Probabilidad Total

Ejercicios resueltos

2023

BY S3R4

Ejercicio

Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5 % de los vuelos con procedencia nacional, el 4 % de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25 % del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase.

b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea.

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos : $N=$ vuelo procede del territorio nacional , E = vuelo procede de la UE y X = vuelo procede de fuera de la UE

R = el vuelo se retrasa y $\overline{R}$ = el vuelo no se retrasa

De los datos del problema, $P(N) = \frac{95}{161} \Longrightarrow P(E) = \frac{50}{161}; P(X) = \frac{16}{161}$

Si el vuelo procede del territorio nacional $\rightarrow P(R \cap N) = 0{,}05$ y $P(\overline{R} \cap N) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

Si el vuelo procede de la Unión Europea $\rightarrow P(R \cap E) = 0{,}04$ y $P(\overline{R} \cap E) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

Si el vuelo procede de fuera de la Unión Europea $\rightarrow P(R \cap X) = 0{,}0625$ y $P(\overline{R} \cap X) = 1 - 0{,}0625 = 0{,}9375$

La tabla del problema es

	N	E	X
R	0,05	0,04	0,0625
$\overline{R}$	0,95	0,96	0,9375
	$\frac{95}{161}$	$\frac{50}{161}$	$\frac{16}{161}$

Probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase.

$$P(R) = P(N) * P(R/N) + P(E) * P(R/E) + P(X) * P(R/X)$$

$$= \frac{95}{161} \cdot 0{,}05 + \frac{50}{161} \cdot 0{,}04 + \frac{16}{161} 0{,}0625 = \frac{31}{644} \cong 0{,}0481$$

Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea.

Utilizando el teorema de Bayes

$P(E/R) = \frac{P(E \cap R)}{P(R)} = \frac{P(E)P(R/E)}{P(R)} = \frac{\frac{50}{161} \cdot 0{,}04}{0{,}0481} \approx 0{,}2581$

Ejercicio

Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.
Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras.
Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras.

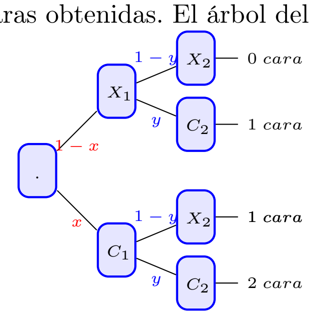
Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos: C_1 = obtener cara en la moneda M_1, X_1 = obtener cruz en la moneda M_1 ,C_2 = obtener cara en la moneda M_2.

X_2 = obtener cruz en la moneda M_2

Datos del problema, $P(C_1) = x$,$P(X_1) = 1-x$; $P(C_2) = y$ y $P(X_2) = 1-y$.

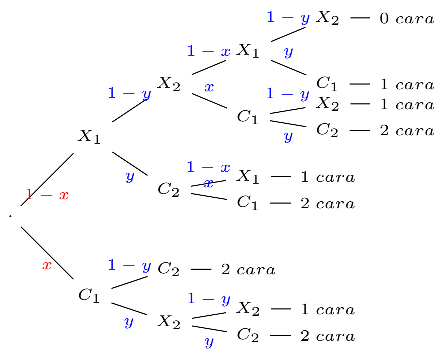
Lanzamos las dos monedas al mismo tiempo y se pregunta por el número de caras obtenidas. El árbol del problema es:



Las probabilidades pedidas son: $P(no\ obtener\ ninguna\ cara) = (1-x)(1-y)$;$P(obtener\ solo\ una\ cara) = x(1-y) + (1-x)y$

$P(obtener\ dos\ caras) = xy$

Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Partiendo del árbol del apartado anterior lanzamos las monedas que salieron cruz :



Las probabilidades pedidas son:
$P(no\ obtener\ ninguna\ cara) = (1\text{–}x)^2(1\text{–}y)^2$
$P(obtener\ solo\, una\ cara) = x(1\text{–}y)^2 + (1\text{–}x)^2y + (1\text{–}x)(1\text{–}y)^2x + (1\text{–}x)^2(1\text{–}y)$
$P(obtener\ dos\ caras) = xy + x(1\text{–}y) + (1\text{–}x)xy + (1\text{–}x)(1\text{–}y)xy$

Ejercicio

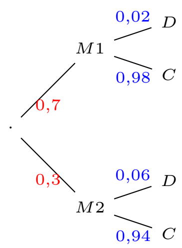
Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0.02 y la segunda planta con probabilidad 0.06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0.7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

a) **La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.**

b **Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.**

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
$M1$ = móvil procede de la 1ª planta ;$M2$ = móvil procede de la 2ª planta
C = móvil correcto; D = móvil defectuoso
De los datos del problema, $P(M1) = 0{,}7 \to P(M2) = 1\text{–}0{,}7 = 0{,}3$ En la 1ª planta $P(D) = 0{,}02 \to P(C) = 0{,}98$
En la 2ª planta $P(D) = 0{,}06 \to P(C) = 0{,}94$



La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.

$P(M2 \cap D) = 0{,}3 \cdot 0{,}06 = 0{,}018$

La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso es 0.018.

b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.

$$P(M1/D) = \frac{P(I \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}02}{0{,}7 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}06} = 0{,}4375$$

Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción es 0,4375.

Ejercicio

Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.
Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación.

a)¿ **Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos?**

b) **Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color?**

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

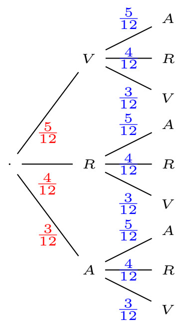
Solución:

Nombrando los sucesos: $V =$ extraer bola verde $R =$ extraer bola roja $A =$ extraer bola amarilla

Extraer dos bolas con devolución. Probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo

La urna del problema es: 3V 4R 5A Como la extracción se realiza con devolución $P(V) = \frac{3}{12}$;$P(R) = \frac{4}{12}$;$P(A) = \frac{5}{12}$

El árbol del problema es:



$P(mismo\ color) = P(A \cap A) + P(R \cap R) + P(V \cap V) = \frac{5}{12}\frac{5}{12} + \frac{4}{12}\frac{4}{12} + \frac{3}{12}\frac{3}{12} = \frac{50}{144} \cong 0{,}3472$

Que los colores de las bolas extraídas sean distintos es el suceso contrario al anterior, por tanto:

$P(distinto\ color) = 1 - P(mismo\ color) = 1 - \frac{50}{144} = \frac{94}{144} = 0{,}6528$

b) Se extraen tres bolas al mismo tiempo. Probabilidad de que las tres sean de distinto color. Extraer tres bolas a la vez es como extraer tres bolas sin devolución. Las tres bolas son de distinto color en los siguientes resultados:

$P(A \cap R \cap V) = \frac{5}{12}\frac{4}{11}\frac{3}{10}$

$P(A \cap V \cap R) = \frac{5}{12}\frac{3}{11}\frac{4}{10}$

$P(R \cap A \cap V) = \frac{4}{12}\frac{5}{11}\frac{3}{10}$

$P(R \cap V \cap A) = \frac{4}{12}\frac{3}{11}\frac{5}{10}$

$P(V \cap R \cap A) = \frac{3}{12}\frac{4}{11}\frac{5}{10}$

$P(V \cap A \cap R) = \frac{4}{12}\frac{5}{11}\frac{4}{10}$

Por lo que, $P(bolas\ de\ distinto\ color\ al\ extraer\ tres\ bolas) = 6\frac{60}{1320} = \frac{3}{11} = 0{,}2727$

Si se extraen tres bolas al mismo tiempo, la probabilidad de que las tres sean de distinto color es $\frac{3}{11}$ o 0,2727.

Ejercicio

Una encuesta realizada por un banco muestra que el 60 % de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50 % tiene un préstamo personal y el 20 % tiene un préstamo de cada tipo. Se elige, al azar, un cliente de ese banco.

a) Calcule la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos préstamos.

b) Calcule la probabilidad de que tenga un préstamo hipotecario, sabiendo que no tiene un préstamo personal.

Solución

Llamemos H al suceso "elegido un cliente al azar de ese banco, este posee algún prestamo hipotecario" y llamemos P al suceso similar con un "préstamo personal". Los datos del problema nos indican que $P(H) = 0{,}6$, $P(P) = 0\prime 5$ y $P(H \bigcap P) = 0{,}2$. Podemos hacer, entonces, la siguiente tabla de contingencia, que completamos.

	P	$\overline{P}$	$Total$
H	0,2		0,6
$\overline{H}$			
	0.5		1

$\Longrightarrow$

	P	$\overline{P}$	$Total$
H	0,2	0.4	0,6
$\overline{H}$	0,3	0.1	0.4
	0.5	0,5	1

El hecho de que un cliente no tenga ningún préstamo hipotecario es $\overline{H} \bigcap \overline{P}$. Como se observa en la tabla, $P(\overline{H} \bigcap \overline{P}). = 0{,}1$

La probabilidad de que tenga un préstamo hipotecario, sabiendo que no tiene un préstamo personal, se calcula utilizando la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(H/\overline{P}) = \frac{P(H \bigcap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Ejercicio

Una enfermedad afecta al 10 % de la población. Una prueba de diagnóstico tiene las siguientes características: si se aplica a una persona con la enfermedad, da positivo en el 98 % de los casos; si se aplica a una persona que no tiene la enfermedad, da positivo en el 6 % de los casos. Se elige una persona, al azar, y se le aplica la prueba.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que dé positivo?**

b) **Si no da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona tenga la enfermedad?**

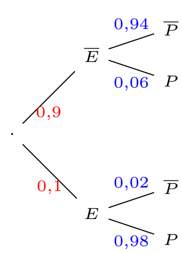
Solución

Llamemos E al suceso “elegido un individuo al azar, tiene la enfermedad”, y llamemos P al suceso “elegido un individuo al azar , da positivo al hacer la prueba de diagnóstico”.

Como hay un 10 % de personas que tienen la enfermedad, sabemos que $P(E) = 0{,}1$, y sin la enfermedad habrá $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 0{,}9$ (90 %).

Entre las personas que tienen la enfermedad, la prueba de diagnóstico da positivo en el 98 % de los casos, es decir, P(P/E) = 0´98. Igualmente, entre las personas que no tienen la enfermedad, la prueba da positivo en el 6 % de los casos, lo que significa que $P(P/\overline{E}) = 0{,}06$.

Completamos el siguiente diagrama en árbol.



Aplicando el T. de la Prob. Total, deducimos que la probabilidad de que un individuo, seleccionado al azar, dé positivo en la prueba es:

$$P(P) = P(E) \cdot P(P/E) + P(\overline{E}) \cdot P(P/\overline{E}) = 0{,}1 \cdot 0{,}98 + 0{,}9 \cdot 0{,}06 = 0{,}152.$$

Aplicando el T. de Bayes , seleccionado un individuo al azar que no ha dado positivo, la probabilidad de que tenga la enfermedad es:

$$P(E/\overline{P}) = \frac{P(E \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{P(\overline{P})P(\overline{P}/E)}{P(\overline{E})P(\overline{P}/\overline{E}) + P(E)P(\overline{P}/E)} =$$

$$= \frac{0{,}1 \cdot 0{,}02}{0{,}1 \cdot 0{,}02 + 09 \cdot 0{,}94} = \frac{2}{848} = 0{,}002358.$$

La probabilidad de que una persona tenga la enfermedad si no ha dado positivo es $\frac{2}{848} = \frac{1}{424}$ (aproximadamente, un 0'236 %).

Ejercicio

Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6 % de las resistencias producidas por A, el 5 % de las producidas por B y el 3 % de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a) **Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa.**

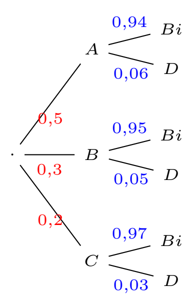
b) **Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.**

Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

c) **Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B.**

d) **Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B.**

Solución Puede confeccionarse el diagrama de árbol que sigue:



La letra D designa que la resistencia es defectuosa; Bi indica que está bien.

$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = 0,50 \cdot 0,06 + 0,30 \cdot 0,05 + 0,20 \cdot 0,03 = 0,051$.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}06}{0{,}051} = \frac{30}{51} = \frac{10}{17}$$

La probabilidad de que una resistencia sea fabricada por B es $P(B) = 0,30$; que sea fabricada por otro, A o C, es $P(\overline{B}) = 0{,}70$. Elegir 5 resistencias al azar y determinar cuántas de ellas han sido fabricadas por B, puede estudiarse como una binomial $B(5, 0{,}3)$. Si X mide el número de resistencias fabricadas por B, se tiene:

$P(X=3)=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} 0{,}3^3 0{,}7^2 = 0,1323.$

$P(X \geqq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} 0{,}3^0 0{,}7^5 - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} 0{,}3^1 0{,}7^4 =$ $0,47178.$

Ejercicio

El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales, lo hacen en hoteles, mientras que el resto lo hace en apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

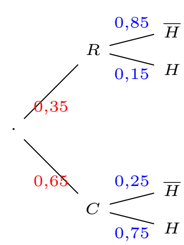
b) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Solución

Los sucesos a considerar son los siguientes:

C ="Alojarse en la Capital";R="Alojarse en zonas Rurales";H= "Alojarse en Hoteles";$\overline{H}$= "Alojarse en apartamentos turísticos"

Dibujamos el diagrama de árbol con las probabilidades



a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

Seguimos las ramas que acaban en H (y las sumamos)

$P(H) = 0{,}65 \cdot 0{,}75 + 0{,}35 \cdot 0{,}15 = \boxed{0.54}$

b) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Es una probabilidad condicionada(Bayes)

$P(R/H^c) = \frac{P(R\cap H^c)}{P(H^c)} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}85}{1-0{,}54} = \boxed{0.646\cdots}$

Ejercicio

En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. Se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y que el 20 % de los que viven en la periferia opina que el Ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

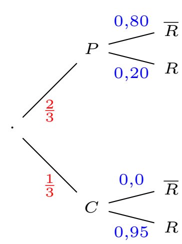
a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

c) Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

Solución

En el centro $\longrightarrow$ 5000
En la periferia $\longrightarrow$ 10000
Total personas $\longrightarrow$ 15000
En el centro $\longrightarrow \frac{5000}{15000} = \frac{1}{3}$
En la periferia $\longrightarrow \frac{10000}{15000} = \frac{2}{3}$
Diagrama de Árbol



a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

$$P(R) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}95 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}20 = \boxed{0.45}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

$$P(C \cap R) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}95 = \frac{95}{300} = \boxed{\frac{19}{60} \approx 0.316\cdots}$$

c) Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

$$P(C/R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{19}{60}}{0{,}45} \approx \boxed{0.703\cdots}$$

Ejercicio

El 55 % de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30 % usa vehículo propio y el resto va andando. El 65 % de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70 % de los que usan vehículo propio son hombres y el 52 % de los que van andando son mujeres.

a) **Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.**

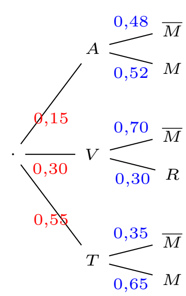
b) **Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?**

Solución

Considerando los sucesos: $T =$ "usar transporte público" $V =$ "usar vehículo propio" $A =$ "ir andando"

$M =$ "ser mujer" $\overline{M} = H =$ "*ser hombre*"

Podemos construir el siguiente diagrama de árbol:



Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que no sea mujer.Aplicamos el Teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{M}) = P(A)P(\overline{M}|A) + P(V)P(\overline{M}|V) + P(T)P(\overline{M}|T)$$

$$= 0{,}15 \cdot 0{,}48 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}55 \cdot 0{,}35 = 0{,}1925 + 0{,}2100 + 0{,}0720 = \boxed{0.4745}$$

Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?

$$P(A/H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}0720}{0{,}4745} = \boxed{0.1517 \cdots}$$

Ejercicio

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.**

b) **Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.**

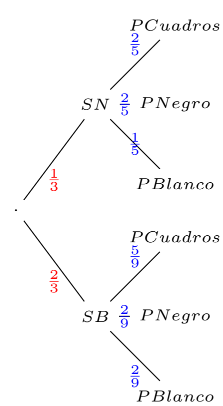
c) **Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.**

Solución

Considerando los sucesos: SB = "Elegir sombrero blanco" SN = "Elegir sombrero negro"

PB = "Elegir pañuelo blanco" PN = "Elegir pañuelo negro" PC="elegir pañuelo de cuadros"

Podemos construir el siguiente diagrama de árbol:



a)$P((SB\cap PN)\cup(SN\cap PB)) = P(SB)P(PN|SB)+P(SN)P(PB|SN) = \frac{2}{3}\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\frac{1}{5} = 0{,}2148$

b)Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

$$P(SB)P(PN|SB)+P(SB)P(PC|SB)+P(SN)P(PB|SN)$$

$$+P(SN)P(PN|SN)+P(SN)P(PC|SN) = 0{,}851$$

$$\frac{2}{3}\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\frac{2}{5} = 0{,}851$$

c)Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

$$P(SN|PC) = \frac{P(SN\cap PC)}{P(PC)} = \frac{P(SN)P(PC|SN)}{P(SN)P(PC|SN)+P(SB)P(PC|SB)} = 0{,}27$$