S3r4 | 2022

MATEMÁTICAS : Bachillerato II

Geometría

Ejercicios resueltos

by Sera

1. **Calcular los vectores de longitud uno ortogonales a los vectores $(2,-2,3),(3,-3,2)$.**

   Solución:

   Se llamamos $\vec{u}=(a,b,c)$ a un vector perpendicular a los dos a la vez, debe suceder que

   $$\vec{u}\cdot(2,-2,3)=0$$

   y

   $$\vec{u}\cdot((3,-3,2)=0$$

   luego $\begin{matrix} 2a-2b+3c=0 \\ 3a-3b+2c=0 \end{matrix}$.

   De donde $\begin{matrix} 6a-6b+9c=0 \\ 6a-6b+4c=0 \end{matrix}$.

   Por lo que $c=0$ y $a=b$, así que la solución es

   $$\vec{u}=(\frac{a}{\sqrt{2a^2}},\frac{a}{\sqrt{2a^2}},0)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

   ó

   $$\vec{u}=(\frac{-a}{\sqrt{2a^2}},\frac{-a}{\sqrt{2a^2}},0)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

2. **Encontrar las ecuaciones implícitas y la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:(x,y,z)=(-1,2,0)+t(1,-1,3)$ y al punto $Q(2,1,5)$.**

   Solución :

   Como el punto Q no pertenece a la recta, el plano quedará determinado por un punto, por ejemplo $Q(2,1,5)$ o un punto $P(-1,2,0)$ de la recta, un vector director de la recta $\vec{v}=(1,\ -1,\ 3)$ que será paralelo al plano y el vector $\overrightarrow{PQ}=(3,-1,5)$.

   Las ecuaciones paramétricas del plano serán: $\begin{cases} x=-1+t+3s \\ y=2-t-s \\ z=0+3t+5t \end{cases}$

   La ec. implícita será: $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -2x+4y+2z-10=0$

   o si simplificamos:

   $$-x+2y+z-5=0$$

3. **Halla un plano paralelo a $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$ y que pase por el punto $P(5, 0, 1)$**

   Solución:

   Si buscamos otro plano π' de modo que $\pi // \pi'$, los vectores normales también serán paralelos y podemos usar el mismo: $\vec{n}_\pi = (2\ , -1,\ 3) = \vec{n}_{\pi'}$ luego $\pi^{'}$: $2x - y + 3z + D = 0$.

   Para hallar D utilizaremos que P$\in \pi^{'} \Rightarrow 2{\cdot}5 - 0 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -13$, y el plano buscado es

$$\pi' : 2x - y + 3z - 13 = 0$$

4. **Estudiar la posición relativa de los planos** $\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t + s \\ y = \quad -2t \\ z = \qquad t - s \end{cases}$ **y** $\pi_2 : x + 2y + z + 3 = 0$

   Solución:

   Calculamos la ec. general de π_1: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2x + 4y + 2z - 2 = 0$.

   Las ecuaciones de los dos planos en implícitas son:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z - 2 = 0 \\ x + 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

   $\Rightarrow$

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} \neq \frac{-2}{3}$$

   $\Rightarrow$ los planos son paralelos y distintos.

5. **Estudiar la posición relativa de los planos según los valores del parámetro m:** $\begin{cases} \mathbf{mx} + y + z = 1 \\ x + \mathbf{my} + z = m \\ x + y + \mathbf{mz} = m^2 \end{cases}$

   Solución:

   $M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$; $M^* = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{pmatrix}$;

   $|\mathrm{M}| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$

   - Si m $\neq 1$ y m $\neq -2$, $rango(M) = rango(M^*) = 3 \Rightarrow$ los tres planos se cortan en un punto
   - Si $m = 1$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

- $rango(M) = rango(M*) = 1 \Rightarrow$ los tres planos coinciden.

- Si $m = -2$;
  - $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(M) = 2$
  - $M^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$

  $\Rightarrow rango(M^*) = 3$

$Rango(M) = 2 \neq rango(M)^* = 3 \Rightarrow$ los tres planos no tienen ningún punto en común.
Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, los planos se cortan dos a dos en una recta.

6. **Estudiar la posición relativa de la recta y el plano siguientes:** $\begin{cases} r : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \\ \pi : x + y - 3z = 1 \end{cases}$

   Solución:

   Las ecuaciones implícitas de la recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ son: $r : \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$ y el sistema queda de la siguiente forma $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - z = 1 \\ x + y - 3z = 1 \end{cases}$.

   Como rango M = rango $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 2$ y $rango(M^*) = rango \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible $\Rightarrow$ la recta y el plano son paralelos.

7. **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,1,-3)$ y es perpendicular al plano: $x-2y+z-2=0$.**

   Solución:

   Un vector director de la recta será paralelo al vector normal del plano: $\vec{n}=(1,\ -2,\ 1)$ por lo tanto la ecuación de la recta será:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$$

8. **Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto $A(0,-2,1)$ y es perpendicular a la recta r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$**

   Solución:

   El vector normal del plano será paralelo al vector director de la recta, por lo tanto podemos tomar como vector normal $\vec{n}=(2,3,1)\Rightarrow \pi: 2x+3y+z+D=0$ y como el punto $A(0,-2,1)$ pertenece al plano:

$$-6+1+D=0\Rightarrow D=5$$

   $\Rightarrow$

$$Luego\ \pi: 2x+3y+z+5=0$$

9. **Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(0,1,3)$ y es perpendicular al plano $2x-y+z-4=0$**

   Solución:

   El plano buscado es paralelo a los vectores $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 0,\ 3)$ y $\vec{v}=(2,\ -1,\ 1)$, vector normal del plano dado. Por lo tanto quedará determinado por A, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ y $\vec{v}$ y su ecuación será: $\begin{cases} x=2-2t+2s \\ y=1 \qquad -s \\ z=\quad 3t+s \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & x-2 \\ 0 & -1 & y-1 \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix}=0\Rightarrow 3x+8y+2z-14=0$$

10. **Halla la ecuación implícita del plano que es perpendicular al plano $\pi:\ 5x-y+4z=2$ y contiene la recta r: $\frac{x}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-4}{1}$.**

    Solución:

    Como el plano α que buscamos es perpendicular al plano π, el vector normal de π, $\vec{n}=(5,\ -1,\ 4)$ será paralelo al plano α. Como el plano α contiene a la recta r, su vector director $\vec{v}=(3,\ -2,\ 1)$ será paralelo a α,

y por lo tanto podemos tomar como vector característico de α al vector
$\vec{n}' = \vec{v} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-7,\ -7,\ 7)$ o al vector $(-1,\ -1,\ 1)$.

El plano $\alpha : -x - y + z + D = 0$ contiene a la recta r y por lo tanto a todos sus puntos, entre ellos está (0, 3, 4) $\Rightarrow -3 + 4 + \text{D} = 0 \Rightarrow \text{D} = -1 \Rightarrow$ el plano buscado tiene de ecuación:

$$-x - y + z - 1 = 0$$

11. **Halla el punto simétrico de** $P(-1, 2, 5)$ **respecto del plano** $x + 2y + z = 2$

Solución:

Se halla la recta r que pasa por el punto P y es perpendicular al plano

Un vector característico o normal al plano será $(1, 2, 1)$, el cual tendrá la misma dirección que los vectores directores de la recta r, por lo tanto podemos coger como vector director de r a $(1,\ 2,\ 1)$.

La recta r que pasa por P y es perpendicular al plano será: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$

Se calcula el punto M de intersección de r: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$ y del plano $x + 2y + z = 2$:

$(-1 + t) + 2(2 + 2t) + (5 + t) = 2 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(-2, 0, 4)$

Si P´(x, y, z) es el punto simétrico de $P(-1, 2, 5)$ respecto del plano, $M(-2, 0, 4)$ será el punto medio del segmento PP´.

Hallamos x, y, z

$\left.\begin{array}{lll} \frac{-1+x}{2} = -2 & \Rightarrow & x = -3 \\ \frac{2+y}{2} = 0 & \Rightarrow & y = -2 \\ \frac{5+y}{2} = 4 & \Rightarrow & z = 3 \end{array}\right\}$. El punto buscado P´es: P´$(-3, -2, 3)$

12. **Halla el punto simétrico de** $P(1, 2, 3)$ **respecto de la recta** $x = y = \frac{z+5}{3}$.

Solución:

Sea Qel simétrico de P respecto de la recta r.

Hallaremos el plano π que contiene a P y es perpendicular a r. El vector característico de π es paralelo a la recta, por lo tanto podemos tomar $\vec{n} = (1,\ 1,\ 3)$ y la ecuación del plano es de la forma $x + y + 3z + D = 0$, como contiene al punto $P(1, 2, 3) \Rightarrow 1 + 2 + 9 + D = 0 \Rightarrow D = -12 \Rightarrow \pi : x + y + 3z - 12 = 0$.

Obtenemos el punto M intersección de π y r (r en paramétricas)

$$\left.\begin{array}{r} r:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-5+3t \end{cases} \\ \pi: x+y+3z-12=0 \end{array}\right\} t+3(-5+3t)-12=0 \Rightarrow 11t-27=0 \Rightarrow t=\tfrac{27}{11}$$

$$x=\frac{27}{11},\ y=\frac{27}{11},\ z=-5+3\frac{27}{11}=\frac{26}{11}$$

Por lo tanto, es $M\left(\frac{27}{11},\ \frac{27}{11},\ \frac{26}{11}\right)$

Si $Q(a,b,c)$ es el simétrico de P respecto de r, M es el punto medio del segmento PQ, luego:

$\frac{1+a}{2}=\frac{27}{11}\Rightarrow a=\frac{43}{11}$; $\frac{2+b}{2}=\frac{27}{11}\Rightarrow b=\frac{32}{11}$; $\frac{3+c}{2}=\frac{26}{11}\ \Rightarrow\ c=\frac{19}{11}$

Por lo tanto el punto simétrico de P respecto de r es $Q\ \left(\frac{43}{11},\ \frac{32}{11},\ \frac{19}{11}\right)$

13. **Hallar la proyección ortogonal del punto $P(1,0,4)$ sobre el plano:** $2x-y+z+2=0$

Solución: Para hallar Q(proyección ortogonal de P sobre el plano π) primero hallaremos la ecuación de la recta r perpendicular al plano que pasa por P y después obtendremos Qcomo punto de corte de dicha recta r con el plano π.

Los vectores directores de la recta que pasa por el punto P(1, 0, 4) y es perpendicular al plano tendrán la misma dirección que los vectores normales del plano. Por lo tanto podemos tomar como vector director de la recta: $\vec{v}=(2,\ -1,\ 1)$ y su ecuación será: $r:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=4+t \end{cases}$.

El punto de intersección de y π es:

$$2(1+2t)-(-t)+(4+t)+2=0 \Rightarrow 2+4t+t+4+t+2=0 \Rightarrow t=\frac{-4}{3}$$

Luego el punto Qtiene de coordenadas $Q\ \left(-\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)$.

14. **Hallar la ecuación de la proyección de la recta $r\equiv\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$ sobre el plano π de ecuación: $x+2y-z+4=0$.**

Solución: La proyección de la recta r sobre π se obtiene calculando la proyección ortogonal de dos puntos de r sobre el plano.

Como r y π se cortan en un punto M, uno de los puntos puede ser M.

$$r:\begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=3t \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \pi: x+2y-z+4=0 \\ \vec{n}=(1,\ 2,\ -1) \end{array}$$

Intersección de r y π: $2t+2(1+t)-3t+4=0 \Rightarrow M(-12,-5,-18)$

Un punto de r es $P(0,1,0)$. Vamos a hallar su proyección sobre π, para elle calculamos la recta perpendicular a π que pasa por P: $\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$.

El punto P´ proyección de Psobre el plano será la intersección de esta recta con π:

$2t+2(1+2t)+t+4=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow P\acute{}(-1,-1,1)$.

La recta buscada es la que pasa por P´y M y su ecuación será: $\left.\begin{array}{l} M(-12,\ -5,\ -18) \\ \overrightarrow{MP'} = (11,\ 4,\ 19) \end{array}\right\}$

$\frac{x+12}{11} = \frac{y+5}{4} = \frac{z+18}{19}$

15. **Dados el punto A(0, 1, −3) y la recta r determinada por los puntos B(0, 0, 1) y C(2,−1, 3), se pide:**

    a) **Ecuación de la recta r.**

    b) **Ecuación general del plano determinado por A y r.**

    c) **Halla la proyección ortogonal del punto A sobre la recta r.**

    Solución:

    La recta r determinada por los puntos B(0, 0, 1) y C(2,−1, 3): es la determinada por un punto , por ejemplo, B(0, 0, 1) y es paralela al vector $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ = (2, −1, 2) y por lo tanto sus ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 1+2t \end{cases}$

    El plano buscado será el determinado por los puntos A, B y C. En vector característico o normal del plano será perpendicular a los vectores $\overline{\mathrm{BA}}$= (0, 1, −4) y $\overline{\mathrm{BC}}$= (2, −1, 2) y por lo tanto $\vec{n}$= $\overline{\mathrm{BA}}$ x $\overline{\mathrm{BC}}$= $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ = $-2i-8j-2k, \Rightarrow -x-8y-2z+D=0$ y como, por ejemplo, el punto B(0, 0, 1) pertenece al plano $-2+D=0 \Rightarrow D=2$ y la ecuación implícita del plano es: $-2x-8y-2z+2=0$ o si simplificamos x + 4y + z − 1 = 0

    Hallamos el plano que pasa por A y es perpendicular a r. La intersección de dicho plano con la recta r nos dará la proyección de A sobre r

    El vector normal del plano será paralelo al vector director de la recta, por lo tanto podemos tomar como vector normal $\vec{n}=(2,\ -1,\ 2) \Rightarrow$ 2x − y + 2z + D = 0 y como el punto $A(0,1,-3)$ pertenece al plano:

    $-1-6+D=0 \Rightarrow D=7 \Rightarrow \pi: 2x-y+2z+7=0$

    Obtenemos el punto P proyección de A sobre r como intersección de r con π:

    $\left.\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 1+2t \end{cases}\right\} \pi: 2x-y+2z+7=0 \quad 2(2t)-(-t)+2(1+2t)+7=0 \Rightarrow$

    $9t+9=0 \Rightarrow t=-1$ y por lo tanto el punto es $(-2,1,-1)$

16. **Hallar la ecuación del plano paralelo a la recta r: $\frac{2x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{1}$ y que contiene a la recta $s:(1-\lambda, 2\lambda, 1)$.**

    Solución:

La ecuación en forma continua de la recta r es $\frac{x-\frac{1}{2}}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ y un vector paralelo a la recta $\vec{v} = (0,\ 2,\ -1)$. La ecuaciones paramétricas de la recta s son $\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$, un punto de ella es $A(1,0,1)$ y un vector director

$\vec{w}$ =(−1, 2, 0).

Los vectores directores de las rectas serán paralelos al plano y un punto del plano es A. El plano queda determinado por A(1, 0, 1), $\vec{v} = (0,\ 2,\ -1)$ y $\vec{w}$ =(−1, 2, 0) y sus ecuaciones paramétricas serán: $\begin{cases} x = 1-s \\ y = 2t+2s \\ z = 1-t \end{cases}$.

Otra forma: el vector normal del plano será perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ $\Rightarrow$ $\vec{n} = \vec{v}$ x $\vec{w}$= (2, 1, 2) $\Rightarrow$ la ecuación general o implícita del plano es de la forma $2x+y+2z+D=0$ y como $A(1,0,1)$ pertenece al plano $2+2+D=0 \Rightarrow D=-4 \Rightarrow$ la ecuación del plano es $2x+y+2z-4=0$

17. **Dada la recta r: $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ y los puntos A(1, 1, 2) y B(−1, 3, 0), se pide:**

    a) **La ecuación en forma continua de la recta s paralela a r que pasa por el punto medio de AB.**

    b) **Halla el punto de r cuya distancia a A sea mínima.**

    Solución:

    Punto medio del segmento AB: M (0, 2, 1). El vector director $\vec{w}$ de la recta s paralela a r tendrá la misma dirección que el de r: $\vec{v}$= (2, −2, −1), por lo tanto podemos tomar $\vec{w}=\vec{v}$.

    La ecuación en forma continua de la recta s paralela a r que pasa por el punto medio de AB será: $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

    Las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x = 4+2t \\ y = -2t \\ z = 1-2t \end{cases}$ y un punto cualquiera de r será de la forma: P (4+2t, −2t, 1−2t) .

    El punto P de r cuya distancia a A sea mínima estará en la recta perpendicular a r que pasa por A $\Rightarrow \overrightarrow{AP}$ será perpendicular a $r \Rightarrow \overrightarrow{AP}$ será perpendicular a $\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0$. $\overrightarrow{AP}$= (2t + 3, −2t −1, −t −1)

    $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 4t+6+4t+2+t+1 = 9t+9 = 0 \Rightarrow$ t = −1 $\Rightarrow P(2,\ 2,\ 2)$

18. **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(−2, 1, 0) y corta perpendicularmente a la recta** $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

    Solución: Hallamos el plano π que pasa por P y es perpendicular a r: El vector característico del plano será paralelo al vector director de r por lo tanto podemos tomar $\vec{n} = \vec{v} = (2,\ 1,\ 1)$ $\Rightarrow$ 2x + y + z +

D = 0, como pasa por el punto P(−2, 1, 0) ⇒ −4 + 1 + D = 0 ⇒ D = 3 ⇒ $\pi : 2x + y + z + 3 = 0$

Hallamos M, punto de intersección de π y r. $\begin{cases} r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \\ \pi : 2x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

4t + t + t + 3 = 0 ⇒ $t = \frac{-1}{2}$ ⇒ $M\left(-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

La recta buscada es la que pasa por P(−2, 1, 0) y $M\left(-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ ⇒

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1/2} = \frac{z}{-1/2}$$

19. **Determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a las rectas de ecuaciones.** r : $\frac{x-6}{2} = \frac{y-9}{3} = z - 3$ **y** $s : \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

    Solución:

    La recta está determinada por el origen de coordenadas O(0, 0, 0) y un vector director $\vec{u}$ que sea perpendicular a $\vec{v} = (2,\ 3,\ 1)$ y $\vec{w} = (4,\ -1,\ 1)$, vectores directores de las rectas r y s. ⇒ $\vec{u} = \vec{v}\ x\ \vec{w}$ =(4, 2, −14). Por lo tanto la ecuación será: $\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-14}$.

20. **Determina el valor de "a" para que la recta** r **de ecuaciones:** $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y + 2z = 5 \end{cases}$ **sea paralela al plano de ecuación: x + 2y −2az = 5**

    Solución: Un vector característico o normal del plano es: $\vec{n} = (1,\ 2,\ -2a)$.

    El vector $\vec{v}$ lo podemos obtener poniendo r en paramétricas: $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y + 2z = 5 \end{cases}$

    $\Rightarrow y = 5 - 2z,\ x = -3 - 2y = -3 - 10 + 4z = -13 + 4z \Rightarrow$ $\begin{cases} x = -13 + 4t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$ $\vec{v} = (4,\ -2,\ 1)$.

    La condición de paralelismo de r y π es que $\vec{n}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{n} = 4 - 4 - 2a = 0 \Rightarrow$ a = 0.

21. **Dadas las rectas $\mathbf{r_1}$:** $\begin{cases} 2x+3y-4z=-1 \\ x-2y+z=3 \end{cases}$ **y $\mathbf{r_2}$:** $\begin{cases} 3x+y-3z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

a) **Probar que se cortan**

b) **Dar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.**

Solución:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x+3y-4z=-1 \\ x-2y+z=3 \\ 3x+y-3z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\left(\begin{array}{c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \end{array} \begin{matrix} \\ | \\ | \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right)}^{A^*} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -6 & -7 \\ 0 & 7 & -6 & -7 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Rango A = rango A* = 3 = número de incógnitas (sistema compatible determinado) $\Rightarrow$ las dos rectas se cortan en un punto que es la solución del sistema: $z=\frac{7}{18}$, $y=\frac{-2}{3}$, $x=\frac{23}{18}\Rightarrow$ El punto es $P\left(\frac{23}{18},\frac{-2}{3},\frac{7}{18}\right)$

b)El plano que contiene a las dos rectas queda determinado por un vector normal al mismo, que será perpendicular a los vectores directores de r_1 y r_2, y un punto $P\left(\frac{23}{18},\frac{-2}{3},\frac{7}{18}\right)$

Como las rectas vienen dadas como intersección de dos planos, su vector director será perpendicular a los vectores normales de los dos planos que determinan la recta.

Vector director de r_1: $\vec{v}_1 //\ (2,3,-4)x(1,-2,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ =−5i − 6j − 7k, puedo tomar como $\vec{v}_1=(-5,-6,-7)$ o cualquiera que sea proporcional a él.

Vector director de r_2: $\vec{v}_2 //$ (3, 1, −3) x (1, 1, 1) = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 4i − 6j + 2k, puedo tomar como $\vec{v}_2$= (2, −3, 1)

El vector normal al plano que contiene a las rectas $\vec{n}$ es perpendicular a los vectores directores de las rectas por lo tanto $\vec{n}\ //\ \vec{v}_1$ x $\vec{v}_2$= $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & -6 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ $=-27i-9j+27k$, podemos tomar como $\vec{n}$ = (3, 1, −3).

La ecuación del plano es de la forma 3x + y −3z + D = 0, como contiene al punto $P\left(\frac{23}{18},\frac{-2}{3},\frac{7}{18}\right)$ $3\cdot\frac{23}{18}-\frac{2}{3}-3\cdot\frac{7}{18}+D=0\Rightarrow\frac{36}{18}+D=0\Rightarrow$ D = −2 $\Rightarrow$ la ecuación del plano es 3x + y −3z − 2 = 0.

22. **Demostrar que las rectas r:** $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ **y s:** $\begin{cases} x - \mathbf{ay} = 0 \\ z = 5 \end{cases}$ **se cruzan, cualquiera que sea el valor del parámetro a.**

Solución:

Ecuaciones paramétricas de r: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, un punto A (0, 0, 0) y un vector director $\vec{v}$=(1, 0, 0)

Ecuaciones paramétricas de s: $\begin{cases} x = a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 5 \end{cases}$, un punto B(0, 0, 5) y un vector director $\vec{w}$=(a, 1, 5)

Cualquiera que sea el valor de a $\vec{w} \neq$ t $\vec{v}$, rango { $\vec{v}$, $\vec{w}$} = 2, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tiene distinta dirección, por lo tanto las rectas se cortan o se cruzan.

Consideremos el vector $\overrightarrow{AB}$=(0, 0, 5), si det ($\vec{v}$, $\vec{w}$, $\overrightarrow{AB}$) = 0 los tres vectores serán linealmente dependiente ⇒ están en el mismo plano ⇒ las rectas se cortan. Si det ($\vec{v}$, $\vec{w}$, $\overrightarrow{AB}$) $\neq 0$ los tres vectores serán linealmente independientes ⇒ las rectas no estarán en el mismo plano ⇒ se cruzan.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, el determinante es distinto de cero para cualquier valor de a ⇒ las recta se cruzan.

23. **Halla el ángulo que forman los planos: x + y + z = 0 y x − 2y + 3z + 4 = 0**

Solución:

El vector característico de x + y + z = 0 es $\vec{n} = (1,\ 1,\ 1)$

El vector característico de x − 2y + 3z + 4 = 0 es $\vec{n'} = (1,\ -2\ ,\ 3)$

Cos $\alpha = \frac{|\ \vec{n}\cdot\vec{n}'\ |}{|\ \vec{n}\ |\cdot|\ \vec{n}'\ |} = \frac{|\ 1-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{42}} \Rightarrow \alpha =$ arc cos $\frac{2}{\sqrt{42}}$

24. **¿Cuál es el ángulo que determinan la recta** $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ **y el plano x + y − z + 1 = 0**

Solución: Un vector director de la recta $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 & \vec{n} = (1,\ -2,\ 0) \\ y - 3z + 1 = 0 & \vec{n}' = (0,\ 1,\ -3) \end{cases}$

es $\vec{v} = \vec{n}\ x\ \vec{n}'$

$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6i + 3\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{v} = (6,\ 3,\ 1).$

Un vector característico del plano x + y − z + 1 = 0, es $\vec{n} = (1,\ 1,\ -1)$

Sen $\alpha = \frac{|\ \vec{v}\cdot\vec{n}\ |}{|\ \vec{v}\ |\ |\ \vec{n}\ |} = \frac{|\ 6+3-1\ |}{\sqrt{46}\cdot\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{138}} \Rightarrow \alpha =$ arc sen $\frac{8}{\sqrt{138}}$

25. **Hallar el ángulo que forman el plano π_1 determinado por las rectas:** $r : x = \frac{y}{3} = \frac{3-z}{2}$ **y** $s : \begin{cases} x = 1+t \\ y - 1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ **con el plano** π_2 **de ecuación.** $2x - y + z = 1$**.**

   Solución:

   El plano π_1 quedará por un punto $(0,0,3)$ de r y un vector perpendicular a: $\vec{v}$ =(1, 3, −2) y $\vec{w}$=(1, 1, −1), vectores directores de r y s respectivamente:

   $$\vec{n} = \vec{v} x \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{n} = (-1,-1,-2),$$ −x −y −2z + D = 0 , como pasa por el punto (0, 0, 3): −6 + D = 0 ⇒ D = 6 , la ecuación del plano será: −x −y −2z + 6 = 0

   Un vector característico de π_2: $\vec{n}' = (2,\ -1,\ 1)$

   $\text{Cos } \alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|} = \frac{|(-1,\ -1,\ -2)\cdot(2,\ -1,\ 1)|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{|-3|}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^{\text{o}}$

26. **Estudia la posición relativa de la recta determinada por los puntos A(1, 2, 3) y B(−2, 1, 4) y el plano $x - 4y - z + 1 = 0$. Calcula la distancia de A y de B a dicho plano.**

   Solución: La recta determinada por los puntos A y B tiene de ecuación: $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

   Sus ecuaciones implícitas son: $\begin{cases} -x+1 = -3y+6 \\ y-2 = -z+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+3y = 5 \\ y+z = 5 \end{cases}$. Para hallar la posición relativa de la recta y el plano estudiaremos el sistema:

   $$\left.\begin{aligned} -x+3y &= 5 \\ y+z &= 5 \\ x-4y-z &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
   $$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$ por lo tanto rango A = 2 ≠ rango A* = 3 ⇒ el sistema es incompatible ⇒ la recta y el plano son paralelos.

   Como la recta y el plano son paralelos ⇒ d(A, π) = d(B,π).

27. **Halla el ángulo formado por la recta r que pasa por los puntos P(0, 0, 0) y Q(1, 1, 1), y la recta s:** $\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$**.**

   Solución: El vector $\vec{v} = \overrightarrow{\text{PQ}}$ =(1, 1, 1), es un vector director de la recta r.

   Las ecuaciones paramétricas de s : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{w}$ =(1, 0, 0) es un vector director de s.

   $\cos \alpha = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \text{arc cos } \frac{\sqrt{3}}{3}$

28. **Halla el punto de la recta r:** $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ **cuya distancia al punto P(1, 0, 2) sea $\sqrt{5}$.**

Solución: Un punto genérico de r es Q(t, 3 − t, 1 + 2t).

Dist (P, Q) = $\sqrt{(t-1)^2 + (3-t)^2 + (2t-1)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (t-1)^2 + (3-t)^2 + (2t-1)^2 = 5 \Rightarrow 6t^2 - 12t + 6 = 0 \Rightarrow$ t = 1 $\Rightarrow$ Q(1, 2, 3)

29. **Determina la distancia entre el plano de ecuación:** $\pi : 2x + y + 2z = 9$ **y el plano que contiene a los puntos A(1, 0, −1), B(−2, 2, 1) y al origen de coordenadas,**

Solución Si los planos se cortan en una recta o coinciden, la distancia es cero.

Si son paralelos tomaremos un punto de uno de ellos y calcularemos la distancia de ese punto al otro plano.

Plano π' que pasa por A, B y O: queda determinado por el punto O(0, 0, 0), y los vectores $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ =(1, 0, −1), $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ =(−2, 2, 1)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2x + y + 2z = 0.$$

Los planos π' y π son paralelos, entonces: d(π',π) = d(O, π) = $\frac{\mid 2\cdot 0 + 0 + 2\cdot 0 - 9 \mid}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$

30. **Halla la distancia entre las rectas r:** $\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases}$ **y s:** $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Solución:

El vector director de r $\vec{v}$ =(2, 1, −1) y el de s $\vec{w}$= (1, −2, 0) x (0.1, 1) = (−2, −1, 1) son proporcionales por lo tanto las rectas tiene la misma dirección. Como A(0, 1, 3) $\in r \Rightarrow$ A$\notin$ s $\Rightarrow r$ y s son paralelas. La distancia de r a s es igual a la distancia de un punto A$\in r$ a s.

Tomamos un punto B de s haciendo z = 0 B(1, 0, 0), $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ =(1, −1, −3).

$$d(r,s) = d(A,\ s) = \frac{\mid \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ x\ \vec{w} \mid}{\mid \vec{w} \mid} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} \approx 2,89.$$

Recta que se apoya en otras dos y pasa por un punto

31. **Dado el punto P(1, 1, 1) y las rectas:** $r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+2t \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} x = k \\ y = 3k \\ z = 2-k \end{cases}$. **Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por el punto** P **y corta a** r **y s.**

Solución: La recta que buscamos la podemos hallar como intersección de los planos π_1 plano que pasa por P y contiene a r, y π_2, plano que pasa por P y contiene a la recta s.

π_1:queda determinado por A(1, 2, 1), $\vec{v} = (1,\ -1,\ 2)$ y $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (0,\ -1,\ 0)$

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2x - z - 1 = 0$$

π_2: queda determinado por B(0, 0, 2), $\vec{w} = (1,\ 3,\ -1)$ y $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = (1,\ 1,\ -1)$

$$\pi_2 = \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2x - 2z + 4 = 0.$$ La recta buscada es:

$$\begin{cases} 2x - z - 1 = 0 \\ -2x - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Otra forma: Sean A y B los puntos en los que la recta buscada corta a r y s respectivamente

Sea A un punto de r: A $(1+t,\ 2-t,\ 1+2t)$ y B uno de s: B $(k,\ 3k,\ 2-k)$. $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (t,\ 1-t,\ 2t)$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (k-1,\ 3k-1,\ 1-k)$. $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ tienen la misma dirección $\Rightarrow$ son proporcionales: $\frac{t}{k-1} = \frac{1-t}{3k-1} = \frac{2t}{1-k} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow$ A(1, 2, 1) y B(1, 3, 1).

La recta buscada es la que pasa por A y B.

Perpendicular común a dos rectas que se cruzan

32. **Comprueba que las rectas r:** $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$ **y s:** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ **se cruzan y halla la ecuación de la perpendicular común a ambas.**

Solución:

r: $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$, un punto A(0, 1, -3) y un vector director $\vec{v}$ =(0, 1, 2)

s: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$, punto B(1, -1, 0) y un vector director $\vec{w}$ =(1, -1, 3)

Los vectores $\vec{v}$ =(0, 1, 2) y $\vec{w}$ =(1, -1, 3) no son proporcionales, son linealmente independientes, por lo tanto las rectas se cortan o se cruzan. Sea $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$= (1, -2, 3), si rango $\{\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\} = 2$ (esto es equivalente a que det $(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = 0$) entonces las rectas se cortan pero si rango $\{\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\} = 3$ (det $(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) \neq 0$) las rectas se cruzan.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan.}$$

Un vector director de la perpendicular común a ambas rectas será: $\vec{u} = \vec{v}\ x\ \vec{w} = (5,\ 2,\ -1)$

La perpendicular común la podemos obtener como intersección de los planos π y π´.

Plano π determinado por A(0, 1, -3) , $\vec{v}$ =(0, 1, 2) $\vec{v}\ x\ \vec{w} = (5,\ 2,\ -1)$

(plano que contiene a r y a la perpendicular a r y s) $\begin{vmatrix} x & y-1 & z+3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5x + 10y - 5z - 25 = 0 \Leftrightarrow \pi : x - 2y + z + 5 = 0$

Plano π´ determinado por B(1, -1, 0), $\vec{w}$ =(1, -1, 3) y $\vec{v}\ x\ \vec{w} = (5,\ 2,\ -1)$

(plano que contiene a s y a la perpendicular a r y s) $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi$´: 5x $-$16y $-$ 7z $-$21 = 0

Por tanto la ecuación de la perpendicular común es: $\begin{cases} x - 2y + z + 5 = 0 \\ 5x - 16y - 7z - 21 = 0 \end{cases}$

Otra forma (por puntos genéricos)

Vamos a hallar los puntos R y S en los que la perpendicular común p corta a r y a s.

Ecuaciones paramétricas de r: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \alpha \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases}$, un punto genérico de r es de la forma A(0,1+α,-3+2α)

Ecuaciones paramétricas de s $\begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -1 - \beta \\ z = 3\beta \end{cases}$, un punto genérico de s es de la forma (1+β, $-1-$ β, 3β)

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es $\overrightarrow{RS} = (1+\beta,\ -2-\alpha-\beta,\ 3-2\alpha+3\beta)$

Este vector $\overrightarrow{RS}$ debe ser perpendicular a r y s:

$\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v} = (1+\beta,\ -2-\alpha-\beta,\ 3-2\alpha+3\beta) \cdot (0,1,2) = 0 \Rightarrow -2-\alpha-\beta+6-4\alpha+6\beta = 0$
$\Rightarrow 5\alpha - 5\beta = 4$

$\overrightarrow{RS} \cdot \vec{w} = (1+\beta,\ -2-\alpha-\beta,\ 3-2\alpha+3\beta) \cdot (1,-1,3) = 0 \Rightarrow 1+\beta+2+\alpha+\beta+9-6\alpha+9\beta = 0$
$\Rightarrow -5\alpha + .11\beta = -12$

: $\begin{cases} 5\alpha - 5\beta = 4 \\ -5\alpha + 11\beta = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{8}{15} \\ \beta = -\frac{4}{3} \end{cases}$; los puntos son $R\left(0,\ 1 - \frac{8}{15},\ -3 - \frac{8}{15}\right) = \left(0,\ \frac{7}{15},\ \frac{-61}{15}\right)$ y $S\left(1 - \frac{4}{3},\ -1 + \frac{4}{3},\ 3\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -4\right)$, . $\overrightarrow{RS} = \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{15},\ \frac{1}{15}\right)$, para el vector normal a las dos recta podemos tomar $\overrightarrow{RS}$ o cualquiera que sea proporcional a él, por ejemplo (-5, -2, 1).

Las ecuaciones de la perpendicular común: $\frac{x+\frac{1}{3}}{-5} = \frac{y-\frac{1}{3}}{-2} = \frac{z+4}{1}$