S3r4 | 2022

Distribución Normal : Ejercicios resueltos

Bachillerato II

CCNN CCSS

1. **Los salarios mensuales de los recién graduados que acceden a su primer empleo se distribuyen según una ley normal de media 1300 € y desviación típica 600 €. Calcular el porcentaje de graduados que cobran:**

   a) **Menos de 600 € al mes**

   b) **Entre 1000 y 1500 € al mes**

   c) **Más de 2200 € al mes**

   Solución:

   Sea X: variable aleatoria "Salarios mensuales en €"

   La distribución de la variable X es $N(1300, 600)$; $\mu = 1300; \sigma = 600$

   Hay que tipificar la variable para obtener las probabilidades a partir de la tabla $N(0, 1)$.

   $P(X < 600) = P(Z < \frac{600-1300}{600})$
   $P(Z < -1,17) = 1 - P(Z < 1,17) = 1 - 0,8790 = 0,1210$

   Por tanto, el 12,1 % de los recién graduados cobra menos de 600 € al mes en su primer trabajo.

   b) $P(1000 < X < 1500) = P(\frac{1000-1300}{600} < Z < \frac{1500-1300}{600}) =$
   $= P(-0,5 < Z < 0,33) = P(Z < 0,33) - [1 - P(Z < 0,5)] = 0,6293 - (1 - 0,6915) = 0,3208$

   Por tanto, el 32,08 % de los recién graduados cobra entre 1000 y 1500 € al mes en su primer trabajo.␣

   c)$P(X > 2200) = P(Z > \frac{2200-1300}{600})$
   $= P(Z > 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

   Por lo que el $6,68$ % de los recién graduados cobra más de2200€ al mes en su primer trabajo.

2. **Se estima que el tiempo en horas que se necesita para memorizar un tema de Historia de la Filosofía es una variable aleatoria normal, cuya media y varianza se desconocen.**

   a) **Calcular la media y la desviación típica de esta distribución si se sabe que las tres cuartas partes de las estudiantes necesitan más de 3 horas y que el 5 % necesita más de 6 horas para memorizarlo.**

   Solución:

   X : variable aleatoria "tiempo, en horas, necesario para memorizar un tema de Historia de la Filosofía"

   La distribución de la variable X es $N(\mu, \sigma)$, siendo ambos parámetros desconocidos. -

   Las tres cuartas partes de las estudiantes necesitan más de 3 horas $\rightarrow$ $P(X > 3) = 0,75$

   El 5 % necesita más de 6 horas $\rightarrow P(X > 6) = 0,05$

   Tipificando ambas expresiones:

   $P(X > 3) = 0,75 \rightarrow P(Z > \frac{3-\mu}{\sigma}) = 0,75 \;\Rightarrow\; P(Z \leq \frac{3-\mu}{\sigma}) = 1 - 0,75 = 0,25$

   $P(X > 6) = 0,05 \rightarrow P(Z > \frac{6-\mu}{\sigma}) = 0,05 \Rightarrow\; P(Z \leq \frac{6-\mu}{\sigma}) = 1 - 0,05 = 0,95$

   Buscamos en la tabla $N(0,1)$ los valores hallados:

   $0,25$ no está en la tabla equivale a $0,75 \rightarrow 0,75$ está entre $0,7486$ y $0,7517$ $\rightarrow$ le corresponde $-0,675$ (hay que cambiar el signo)

   0,95 está entre $0,9495$ y $0,905 \rightarrow$ le corresponde $1,645$

   Resolviendo el sistema: $\begin{array}{c} P(Z < \frac{3-\mu}{\sigma}) = 0,25 \;\rightarrow\; \frac{3-\mu}{\sigma} = -0,675 \\ P(Z < \frac{3-\mu}{\sigma}) = 0,95 \;\rightarrow\; \frac{6-\mu}{\sigma} = 1,645 \end{array}$ ->

   $$\begin{cases} \mu - 0,675\sigma & = 3 \\ \mu + 1,645\sigma & =6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu = & 3,8728 \; ; \; \sigma = 1,2931 \end{cases}$$

3. **La longitud de cierto tipo de peces sigue una distribución normal de media** $100mm$ **y desviación típica** $9mm$**. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de esos peces mida entre** $82mm$ **y** $91mm$**?**

   Solución:

   La distribución es $N(100,9)$. La variable X que mide la longitud de esos peces se tipifica haciendo el cambio $\frac{X-100}{9} \approx Z$.

   Luego: $P(X<91)=P(Z<\frac{91-100}{9})=$

   $$P(Z<–1)=1–P(Z<1)=10,8713=0,1587$$

   .

   $P(X<82)=P(Z<\frac{82-100}{9}=P(Z<-2)=1-0,9772=0,0228$

   Luego

   $P(82<X<91)=P(X<91)–P(X<82)=0,1587–0,0228=0,1359$

4. **Se ha aplicado un test de rendimiento a 500 atletas. Las puntuaciones obtenidas se distribuyen según una normal de media 80 y desviación típica 12.**

   a) **¿Qué puntuación separa al 25 % de los atletas con menos rendimiento?**

   b) **¿A partir de qué puntuación se encuentra el 25 % de los atletas con mayor rendimiento?**

   Solución:

   Sea X la variable que indica las puntuaciones obtenidas. Se trata de una distribución $N(80; 12)$.

   Sea a el valor de la variable que separa el 25 % de los atletas con menor rendimiento.

   $0'025 = P(X \leq a) = P(Z \leq \frac{x1-80}{12})$. Buscamos en las tablas $P(Z \leq -A) = 0,75$. Encontramos $P(Z \leq 0,67) = 0,7486$ y $P(Z \leq 0,68) = 0,7517$. Tomamos 0,67, ya que es el valor cuya probabilidad más se aproxima.

   $\frac{a-80}{12} = -0{,}67 \Rightarrow a = -0{,}67 \cdot 12 + 80 = 71{,}96$.

   Por tanto, el 25 % de los atletas con menor rendimiento obtiene puntuaciones en el test inferiores a $71'96$.

   Sea b el valor de la variable que separa el 25 % de los atletas con mayor rendimiento.

   $0{,}025 = P(X > b) = 1 - P(X \leq b) \Rightarrow 0{,}075 = P(X \leq b) = P(Z \leq \frac{b-80}{12}$). Encontramos $P(Z \leq 0{,}67) = 0{,}7486$ y $P(Z \leq 0{,}68) = 0{,}7517$. tomamos $0'67$, ya que el el valor cuya probabilidad más se aproxima.

   $$\frac{b-80}{12} = 0{,}67 \Rightarrow b = 0{,}67 \cdot 12 + 80 = 88{,}04$$

   Por tanto, el 25 % de los atletas con mayor rendimiento en el test obtendrán puntuaciones superiores a $88'04$

5. **El peso de los adultos de una población numerosa se distribuye normalmente con media $65kg$ y desviación típica $3kg$. Se eligen dos individuos al azar. Calculando las correspondientes probabilidades, justifica qué es más probable:**

   a) **Que cada uno de los individuos tenga un peso comprendido entre 63'5 y 66'5 kg.**

   b) **Que uno de ellos tenga un peso comprendido entre 62 y 68 kg y el otro tenga un peso no comprendido entre 62 y 68 kg.**

   Solución:

   Sea X la variable aleatoria que expresa el peso, en kg, de un adulto. Se trata de una distribución $N(65; 3)$.

   (a)P(2 individuos pesen entre $63'5$ y $66'5$)

   $= P(63{,}5 \leq X \leq 66{,}5) \cdot P(63{,}5 \leq X \leq 66{,}5) =$

   $[P(63{,}5 \leq X \leq 66{,}5)]2 = P(\frac{63{,}5-65}{3} < Z < \frac{66{,}5-65}{3})$

   $[P(-0{,}5 \leq Z \leq 0{,}5]^2 = [P(Z \leq 0{,}5) - P(Z \leq -0{,}5)]^2$

   $=[2 \cdot P(Z \leq 0{,}5) - 1]^2 = (2 \cdot 0{,}6915 - 1)^2 = 0{,}01467$

   (b) La probabilidad pedida es una probabilidad de una intersección de 2 sucesos independientes, por lo que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

   $P(62 \leq X \leq 68) = P(\frac{62-65}{3} \leq Z \leq \frac{68-65}{3})=$

   $= P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) =$

   $= 2 \cdot P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0{,}84213 - 0{,}1 = 0{,}68$

   P(uno pese entre 62 y 68, y el otro no) $=$

   $2 \cdot P(62 \leq X \leq 68) \cdot [1 - P(62 \leq X \leq 68)] =$

   $= 2 \cdot 0{,}6826 \cdot 0{,}3174 = 0{,}4333$

   Multiplicamos por 2, ya que existen dos formas de que uno tenga su peso en el intervalo descrito y el otro no, y al revés.

   Luego es más probable el segundo caso que el primero.

6. **Aprox de Binomial**

   a) **En una determinada población de árboles, el 20 % tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.**

   b) **Si X sigue una distribución normal de media 15 y , ¿cuál es la desviación típica?**

   Definimos el siguiente suceso:$X =$ "nº de árboles con más de 30 años".

   Este apartado lo podemos resolver de dos maneras distintas. La primera haciendo el cálculo con la propia distribución binomial. Recordamos que la fórmula para el cálculo de probabilidades en este caso es la siguiente:

   $$P(X = r) = \left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right) p^r (1-p)^{n-r}$$

   Si la aplicamos:$P(X = 4) = \left(\begin{array}{c} 40 \\ 4 \end{array} \right) 0,2^4 (0,8)^{36} = \frac{40!}{4!36!} 0,2^4 (0,8)^{36} =$ $0,0475$

   La segunda de las maneras es aproximando la distribución binomial por la normal, para ello:

   $np = 40 \cdot 0{,}2 = 8 > 5$; $nq = 40 \cdot 0{,}8 = 32 > 5$; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{40 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} =$ $2,53$

   Como vemos se puede aproximar a una distribución normal.$X \simeq N(8, 2, 53)$

   Ahora calculamos la prob. pedida, haciendo antes la corrección de Yates:

   $P(X = 4) = P(3,5 < X < 4,5) = P(\frac{3{,}5-8}{2{,}53} <= Z <= \frac{4{,}5-8}{2{,}53}) =$

   $P(-1{,}78 < Z < -1{,}38) = P(1{,}38 < Z < 1{,}78) = P(Z < 1{,}78) - P(Z <$ $1{,}38)$

   $= 0,9625 - 0,9162 = 0,0463$

   Vemos que los resultados son tremendamente parecidos. Eso sí, cabe recordar que, con la distribución normal hacemos una aproximación, en este caso buena, pero el valor exacto es el primero, el que calculamos con la distribución binomial.

   b) Nos dan una normal de la que no conocemos su σ:$X \simeq N(15, \sigma)$.La desviación la podemos calcular a partir de la probabilidad que nos dan:$P(X \leq 18) = 0,6915$; $P(\frac{X-15}{\sigma} \leq \frac{18-15}{\sigma}) = 0,6915$

   Ahora, sabemos que hay un valor que deja detrás de sí una probabilidad de 0,6915. Para calcularlo vamos a la tabla de la distribución normal y buscamos esa probabilidad. Encontramos que ese valor es 0,50, por lo tanto:

   $$\frac{18-15}{\sigma} = 0,5 \Longrightarrow \sigma = 6$$

   Así pues, la desviación típica que nos piden es 6.

7. **Se sabe que una máquina produce un 5 % de piezas defectuosas. Calcula la probabilidad de que sean defectuosas en una muestra de 500 piezas:**

   a) **A lo sumo 30**

   b) **Entre 30 y 50**

   Solución:

   X $\equiv$ Número de piezas defectuosas.

   $X \ \sim B(500; 0,05)$ Es una binomial donde $p = 0,05$;$n = 500$

   $P(x \leq 30)$ y $P(30 \leq x \leq 50)$

   Se decide si se puede normalizar:

   $np = 500 \cdot 0,05 = 25 > 5$

   $nq = 500 \cdot 0,95 = 475 > 5$ .Se puede aproximar a una normal.

   Se normaliza: µ $= np = 500 \cdot 0,05 = 25$

   $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500} \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 4,87$

   $X \sim B(500; 0,05) \Rightarrow X \sim N(25; 4,87)$

   Se corrige la continuidad y se tipifica:

   Apartado a)

   $P(x \leq 30) \Rightarrow P(x \leq 30,5) = P(X \leq 30, \frac{5–25}{4,87}) = P(Z \leq 1,13) = 0,8708$

   Apartado b)

   $P(30 \leq x \leq 50) \Rightarrow P(29,5 \leq x \leq 50,5) =$

   $= P(29,5–254,87 \leq x \leq 50,5–254,87) =$

   $= P(0,92 \leq z \leq 5,24) = P(z \leq 5,24)–P(z \leq 0,92) =$

   $= 1–0,8212 = 0,1788$

8. **El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco se distribuye como una distribución normal de media 30 periódicos y desviación típica $\sqrt{2}$. Determina:**

   a) **La probabilidad de que en un día se vendan entre 28 y 31 periódicos**

   b) **Justifica si es cierto que la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0.1**

   c) **El dueño del quiosco considera que su puesto está situado en una buena zona, ya que sabe que hay más de un 80 % de posibilidades de vender más de 29 periódicos diarios. ¿Está en lo cierto?Justifícalo**

   Solución:

   X presenta el número de periódicos vendidos por el quiosco en un día y según los datos del problema esta variable se distribuye como una normal con media

   $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{2} \rightarrow X\tilde{\ }N(30,\sqrt{2})$.

   $P(28 \leq X \leq 31) = tipificando$; $Z = \frac{X-30}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

   $P(28 - 30\sqrt{2} \leq Z \leq 31 - 30\sqrt{2}) = P(-1{,}41 \leq Z \leq 0{,}71)$

   $= P(z \leq 0{,}71) - P(Z \leq -1{,}41) = 0{,}7611 - (1 - 0{,}9207) = 0{,}6818 \rightarrow 68{,}18$

   La probabilidad de vender entre 28 y 31 periódicos es de 0,68

   b)$P(X > 32) = tipificando\ Z = \frac{X-30}{\sqrt{2}} \sim\ N(0,1)$

   $P(Z > \frac{32-30}{\sqrt{2}}) = P(Z > 1{,}41) = 1 - P(Z \leq 1{,}41)$

   $= 1 - 0{,}9207 = 0{,}0793 \approx 8\,\%$

   Efectivamente es cierto, ya que la probabilidad de vender más de 32 periódicos no llega al 8 %.

   c)$P(X > 29) = P(Z > \frac{29-30}{\sqrt{2}}) =$

   $P(Z > -0{,}71) = P(Z \leq 0{,}71) = 0{,}7611 = 76{,}11\,\%$

   Por lo que no es cierto que tenga más de un 80 % de posibilidades de vender más de 29 periódicos, sino un 76 %. La afirmación es falsa

9. **En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000€ sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000€ realizado en dicho banco:**

   a) **Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses.**

   b) **¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años?**

   c) **¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años?**

Solución

Definimos la variable X : "tiempo de devolución de un préstamo de 18000€":

$$X \sim \; N(60, 8)$$

;

a)Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses. Debemo tipificar la variable X

$$P(X < 70) = P(Z < \frac{70-60}{8}) = P(Z < 1{,}25) = 0{,}8944$$

b)¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años?

$P(X > 4) = (Z > 48 - 608) = P(Z > -1{,}5) =$

$= P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$

c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años?

$P(4 < X < 6) = P(48 < X < 72) = P(X < 72) - P(Z < 48) =$

$= P(Z < 1{,}5) - P(Z < -1{,}5) = 0{,}9332 - (1 - 0{,}9332) =$

$= 0{,}9332 - 0{,}0668 = 0{,}8664; 86,64\,\%$

10. **Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos.**

    a) **Si se lo toman 100 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes?**

    b) **Si se lo toman 225 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes?**

    c) **¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes?**

Solución:

a) Si llamamos a p la probabilidad del suceso eliminar el acné, tenemos que p = 0´8

Llamamos X al número de pacientes de entre los 100 que se curan.

La probabilidad pedida es $P(X > 75)$ ya que el 75 % de 100 =75 y como X˜B(100,0´8) pues se trata de 100 sucesos independientes con idéntica probabilidad de éxito:

$P(X > 75)$ =Aproximaremos con una normal si es p

osible:

$np = 100 \cdot 0{,}8 = 80$

$nq = 100 \cdot 0{,}2 = 20$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 4$ .Por lo que $X' \sim N(80, 4)$

$$P(X' > 75) = P(Z > -1\prime 25) = P(Z < 1{,}25) = 0\prime 8944$$

b) $X \ \sim B(225, 0\prime 8)$

$np = 225 \cdot 0{,}8 = 180 > 5$

$nq = 225 \cdot 0{,}2 = 45 > 5$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{225 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 6$ .Por lo que $X' \sim N(180, 6)$

$P(170 < X < 190) = P(169{,}5 < X' < 190{,}5) =$

$= P(Z < \frac{190{,}5-180}{6}) - P(Z < \frac{169{,}5-180}{6})$ Ajuste de Yates

=$P(Z < 1,75)$-$P(Z < -1,75)$

$= P(Z =< 1{,}75) - P(Z \geq 1{,}75) = P(Z < 1{,}75) - [1 - P(Z < 1{,}75)] =$

$= 2 \cdot P(Z < 1{,}75) - 1 = 2 \cdot P(Z < 1{,}75) - 1$=0.9599

c) Si llamamos a q la probabilidad del suceso eliminar el acné, tenemos que q = 0´8 Llamamos Y al número de pacientes de entre los 100 que no se curan: E(y) = nq = 500 · 0,2 = 100 El número esperado de pacientes sobre los que no se eliminará el acné es 100.