S3r4 | 2022

MATEMÁTICAS : Bachillerato II

Geometría: Vectores (I)

Ejercicios resueltos

by Sera

1. **Determinar el valor de x para que el vector** $(1, x, 5) \in R^3$ **sea generado por { (1, 2, 3),(1, 1, 1)} .**

   Solución.

   $(1, x, 5)$ pertenece al subespacio generado por el conjunto { (1, 2, 3),(1, 1, 1)} si y solo si $(1, x, 5)$ es combinación lineal de $(1, 2, 3)$ y $(1, 1, 1)$, o sea, si existen $\alpha, \beta \in R$ tales que

   $$(1, x, 5) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 1, 1)$$

   , Pero entonces,

   $$1 = \alpha + \beta$$

   $$x = 2\alpha + \beta$$

   $$5 = 3\alpha + \beta$$

   y resolviendo el sistema anterior, tenemos $\alpha = 2, \beta = -1$ y $x = 3$

2. **Para $\vec{a} = (1, -2, 3)$ y $\vec{b} = (3, -1, 4)$, halla:**

   a) $a + b$

   b) $2a - b$

   c) $-a + 3b$

   d) $c = \lambda a + \boldsymbol{\mu} b$

   Solución

   a) $a + b = (1, -2, 3) + (3, -1, 4) = (4, -3, 7)$.

   b) $2a - b = 2 \cdot (1, -2, 3) - (3, -1, 4) = (2 - 3, -4 + 1, 6 - 4) = (-1, -3, 2)$.

   c) $-a + 3b = -(1, -2, 3) + 3 \cdot (3, -1, 4) = (-1 + 9, 2 - 3, -3 + 12) = (8, -1, 9)$.

   d) $c = \lambda a + \mu b = \lambda(1, -2, 3) + \mu(3, -1, 4) = (\lambda + 3\mu, -2\lambda - \mu, 3\lambda + 4\mu)$.

3. **Contesta a las siguientes cuestiones**

   a) **A partir de la definición de dependencia lineal de vectores, demuestra que los vectores** $\{(1,0,-1),(0,1,2),(1,-1,1)\}$ **son linealmente independientes.**

   b) **Expresa el vector** $\vec{v} = (3,-2,3)$ **en función de los vectores anteriores.**

Solución

a) Debe comprobarse que la relación $\lambda : \lambda_1(1,0,-1)+\lambda_2(0,1,2)+\lambda_3(1,-1,1) = (0,0,0)$ sólo se cumple cuando $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$

En efecto:

$\lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(0,1,2) + \lambda_3 = (0,0,0) \Rightarrow$

$$(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Cuya única solución es $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ *y* $\lambda_3 = 0$.

b) Como los vectores anteriores son linealmente independientes constituyen una base de R^3 En este caso, hay que encontrar los valores de λ ; en consecuencia, cualquier vector depende linealmente de ellos.

λ_1, λ_2 *y* λ_3 tales que:

$$\lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(0,1,2) + \lambda_3(1,-1,1) = (3,-2,3)$$

Esto es: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 3 \end{cases}$

Cuya solución es $\lambda_3 = 5/2, \lambda_2 = 1/2$ *y* $\lambda_1 = 1/2$ luego:

$$\frac{1}{2}(1,0,-1) + \frac{1}{2}(0,1,2) + \frac{5}{2}(1,-1,1) = (3,-2,3)$$

4. **Consideremos las siguientes bases de** R^2 **:** $B_1 = \{(1,0),(1,3)\}$ **;**$B_2 = \{(0,1),(1,1)\}$**. Hallar matriz cambio de base.**

Solución:

Se construye la matriz de cambio de base buscando las coordenadas en la base B_2 de los vectores de la base B_1 .

$M_{B1B2} = ([v_1]_{B_2}[v_2]_{B_2})$. Es decir está formada por las coordenadas de los vectores de B_1 en la base B_2

Busquemos las coordenadas de $(1,0)$ en la baseB_2:

$(1,0) = \alpha.(0,1) + \beta.(1,1)$

$\Rightarrow \alpha = -1 \ y \ \beta = 1 \Rightarrow [(1,0)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Busquemos las coordenadas de $(1,3)$ en la base B_2 : $(1,3) = \alpha.(0,1) + \beta.(1,1) \Rightarrow \alpha = 2 \ y \ \beta = 1$

$\Rightarrow [(1,3)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Sean $\vec{a}_1 = (1, -2, -5), \vec{a}_{2-} = (2, 5, 6)$ y $\vec{b} = (7, 4, -3) \in IR^3$. Determina si $\vec{b}$ es combinación lineal de $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$. En caso afirmativo obtener los coeficientes x_1, x_2 tales que $\vec{b} = x1\vec{a}_1 + x2\vec{a}_2$. Realiza lo mismo para $\vec{c} = (7, 4, -4)$.

   Solución Comenzamos escribiendo la ec. vect. $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{b}$ .Es decir

$$x_1(1, -2, -5) + x_2(2, 5, 6) = (7, 4, -3)$$

   , que es lo mismo que:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 7 \\ -2x_1 + 5x_2 = 4 \\ -5x_1 + 6x_2 = -3 \end{array} \right.$$

   Resolvemos el sistema transformando por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   con lo que $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Es decir,

$$3(1, -2, -5) + 2(2, 5, 6) = (7, 4, -3)$$

6. **Comprueba que el conjunto $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(2,2,0),(0,0,1)\}$ de vectores de R^3 , es linealmente dependiente. Identifica un vector que sea combinación lineal del resto, y, si existe, uno que no lo sea. Obtener las relación/relaciones de dependencia lineal del conjunto.**

   Solución: El conjunto S es l.d. puesto que el número de vectores es mayor que el número de componentes(el rango es como mucho 3,luego hay al menos 1 vector dependiente). Un ejemplo de relación de dependencia lineal es: $2(1,0,0) + 2(0,1,0) - 1(2,2,0) + 0(0,0,1) = (0,0,0)$

   Es decir, exise una combinación lineal no nula que da el vector $\vec{0}$

   $(2,2,0)$ puede expresarse como combinación lineal del resto: $(2,2,0) = 2(1,0,0) + 2(0,1,0) = 2(1,0,0) + 2(0,1,0) + 0(0,0,1)$

   También se podrían expresar $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ como combinación lineal de los otros tres vectores (0, 0, 1) es el único de los cuatro vectores que no puede expresarse como combinación lineal del resto. Formalmente las relaciones de dependencia se obtienen resolviendo el siguiente sistema. Los coeficientes de las c.l. se han denotado como $c_1, c_2, c_3\ y\ c_4$.

   $c_1(1,0,0) + c2(0,1,0) + c_3(2,2,0) + c_4(0,0,1) = (0,0,0)$

   La matriz ampliada del sistema es: $A* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Por el teorema de Rouche $rango(A) = 3\ y\ rango(A^*) = 3$ .El sistema es SCI

   Esta matriz ya está en forma escalonada, la solución es: $c_1 = -2c_3, c_2 = -2c_3, c_3 = c_3, c_4 = 0$. Es decir hay infinitas combinaciones lineales que dan el vector nulo. Por tanto $\vec{c} = \{(-2\lambda, -2\lambda, \lambda, 0);; \lambda \in R\}$ y la relación de dependencia lineal más sencilla posible:

   $$\lambda = 1;\ \ (-2,0,0) - (0,2,0) + (2,2,0) + 0(0,0,1) = (0,0,0)$$

   Denotando a los vectores como $\vec{v}_1, \vec{}v_2, \vec{}v_3\ y\ \vec{}v_4$, la relación de dependencia lineal queda: $-2\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 1\vec{v}_3 + 0\vec{v}_4 = \vec{0}$

   Que se podría escribir mejor como: $-2\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 1\vec{v}_3 = \vec{0}$

   Como el sistema indeteminado tiene un grado de indeterminación se obtiene también una relación de dependencia lineal.

   Otras ecuaciones serían simplemente múltiplos de ésta. Nótese como la relación de dependencia lineal permite despejar tres de los vectores

   $(\vec{v}_1, \vec{v}_2\ y\ \vec{v}_3)$ como combinación lineal del resto.

   $$\vec{v}_1 = \frac{-2}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3 = -\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3$$

   $$\vec{v}_2 = -1\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_3;$$

   $$\vec{v_3} = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$

7. **Comprueba que el conjunto $S = \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ de vectores de R^3 es linealmente dependiente. Encuentra la/las relaciones de dependencia lineal entre ellos y obtén un subconjunto de S con el máximo número posible de vectores linealmente independientes. S=$\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$,$\vec{v}_3$ con** $\vec{v}_1 = (1,2,3);, \vec{v}_2 = (4,5,6);, \vec{v}_3 = (2,1,0)$

   Solución

   Tenemos que ver si existe solución no trivial de la ecuación: $x_1(1,2,3) + x_2(4,5,6) + x_3(1,0,0) = (0,0,0)$

   $x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$

   $2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$

   $3x_1 + 6x_2 = 0$

   Tomemos la matriz ampliada del sistema y resolvemos por Gauss:

   $$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 51 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   El sistema es comp. indeterminado. Por tanto $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son linealmente dependientes. Para encontrar una relación de dependencia lineal, resolvemos el sistema, tomando x_1 y x_2 como incógnitas principales y x_3 como parámetro libre, obteniendo:

   $x_3 = \lambda; x_2 = -\lambda; x_1 = -4x_2 - 2\lambda = 4\lambda - 2\lambda = 2\lambda$

   Por tanto:

   $x_1 = 2\lambda; x_2 = -\lambda; x_3 = \lambda$

   Una solución no nula posible es $(2,-1,1)$ y la relación de dependencia lineal correspondiente es :$2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$

   $2(1,2,3) - 1(4,5,6) + 1(2,1,0) = (0,0,0)$

   Existen otras infinitas relaciones de dependencia lineal, como por ejemplo: $4\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 = \vec{0}$, pero son proporcionales a la anterior. De la relación encuadrada deducimos que en este ejemplo cualquier vector puede expresarse como c.l. de los otros dos. Cualquier menor de orden 2 tiene rango 2