|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}| = |(-2,1,-1)| = \sqrt{6}u^2$

Extraordinaria

Sean los puntos $P(1,-1,3)$ y $Q(2,1,-1)$:

a) (1 punto) Determine una ecuacion del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) (1.5 puntos) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x-2=y=z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Solución

a) El plano pedido es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por el punto medio, M , del segmento que une P y Q. Se

tiene que $M = \frac{(1,-1,3)+(2,1,-1)}{2} = (\frac{3}{2},0,1)$ y $\overrightarrow{PQ} = (2,1,-1)-(1,-1,3) = (1,2,-4)$, con lo que el plano pedido es $x+2y-4z+D=0$.

Para hallar el valor de D sustituimos el valor de $M = (\frac{3}{2},0,1)$ en esa ecuación $\frac{3}{2}+2\cdot 0-4\cdot 1+D=0 \Rightarrow D = -\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2}$.

El plano tiene pur ecuación $x+2y-4z+\frac{5}{2}=0$.

b) $(x,y,z)=(2+\lambda,\lambda,\lambda)$ y $A\in r$

Se tiene que $|PQ|^2=21$. Sea A el punto buscado, tenemos que $|AP|^2+|AQ|^2=13$.

Buscamos el valor de λ tal que

$|(2+\lambda,\lambda,\lambda)-(1,-1,3)|^2+|(2+\lambda,\lambda,\lambda)-(2,1,-1)|^2 = |(1+\lambda,\lambda+1,\lambda-3)|^2+|(\lambda,\lambda-1,\lambda+1)|^2 =$

$(1+\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(\lambda-3)^2+\lambda^2+(\lambda-1)^2+(\lambda+1)^2 = 6\lambda^2-2\lambda+13=13.$

$\Rightarrow \lambda^2(6\lambda-2)=0 \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda & = & 0 \\ \lambda & = & \frac{1}{3} \end{array} \right.$

Por lo que el punto buscado es $A=(2+\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})=(\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

Extraordinaria

Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas: $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}$,$s \equiv \begin{array}{c} x-y=5 \\ x+z=3, \end{array}$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

b) (1.5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

Solución

a)En paramétricas $r \equiv \left\{ \begin{array}{lll} x & =2 & +3\alpha \\ y & =-1 & -\alpha \\ z & = & +\alpha \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{lll} x & = & \beta \\ y & =-5 & +\beta \\ z & =3 & -\beta \end{array} \right.$

y$\overrightarrow{P_sP_r} = (2,-1,0)-(0,-5,3) = (2,4,-3)$

Tenemos que el prducto mixto de $[u_r, u_s, P_rP_S] = \left| \begin{array}{ccc} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{array} \right| = 4 \neq 0 \Rightarrow$ r y s se cruzan

$u_r \times u_s = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| = (0,4,4) \Rightarrow |u_r \times u_s| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$distancia = \frac{|[u_r,u_s,P_rP_S]|}{|u_r \times u_s|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b)Buscamos un plano $\pi \perp r$ tal que $P \in \pi$:

$\pi : 3x-y+z+D=0 \Rightarrow 15+1+2+D=0 \Rightarrow a=-18 \Rightarrow \pi : 3x-y+z-18=0$

Calculamos el punto de corte Q de r con π usando las ecuaciones paramétricas:

$3(2+3\lambda)-(-1-\lambda)+\lambda-18=0 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow Q(5,-2,1)$

La recta buscada t pasa por P y Q, por lo que $u_t = PQ = (5,-2,1)-(5,-1,2) = (0,-1,-1)$

$t = P + \lambda\overrightarrow{PQ} = (5,-1,2) + \lambda(0,-1,-1)$

En paramétricas$t \equiv \left\{ \begin{array}{lll} x & =5 & \\ y & =-1 & -\lambda \\ z & =2 & -\lambda \end{array} \right.$

Coincidencias

Dados el punto $P(-1,2,6)$, el plano $\pi : 3x - 2y + z - 5 = 0$ y la recta $s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-1}$:

a) (1.5 puntos) Halle una ecuación de la recta que pasa por P, es secante a s y paralela al plano π.

b) (1 punto) Halle el simetrico del punto P respecto al plano π.

Solución

a) Llamemos r a la recta pedida

Como tenemos un punto de la recta r, será suficiente calcular el vector director de la recta solución r.

El vector normal al plano es $n_\pi = (3, -2, 1)$.

Los puntos de la recta s son de la forma $P_s(-1+2\alpha, 2+\alpha, -\alpha)$.

El vector $v_r = \overrightarrow{PP_s} = (2\alpha, \alpha, -\alpha - 6)$ es perpendicular al vector normal al plano, por lo que el producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0$.

$(2\alpha, \alpha, -\alpha - 6)(3, -2, 1) = 0 \Rightarrow 6\alpha - 2\alpha - \alpha - 6 = 0$

$3\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 2$

Obtenemos el punto de intersección de la recta s con la recta pedida, $Ps = (-1 + 2 \cdot 2, 2 + 2, -2) = (3, 4, -2)$.

Calculamos $v_r = PP_s = (4, 2, -8)$.

Podemos proprocionarlo $v_r = (2, 1, -4)$

La ecuacion paramétrica de la recta pedida es: $s \equiv \begin{cases} x & = -1 & +2\alpha \\ y & = 2 & +\alpha \\ z & = 6 & -4\alpha \end{cases}$

b) Sea t la recta perpendicular al plano dado $t \equiv (x, y, z) = (-1 + 3\alpha, 2 - 2\alpha, 6 + \alpha), \alpha \in R$.

El punto $Q = t \bigcap \pi$, para hallarlo sutituimos $(-1 + 3\alpha, 2 - 2\alpha, 6 + \alpha)$ que son los puntos genericos de t en la ecuación de π

es

$3(-1 + 3\alpha) - 2(2 - 2\alpha) + (6 + \alpha) - 5 = 0 \Rightarrow 9\alpha + 4\alpha + \alpha - 3 - 4 + 6 - 5 = 0$

$14\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{7}$

Entonces el punto de corte es $Q = (\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7})$

Como Q es el punto medio de P y su simetrico P', las coordenadas del simétrico son

$Q = \frac{P+P'}{2} \Rightarrow (\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}) = \frac{(-1,2,6)+P'}{2}$

Despejando

$P' = 2(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}) - (-1, 2, 6) = (\frac{4}{7} + 1, \frac{16}{7} - 2, \frac{90}{7} - 6)$

$$P' = (\frac{11}{7}, \frac{2}{7}, \frac{48}{7})$$

En el punto $A(1,0,-1)$ se encuentra un emisor láser que dispara un rayo de luz (unidimensional) apuntando hacia el punto $B(3,1,0)$. Dicho rayo incide en un punto P del plano π:

$x = 2 - \alpha$
$y = 2 + 2\beta$ $\alpha, \beta \in R$. Llamamos al punto P el punto de incidencia del rayo
$z = \alpha - 2\beta$

de luz sobre el plano π. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz.

b) (0.75 puntos) Calcular la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P.

c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que debería girar el emisor para que la distancia entre el y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima.

Solución

El plano de incidencia contiene al punto $A = (1,0,-1)$ y tiene como vectores directores el normal al plano $\pi, \overrightarrow{n_\pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)$, y el vector $\overrightarrow{AB} = (3,1,0) - (1,0,-1) = (2,1,1)$, por lo que el plano debe ser

tener por ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha + 2\beta \\ y = 0 + \alpha + \beta \\ z = -1 + \alpha + \beta \end{array} \right. \quad \alpha, \beta \in R.$

b) El punto P es la interseccion de la recta s que pasa por A y tiene vector director $\overrightarrow{AB}, s \equiv (x,y,z) = (1+2\alpha, \alpha, -1+\alpha)$,

con el plano $\pi, x + y + z = 4$.

Por lo que Así, si sustituimos $(1+2\alpha, \alpha, -1+\alpha)$, en π

$(1+2\alpha) + \alpha + (-1+\alpha) = 4 \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1$

Así pues el punto de incidencia es $P(3,1,0)$

La distancia desde el emisor hasta P es $d = |\overrightarrow{AP}| = |(2,1,1)| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$.

c) Para que la distancia sea mínima, la luz debe incidir perpendicularmente. Así, el emisor debe girar el ángulo que forman la normal del plano π y el vector AB,

$\alpha = arccos\frac{|(-1,-1,-1)\cdot(2,1,1)|}{\|(-1,-1,-1)\|\|(2,1,1)\|} = arccos\frac{|-2-1-1|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = arccos\frac{4}{\sqrt{18}} = arccos\frac{4\cdot3\sqrt{2}}{18} =$
$= arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} = \approx 19{,}5^o$