MATEMATICAS (MAT II)

2º Bachillerato

GRÁFICAS DE FUNCIONES

Departamento de Matemáticas

Ies Dionisio Aguado

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

1. **Dominio de definición**: D = Dom f(x) = {x $\in$R / existe f(x)}

2. **Simetrías**

   a) Función par: Si $\mathbf{f(-x) = f(x)}$ para todo x $\in$ D.**Es simétrica respecto del eje OY** (ordenadas):

   b) Función impar: Si $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$ para todo x $\in$ D. **Es simétrica respecto del origen de coordenadas.**

3. **Periodicidad:**

   a) f es periódica si existe T$\in$ R tal que f(x +T) = f(x), (T periodo mínimo).

4. **Puntos de corte con los ejes:**

   a) Con el eje OX (abscisas): f(x) = 0 : (x,0). Ninguno, uno o más puntos.

   b) Con el eje OY (ordenadas): f(0) = y , (0,y). Ninguno o un punto.

5. **Asíntotas**

   a) Asíntotas verticales: La recta **x = a** es asíntota vertical si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, o algún limite lateral lo es.

   b) Asíntotas horizontales: La recta **y = b** es asíntota horizontal si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b\in R$ o bien $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b\in R$

   c) Asíntotas oblicuas: La recta **y = mx + n** es una asíntota oblicua, cuando:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in R \;\; y \;\; n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - \mathrm{mx}) \in R$$

6. **Crecimiento, decrecimiento. Extremos relativos**

   a) Si para todo x$\in$ I $\subseteq$ D $\mathbf{f'(x) > 0}$ f es **creciente** en I.

   b) Si para todo x$\in$ I $\subseteq$ D $\mathbf{f'(x) < 0} \Rightarrow$ f es **decreciente** en I.

   c) Si f´(x_0) = 0, o bien f no es derivable en $x_0 \in$ D, o bien si f´(x) cambia de signo a izquierda y derecha de x_0, en x_0 hay un **extremo relativo**(máximo o mínimo)

7. **Concavidad, convexidad. Puntos de inflexión**

8. Si para todo x$\in$ I $\subseteq$ D $\mathbf{f''(x) > 0} \Rightarrow$ f es **cóncava** en I.

9. Si para todo x$\in$ I $\subseteq$ D $\mathbf{f''(x) < 0} \Rightarrow$ f es **convexa** en I.

10. Si f´´(x_0) = 0, o bien f´ no es derivable en $x_0 \in$ D, y f´´(x) cambia de signo a izquierda y derecha de x_0, en x_0 hay un **punto de inflexión**

11. **Tabla de valores**: Se puede hacer una tabla de valores como resumen de datos

Ejemplos de representación gráfica de funciones

1. Ejemplo $f(x) = x^2 - x^4$

   a) **Dominio**: R, es continua y derivable en R

   b) **Puntos de corte con los ejes**

   1) x = 0 $\Rightarrow$ y = 0, (0, 0)

   2) y = 0 $\Rightarrow x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2\left(1 - x^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0,\ 0) \\ x = \pm 1 & (1, 0),\ (-1,\ 0) \end{cases}$

   c) **Simetrías**: $\begin{cases} f(-x) = (-x)^2 - (-x)^4 = x^2 - x^4 \\ f(x) = x^2 - x^4 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$
   f es una función par y por lo tanto es simétrica respecto del eje Y.

   d) **Asíntotas:** No tiene por ser una función polinómica.

   e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**: $y' = 2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{1/2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}/2 \end{cases}$

   f)

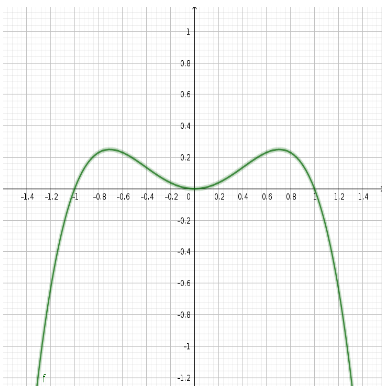
Dominio		$-\sqrt{2}/2$		0		$-\sqrt{2}/2$	
f	creciente		decreciente		creciente		creciente
f'	+	0		0		0	+
		max		min		max	

   g) Mínimo relativo en el punto (0,0), y máximos relativos en los puntos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$

   h) **Concav., convex., puntos de inflexión:** $y'' = 2 - 12x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

   Puntos de inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$

Dom		$\frac{-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{-\sqrt{6}}{6}$		**0**		$\frac{\sqrt{6}}{6}$		$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	
		máx				**MíN**				**MÁX**	
	convexa			**Inflex**	**cóncava**			**Inflexión**	**convexa**		
f	$\nearrow$		$\searrow$				$\nearrow$				$\searrow$
f'	+	**0**	**-**			**0**	+			**0**	**-**
f''	**-**	**-**	**-**	**0**	+	+	+	**0**	**-**	**-**	**-**



2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

a) **Dominio: R, es continua y derivable en R**

b) **Puntos de corte con los ejes**

1) x = 0 ⇒ y = 0, (0,0)

a' y = 0 ⇒ $x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 6x + 9\right) = 0 \Rightarrow$
$$\begin{cases} x = 0 & (0,\ 0) \\ x = 3 & (3,\ 0) \end{cases}$$

2) **Simetrías**: $\begin{cases} f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) = -x^3 - 6x^2 - 9x \\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \end{cases} \Rightarrow f(-x) \neq \pm f(x)$

⇒ f no es una función par ni impar y por lo tanto no es simétrica respecto del origen ni del eje de ordenadas.

3) **Asíntotas**: No tiene por ser una función polinómica.

4) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^3 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

c)

Dominio		1		3	
f	creciente	$f(1) = 4$	decreciente	$f(3) = 0$	creciente
f'	+	0	-	0	+

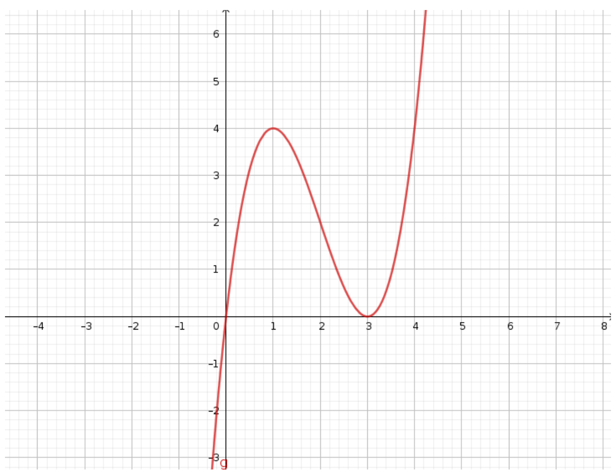
d) La función tiene un mínimo relativo en el punto: (1, 4), y un máximo relativo en el punto (3, 0)

e) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**: $y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

f)

Dominio		1		2		3	
		MÁX				**Min**	
f	**crece**↗	**decrece**↘					**crece**↗
f'	+	**0**		-		**0**	-
f''	-	-	-	**0**	+	+	+

g) Punto de inflexión: (2, 2)



3. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

   a) **Dominio**: R $- \{0\}$

   b) **Puntos de corte con los ejes**: no tiene.

   c) **Simetrías**: $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x) \Rightarrow$ f es impar y por lo tanto es simétrica respecto al origen de coordenadas.

   d) **Asíntotas**

      1) Asíntotas verticales: x $=$ 0

      2) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$. No tiene

      3) Asíntotas oblicuas: y $=$ x

   e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**: $y' = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow x = \pm 1$

Dominio	$(-\infty, -1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1, \infty)$
f	crece		decrece	NO DEF	decrece		crece
f'	$+$	0	-	NO DEF	-	0	$+$
		max				Min	

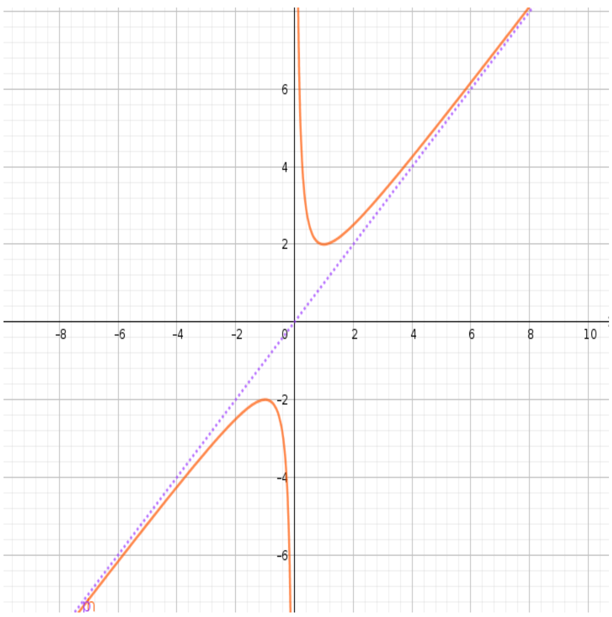
   Tiene un máximo en el punto: $(-1,\, 2)$ y un mínimo en $(1,\, 2)$

   f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**:

   g) $y'' = \frac{2}{x^3} \neq 0 \;\Rightarrow$ no tiene puntos de inflexión

Dominio	$(-\infty, -1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1, \infty)$
f	creciente		decreciente	NO DEF	decreciente		creciente
f'	$+$	0	-	NO DEF	-	0	$+$
f"	-			NO DEF	$+$		
	convexa			NO DEF	cóncava		

   h) **Gráfica:**



4. $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$

a) **Dominio**: R $-$ $\{-1\}$

b) **Puntos de corte con los ejes**: (0, 0).

c) **Simetrías**: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(1-x)^2} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ f no tiene simetrías.

d) **Asíntotas**

1) Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^3}{(1+x)^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^3}{(1+x)^2} = -\infty \end{array}\right\}$ x $= -1$

2) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = +\infty$. No tiene

3) Asíntotas oblicuas: y = x $-$ 2

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**: $y' = \frac{x^3+3x^2}{(1+x)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$. Dom $f'(x)$ = R $-$ $\{-1\}$

Dominio	$(-\infty, -3)$	-3	(-3,-1)	-1	$(-1, \infty)$
f	creciente	$f(1) = 4$	decreciente	No def	creciente
f'	$+$	0	-	No def	$+$
				No def	

f) Tiene un máximo en el punto: $(-3, -27/4)$

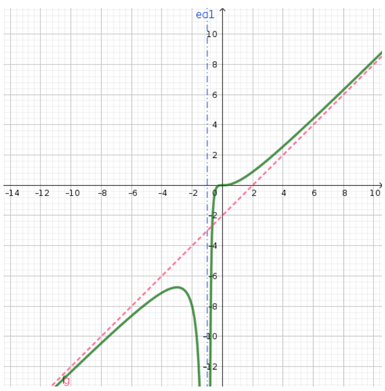
g) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**: $y'' = \frac{6x}{(1+x)^4} = 0 \Rightarrow x = 0$

h)

Dominio	$(-\infty, -3)$	-3	(-3,-1)	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
f	creciente	$f(1) = 4$	decreciente	⊠	creciente		
f'	$+$	0	-	⊠	$+$		
f"	-	-	-	⊠	-	0	$+$
	convexa			⊠	convexa		cóncava

Tiene un punto de inflexión en el punto (0, 0)

i) **Gráfica:**



5. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

a) **Dominio**: R $- \{\pm 2\}$

b) **Puntos de corte con los ejes**: (0, 0).

c) **Simetrías**: $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-4} = \frac{-x}{x^2-4} = -f(x) \Rightarrow$ impar, simétrica respecto del origen

d) **Asíntotas**

1) Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow x = -2 \quad \left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$ $x = 2$

2) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow$ y = 0

3) Asíntotas oblicuas: No tiene

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**: $y' = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow -x^2-4 = 0 \ \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \notin R$. No tiene

f)

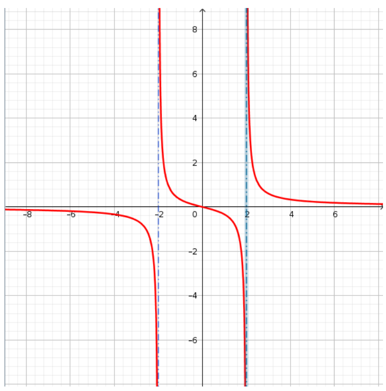
Dominio	$(-\infty, -2)$	-2	(-2,2)	2	$(2, \infty)$
f	decreciente	No def	decreciente	No def	decreciente
f'	-	No def	-	No def	-
		No def		No def	

g) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**: $y'' = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2+12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2+12 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-12} \notin R \end{cases}$

Dominio	$(-\infty, -2)$	-2	(-2,2)	0	(0,2)	2	$(2, \infty)$
f	decreciente	No def	decreciente			No def	decreciente
f'	-	No def	-			No def	-
	-	No def	+	0	-	No def	+
	convexa		conc		conv		cóncava

h) Tiene un punto de inflexión en el punto (0, 0)

i) **Gráfica:**



6. $f(x) = \frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$

a) **Dominio**: R $-$ $\{0\}$

b) **Puntos de corte con los ejes**:

1) x = 0 no definida (0 $\notin$ Dom f)

2) y = 0 $\Rightarrow \frac{x^3-3x^2+4}{x^2} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = -1\ (-1,\ 0),\ x = 2\ (2,\ 0)$

c) **Simetrías**: $f(-x) = \frac{(-x)^3-3(-x)^2+4}{(-x)^2} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ f no tiene.

d) **Asíntotas**

1) Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^3-3x^2+4}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^3-3x^2+4}{x^2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$

2) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-3x^2+4}{x^2} = \pm\infty \Rightarrow$ no tiene

3) Asíntotas oblicuas: y = x $-$ 3

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**: $y' = \frac{x^3-8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$.

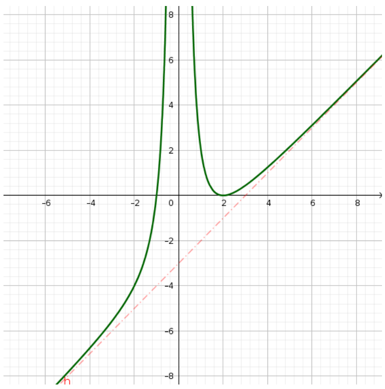
Dominio	$(-\infty, 0)$	0	(0,2)	2	$(2, \infty)$
f	creciente	No def	decreciente		creciente
f'	+	No def	-	0	+

Tiene un mínimo en el punto: (2, 0)

f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**:
$y'' = \frac{24}{x^4} \neq 0$, no tiene puntos de inflexión.

Dominio	$(-\infty, 0)$	0	(0,2)	2	$(2, \infty)$
f	creciente	No def	decreciente		creciente
f'	+	No def	-	0	+
f''	+	No def	-		
	cóncava		cóncava		

g) **Gráfica:**



7. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

a) **Dominio**: R $- \{0\}$

b) **Puntos de corte con los ejes**:

1) x $=$ 0 no definida ($0 \notin$ Dom f)

2) y $= 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x^3+2}{x} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2}$, $\left(\sqrt[3]{-2},\ 0\right)$

c) **Simetrías**: $f(-x) \neq \pm f(x) \Rightarrow$ f no tiene.

d) **Asíntotas**

1) Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^3+2}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^3+2}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$

2) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2}{x} = +\infty \Rightarrow$ no tiene

3) Asíntotas oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2}{x^2} = \pm\infty \Rightarrow$ no tiene

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**: $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3-2}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2 = 0 \ \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$.

Dominio	$(-\infty, 0)$	0	(0,1)	1	$(1, \infty)$
f	decreciente	No def	decreciente	min	creciente
f’	+	No def	-	0	+

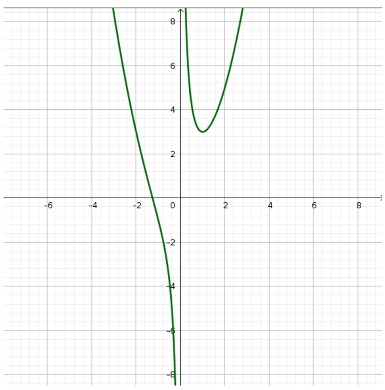
f) Tiene un mínimo en el punto: (1, 3)

g) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**:

$y'' = 2 + \frac{4}{x^3} = \frac{2x^3+4}{x^3} = 0 \Rightarrow\ 2x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2}$

Dominio	$(-\infty, \sqrt[3]{-2})$	$\sqrt[3]{-2}$	$(\sqrt[3]{-2}, 0)$	0	(0,1)	1	$(1, \infty)$
f	decreciente			No def	decreciente	min	creciente
f’	+			No def	-	0	+
f”	+	0	-	No def	+		
	Cóncava	inflex	convexa	No def	Cóncava		

h) Punto de inflexión en ($\sqrt[3]{-2}$, 0)



8. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

a) **Dominio**: $R - \{\pm 1\}$

b) **Puntos de corte con los ejes**: (0,0)

c) **Simetrías**: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x) \Rightarrow$ f es impar y por lo tanto es simétrica respecto al origen de coordenadas.

d) **Asíntotas**

1) Asíntotas verticales: x = 1 y x = −1
2) Asíntotas Horizontales: No tiene
3) Asíntotas oblicuas: y = x

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**: $y' = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2\left(x^2-3\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Dominio	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}$,-1)	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f	↗		↘	⊠	↘		↘	⊠	↘		↗
f'	+	0	-	⊠	-	0	-	⊠	-	0	+

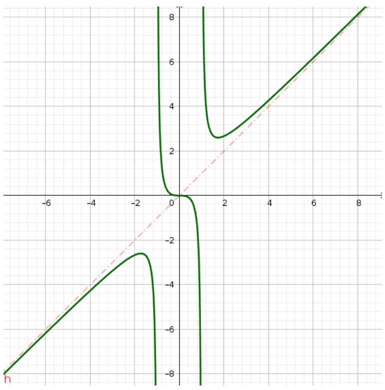
1) Tiene un máximo en el punto: $\left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{3}\right)$ y un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{3}\right)$

f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**: $y'' = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = 0 \Rightarrow x(2x^2+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-3} \notin R \end{cases}$

Dom	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}$,-1)	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f	↗		↘	⊠	↘		↘	⊠	↘		↗
f'	+	0	-	⊠	-	0	-	⊠	-	0	+
f"		-		⊠		infl		⊠			
		convexa		⊠	conc	0	conve	⊠		conca	

Tiene un punto de inflexión en el punto: (0 , 0)

g) **Gráfica:**



9. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

a) Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

b) Puntos de corte con los ejes: $(-1\ ,\ 0)\ ,\ (1\ ,\ 0)$

c) Simetrías: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = f(x)$, es simétrica respecto del eje OY.

d) Asíntotas

1) Asíntotas verticales: No tiene
2) Asíntotas horizontales: No tiene
3) Asíntotas oblicuas: y = mx + n

e) $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1\ ,\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right) = 0 \Rightarrow y = xm = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{-x} =$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) = -1\ ,\ n = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right) = 0 \Rightarrow y = -x$

f) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y^{'} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \mathrm{Dom}\ f$.

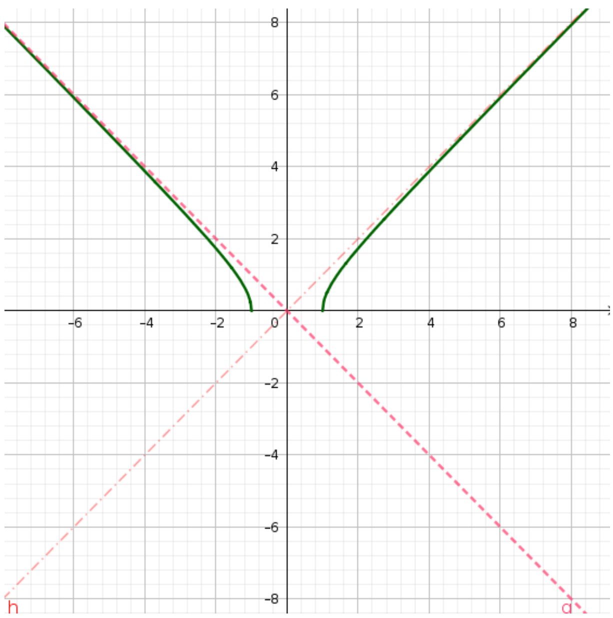
g) Dom f´= $(-\infty,\ -1) \cup (1,\ +\infty)$

h) En el intervalo $(-\infty, -1)$ $f^{'}(x) < 0 \ \Rightarrow$ f es decreciente

i) En el intervalo $(1\ ,\ +\infty)$ $f^{'}(x) > 0 \ \Rightarrow$ f es creciente

j) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f^{''}(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \neq 0$, Dom f´´= $(-\infty,\ -1) \cup (1,\ +\infty)$, la derivada segunda es negativa en todo su dominio $\Rightarrow$ es siempre convexa

k) Gráfica:



10. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

a) Dominio: $[-1,\ 1]$

b) Puntos de corte con los ejes: $(-1\ ,\ 0)\ ,\ (1\ ,\ 0)$

c) Simetrías: $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$, es simétrica respecto del eje OY.

d) Asíntotas

   1) Asíntotas verticales: No tiene

   2) Asíntotas horizontales: No tiene ya que el dominio de f $= [-1,\ 1]$

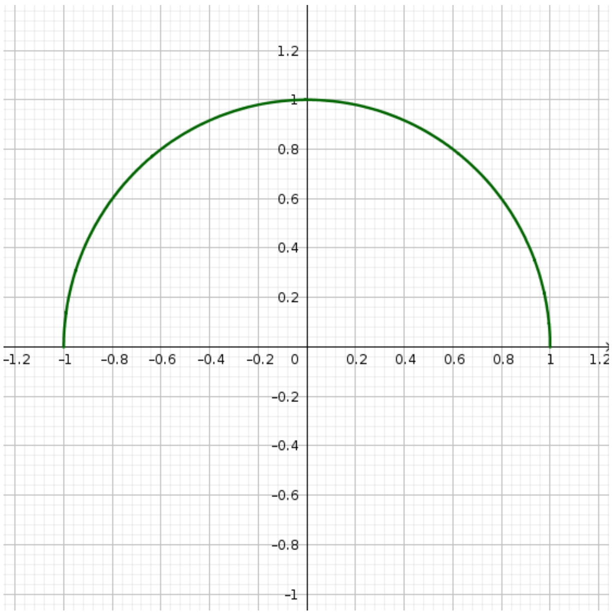
   3) Asíntotas oblicuas: No tiene

e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$ x $=$ 0.

   - Dom f´$= (-1,\ 1)$
   - En el intervalo $(-1,\ 0)$ $f'(x) > 0 \ \Rightarrow$ f es creciente
   - En el intervalo $(0\ ,\ 1)$ $f'(x) < 0 \ \Rightarrow$ f es decreciente
   - Tiene un máximo en el punto: $(0,\ 1)$

f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \neq 0$, Dom f´´$=(-1,\ 1)$, la derivada segunda es negativa en todo su dominio $\Rightarrow$ es siempre convexa.

g) Gráfica:



11. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

a) **Dominio**: R $-$ $\{0\}$

b) **Puntos de corte con los ejes**:

1) x $=$ 0 no definida ($0 \notin$ Dom f), no corta al eje de ordenadas (Y).

2) y $= e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow$ no corta al eje de abscisas (X).

c) **Simetrías**: $f(-x) = e^{1/-x} = e^{-1/x} = \frac{1}{e^{1/x}} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ f no tiene.

d) **Asíntotas**

1) Asíntotas verticales:

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow$ no tiene

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow$ x $=$ 0

g) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1 \Rightarrow$ y $=$1

h) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**: $y^{'} = \frac{-e^{1/x}}{x^2} \neq$ 0 . No tiene máximos ni mínimos.

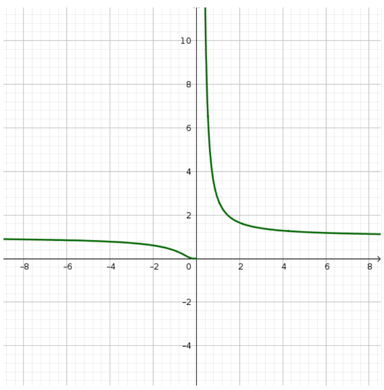
Dominio	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f	↘	⊠	↘
f'	-	⊠	-

i) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**: $y^{''} = \frac{e^{1/x}(1+2x)}{x^4} =$ 0, x $= -1/2$

Dominio	$(-\infty, -1/2)$	-1/2	(-1/2,0)	0	$(0, \infty)$
f	↘			⊠	↘
f'	-			⊠	-
f"	-	0	$+$	⊠	$+$
	convexa	inflex	cón	⊠	cónc

j) Punto de inflexión en $(-1/2$, e^{-2}), e$^{-2} \cong 0.135335$

k) **Gráfica:**



12. $y = \frac{\ln x}{x}$

a) Dominio: $(0, +\infty) = R^+$. Continua en su dominio

b) Puntos de corte con los ejes:

c) $0 \notin$ Dom f, luego no corta al eje OY

d) f(x) $=$ 0 $\Rightarrow$ ln x $=$ 0 $\Rightarrow$ x $=$ 1, (1, 0) corte con el eje OX.

e) Simetrías: No hay (Si x$\in$ Dom f , $-$x $\notin$ Dom f)

f) Asíntotas

1) Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, $x = 0$

2) Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $y = 0$

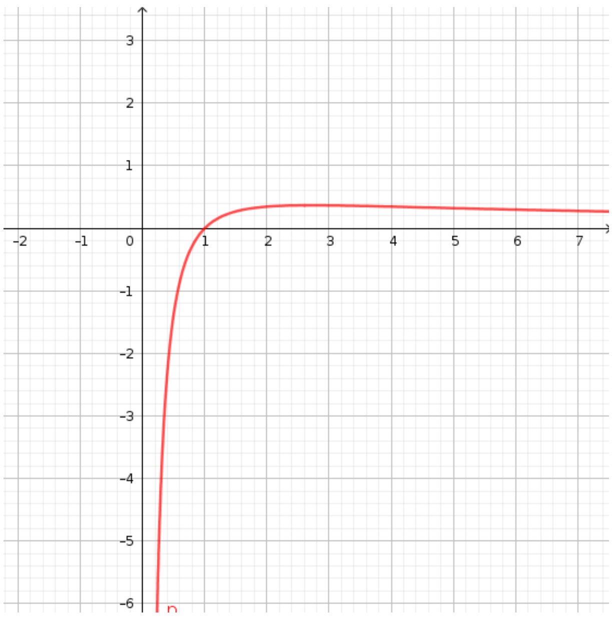
g) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $f^{'}(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow 1 = \ln x \Rightarrow x = e$

- En el intervalo $(0, e)$, $f^{'}(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente
- En el intervalo $(e, +\infty)$, $f^{'}(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente
- Para x $=$ e tiene un máximo relativo: $\left(e\ ,\ \frac{1}{e}\right)$

h) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f^{''}(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$

- En el intervalo $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$, $f^{''}(x) < 0 \Rightarrow$ f es convexa
- En el intervalo $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, $f^{''}(x) > 0 \Rightarrow$ f es cóncava.
- Para $x = e^{\frac{3}{2}}$ tiene un punto de inflexión: $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

i) Gráfica:



13. $y = \ln(x^2 - 1)$

a) **Dominio:** $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow$ Dom f $= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

b) Puntos de corte con los ejes:

c) $x = 0 \notin$ Dom f $\Rightarrow$ no corta al eje de ordenadas.

d) $y = 0 \Rightarrow \ln(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = e^0 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$
$\begin{cases} (\sqrt{2},\ 0) \\ (-\sqrt{2},\ 0) \end{cases}$

e) Simetrías: $\begin{cases} f(-x) = \ln\left((-x)^2 - 1\right) = \ln\left(x^2 - 1\right) \\ \qquad f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right) \end{cases} \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$
f es par y por lo tanto la gráfica es simétrica respecto del eje Y.

f) Asíntotas

1) Asíntotas verticales:
$\lim_{x \to -1^-} \ln\left(x^2 - 1\right) = \ln 0 = -\infty$. Asíntota $x = -1$
$\lim_{x \to 1^+} \ln\left(x^2 - 1\right) = \ln 0 = -\infty$. Asíntota $x = 1$

2) Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \to \pm\infty} \ln\left(x^2 - 1\right) = +\infty \Rightarrow$ No tiene.

3) Asín. oblicuas: $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln\left(x^2 - 1\right)}{x} = 0 \Rightarrow$ No tiene

g) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

1) $y' = \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin$ Dom f

Dominio	$(-\infty, -1)$	(-1,1)	$(1, \infty)$
f	$\searrow$	no definidad	$\nearrow$
f'	+	no def	+
f''	-	no def	+
	convexa	no definida	convexa

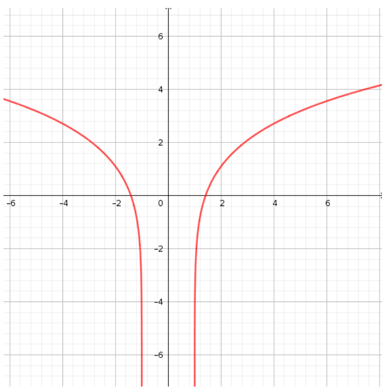
no tiene máx ni mín

h) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión:

1) $y'' = \frac{2 \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} \neq 0 \Rightarrow$ no tiene p. de inflexión.

Dominio	$(-\infty, -1)$	(-1,1)	$(1, \infty)$
f	$\searrow$	no definidad	$\nearrow$
f'	+	no def	+
f''	-	no def	+
	convexa	no definida	cónc

i) Gráfica:



14. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

a) Dominio: R $- \{0\}$

b) Puntos de corte con los ejes: no tiene.

c) Simetrías: $f(-x) = -x \cdot e^{1/-x} = -\frac{x}{e^{1/x}} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ no tiene

d) Asíntotas

1) Asíntotas verticales:

2) $\lim_{x \to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow$ no tiene cuando $x \to 0^-$ pues la función tiende a cero

3) $\lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \Rightarrow$ $x = 0$

4) Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \to \pm\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left(\pm\infty \cdot e^0\right) = \pm\infty$. No tiene.

5) Asíntotas oblicuas: y = mx + n ; $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

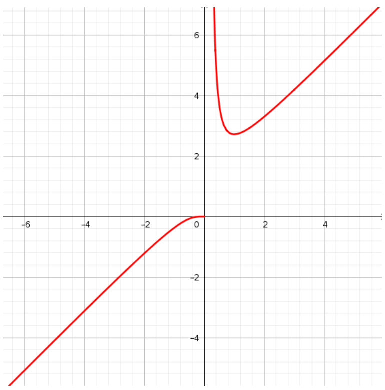
$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{L'Hop}{=}$
$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ $y = x + 1$

e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y' = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 0$, como $e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente
- En el intervalo $(0, 1)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente
- En el intervalo $(1\ , +\infty)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente
- En x = 1 hay un mínimo relativo. Mínimo: (1, e)

f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \neq 0$

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f es convexa
- En el intervalo $(0\ ,\ +\infty)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow$ f es cóncava



15. $f(x) = \frac{|x-2|}{x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \frac{-(x-2)}{x} & \text{si } \ x \leq 2 \ \ y \ \ x \neq 0 \\ \frac{x-2}{x} & \text{si } \ x > 2 \end{cases}$

a) Dominio: R $-$ { 0 }

b) Puntos de corte con los ejes: (0, 2)

c) Simetrías: no tiene

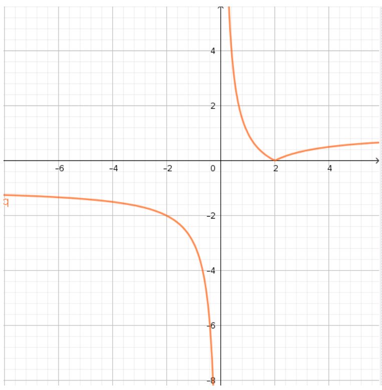
d) Asíntotas

- Asíntotas verticales: x $=$ 0
- Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x+2}{x} = -1 \Rightarrow$ x $=$ -1
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x} = 1 \ \Rightarrow$ x $=$ 1
- Asíntotas oblicuas: no tiene

Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $f(x) = \frac{|x-2|}{x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \frac{-(x-2)}{x} & \text{si } \ x \leq 2 \ \ y \ \ x \neq 0 \\ \frac{x-2}{x} & \text{si } \ x > 2 \end{cases}$, Dom f $=$ R$-$ $\{0\}$, es continua en su dominio, pero **no es derivable** en x $=$ 2 : $\begin{cases} f\text{¢}(2^{-})\text{=-}\frac{1}{2} \\ f\text{¢}(2^{+}) = \frac{1}{2} \end{cases}$. La función derivada de f es: $f^{'}(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x^2} & \text{si } \ x < 2, \ \ x \neq 0 \\ \frac{2}{x^2} & \text{si } \ x > 2 \end{cases}$, f´(x) $\neq$ 0 para todo x $\in$ Dominio de f´

Dominio	$(-\infty, 0)$	0	(0,2)	2	$(2, \infty)$
f	↘	no def	↘		↗
f'	-		-	no der	+

Concavidad,convexidad, puntos de inflexión: (se deja como ejercicio)



16. $y = \ln x - x$

a) Dominio: $\mathrm{R}^{+} = (0, +\infty)$

b) Puntos de corte con los ejes:

c) No corta al eje de ordenadas pues para x $=$ 0 no está definida $(0 \notin \mathrm{Dom}\ f)$.

d) Como $\forall x \in (0, +\infty)$ $\ln x < x \Rightarrow \ln \mathrm{x} - \mathrm{x} \neq 0$ y por lo tanto no corta al eje de abscisas.

e) Simetrías: no tiene

f) Asíntotas

- Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x \to 0^{+}} (\ln x - x) = -\infty \ \Rightarrow \ x = 0$
- Asíntotas Horizontales:
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - x) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty \ \left(\text{ya que} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\right)$, no tiene.
- Asíntotas oblicuas:y $=$ mx $+$ n
  - $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x - x}{x} \overset{L''H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{1} = -1$
    $n = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \mathrm{mx}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - x + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

  No tiene asíntota oblicua

g) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y' = \frac{1}{x} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$. $y'' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ máximo en x $=$ 1 , $f(1) = -1 \Rightarrow$ máximo en el punto $(1, -1)$.

- En el intervalo $(0\ ,\ 1)$ f´(x)$>$ 0 $\Rightarrow$ f es creciente.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ f´(x)$<$ 0 $\Rightarrow$ f es decreciente.

h) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $y'' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, f´´(x) $<$ 0 para todo x $\in$ Dom f $\Rightarrow$ la función es siempre convexa.

i) Gráfica: