Probabilidad

Ejercicios resueltos

Evau 2022

BY S3R4

1. **Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:**

   a) **(1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.**

   b) **(0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.**

   c) **(0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.**

   Solución

   Sea B1 el suceso: «la primera bola es blanca» B2= el suceso «La segunda bola es blanca», N1=«la primera bola es negra». Si hay independencia $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

   a) $P(B2) = P((N1 \cup B1) \cap B2) = P(B1 \cap B2) + P(N1 \cap B2) = P(B1)P(B2|B1) + P(N1)P(B2|N1) = \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{20} + \frac{12}{19} \cdot \frac{9}{20} = 0{,}395.$

   b) $P(B1 \cap N2) + P(N1 \cap B2) = 7/19 \cdot 14/20 + 12/19 \cdot 9/20 = 0{,}542.$

   c) $P(N1|B2) = \frac{12/19 \cdot 9/20}{15/38} = 18/25 = 0{,}72$ (Modelo 2022-Opcion A)

2. **Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0.2 y 0.3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:**

   a) **(0.5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.**

   b) **(0.5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.**

   c) **(0.75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.**

   d) **(0.75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.(Modelo 2022-Opcion B)**

   Solución

   a) P(A $\bigcap$ B) = 0.2 · 0.3 = 0.06 .

   b) $P(\overline{A} \bigcap \overline{B}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$

   c) P((A ∩ $\overline{B}$) $\bigcup$ ($\overline{A}$∩ B)) = P(A ∩ $\overline{B}$) + P($\overline{A}$ ∩ B) = 0.2 · 0.7 + 0.8 · 0.3 = 0.38 .

   d) Consideramos $X \sim B(10, 0{,}2)$ Entonces $P(X = 3) = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} 0{,}2^3(1 - 0{,}2)^7 = 0{,}2013265$

3. **Segun el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros.**

   a) **(0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.**

   b) **(0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.**

   c) **(1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.**

   Solución

a) Llamamos X = “Número de mujeres en 10 consejeros”, $X \sim B(10; 0{,}277)$.

$P(X = 5) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} 0{,}277^5(1 - 0{,}277)^5 \approx 0{,}0811878$

b) Al menos un hombre es lo contrario de ser todas mujeres,luego $1 - P(X = 10) = 1 - 0{,}27710 \approx 0{,}999997$.

c) Tenemos que $p = 0{,}277$, $q = 0{,}723$ y $n = 200$. Veamos si se cumplen las condiciones de aproximación:

Como $np > 5$ y $nq > 5 \Rightarrow$ la variable X se puede aproximar por Normal $N(np, \sqrt{npq})$

$$X \sim N(55{,}4; 6{,}33)$$

$P(X \geqslant 70) = P(X' \geqslant 69{,}5) \overset{tipificando}{=} P(Z \geqslant 2{,}23) = 1 - 0{,}9871 = 0{,}0129$.

4. **De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:**

   a) **Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.**

   b) **Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.**

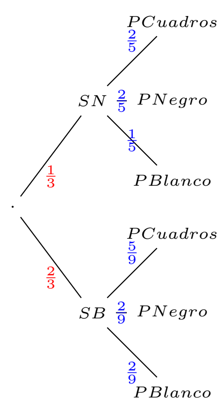
   c) **Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.(Ordinaria 2022 -Opción B)**

Solución

Considerando los sucesos: SB = “Elegir sombrero blanco” SN = “Elegir sombrero negro”

PB = “Elegir pañuelo blanco” PN = “Elegir pañuelo negro” PC=“elegir pañuelo de cuadros”

Podemos construir el siguiente diagrama de árbol:



a)$P((SB \cap PN) \cup (SN \cap PB)) = P(SB)P(PN|SB) + P(SN)P(PB|SN) = \frac{2}{3}\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\frac{1}{5} = 0{,}2148$

b)Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

$$P(SB)P(PN|SB) + P(SB)P(PC|SB) + P(SN)P(PB|SN)$$

$$+P(SN)P(PN|SN)+P(SN)P(PC|SN)=0{,}851$$

$$\frac{2}{3}\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\frac{2}{5}=0{,}851$$

c)Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

$$P(SN|PC)=\frac{P(SN\cap PC)}{P(PC)}=\frac{P(SN)P(PC|SN)}{P(SN)P(PC|SN)+P(SB)P(PC|SB)}=\frac{\frac{1}{3}\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}\frac{5}{9}++\frac{1}{3}\frac{2}{5}}=\frac{9}{34}=0{,}26$$

5. **En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62 % y la de que compre el producto B es de un 40 %. Se observa, además, que el 12 % de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:**

   a) **(0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.**

   b) **(0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.**

   c) **(1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximacion de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B mas de 1250 personas. (Coincidencias 2022-Opción A)**

   Solución

   a)Tenemos que: P(A) = 0.62, P(B) = 0.40 y $P(A\cap B)=0{,}12=\frac{12}{100}=\frac{6}{50}=\frac{3}{25}$

   $P(A|\overline{B})=\frac{P(A\bigcap\overline{B})}{1-P(B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{0{,}6}=\frac{0{,}62-0{,}12}{0{,}6}=\frac{0{,}5}{0{,}6}=\frac{5}{6}$.

   b) $P(\overline{A}\bigcap\overline{B})=P(\overline{A\bigcup B})=1-P(A\bigcup B)$.

   $P(A\cup B)=1-0{,}9=0{,}1$=0.62+0.4-0.12=0.9

   $P(\overline{A}\bigcap\overline{B})=1-0{,}9=0{,}1$

   c)Tenemos $p=0{,}4, q=0{,}6$ y $n=3000\Rightarrow X\sim B(3000;0{,}4)$.

   $np=3000\cdot 0{,}4>5; nq=3000\cdot 0{,}6>5;\ \mu=np=1200$

   Aproximación por la Normal: $X'\sim N(1200;26{,}83)$

   $np=3000\cdot 0{,}4>5; nq=3000\cdot 0{,}6>5;\ \mu=np=1200$

   $P(X>1250)=P(X'\geqslant 1250{,}5)=P(Z\geqslant 1{,}88)=0{,}0301$.

6. **Una influencer famosa publica en su Instagram un 20 % de fotografías dedicadas a viajes, un 50 % referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El 5 % de las publicaciones de viajes reciben menos de 20 000 Me gusta y lo mismo ocurre con el 20 % de las de moda y con el 35 % de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:**

   a) **(1.25 puntos) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20 000 Me gusta.**

b) **(1.25 puntos) Si tiene menos de 20 000 Me gusta, calcular la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes(Coincidencias 2022-Opción B)**

Solución

Consideremos los sucesos V = "Fotografía sobre viajes", M = "Fotografía sobre moda" , Ma = "Fotografía sobre maternidad" y A ="Tener más de 20 000 Me gusta".

Por el teorema de la probabilidad total :

a)$P(A) = P(A \cap (V \cup M \cup Ma)) = P(A \cap V) + P(A \cap M) + P(A \cap Ma)$ =$P(V)P(A|V) + P(M)P(A|M) + P(Ma)P(A|Ma)$= 0.2 · 0.95 + 0.5 · 0.8 + 0.3 · 0.65 = 0.785.

b)Teorema de Bayes :$P(V|\overline{A}) = \frac{P(V\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(V)P(\overline{A}|V)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}05}{1-0{,}785} \approx 0.047$

7. **En una comunidad autonoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matematicas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:**

   a) **(0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos esten matriculados en Matemáticas II.**

   b) **(0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos este matriculado en Matemáticas II.**

   c) **(1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribucion binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos esten matriculados en Matemáticas II. (Extraordinaria 2022-Opción A)**

Solución

a)Consideramos éxito =Estar matriculado em Mat II $p = P(\acute{e}xito) = 3/5 = 0{,}6$ y consideramos el problema como un problema de binomial.

Tenemos p = 0.6, q = 0.4 y n = 6 $\Rightarrow X \sim B(6; 0{,}6)$.

$$P(X=4) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} 0{,}6^4(1-0{,}6)^2 = 0{,}31104$$

b)$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}004096 = 0{,}995904$.

c)Resolvemos este apartado aproximando la binomial

Tenemos $p = 0{,}6, q = 0{,}4\ y\ n = 120 \Rightarrow np > 5; nq > 5$

$X \sim B(120; 0{,}6)$. Aproximación por la Normal X'∼N(72; 5.37).

$P(X > 60) = P(X\prime \geqslant 60{,}5) \overset{tipificando}{=} P(Z \geqslant \frac{60{,}5-72}{5{,}37}) = P(Z \geqslant -2{,}14) = 0{,}9838$.

8. **Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:**

   a) **(1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.**

   b) **(1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación. (Extraordinaria 2022-Opción B)**

Solución

Llamamos E al suceso «el producto es destinado a la exportación».

	A	B	C	$Total$
$Expor$	40 %	60 %	20 %	
No	60 %	40 %	80 %	
$Total$	4	2	1	7

Tenemos que $P(A) = \frac{4}{7}$, $P(B) = \frac{2}{7}$ y $P(C) = \frac{1}{7}$. Por lo tanto:

$P(E) = P(E \cap (A \cup B \cup C)) = P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C) = \frac{4}{7} \cdot 0{,}4 + \frac{2}{7} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{7} \cdot 0{,}2 = \frac{3}{7}$.

$P(C|E) = \frac{P(C \bigcap E)}{P(E)} = \frac{P(C)P(E|C)}{\frac{3}{7}} \frac{\frac{1}{7}0{,}2}{\frac{3}{7}} = \frac{0{,}2}{3} = \frac{1}{15}$.

9. **El 60 % de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30 % utiliza un ordenador portátil y el 25 % no usa ninguno de los dos dispositivos.**

   a) **(0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.**

   b) **(0.5 puntos) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar? Justifique la respuesta.**

   c) **(0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.**

   d) **(1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trabajar un movil. (Coincidencia Extraordinaria 2022-Opción A)**

Solución

a)Llamamos A = “utiliza el movil para trabajar” y por B = “utiliza el ordenador portatil para trabajar”, nos piden

$P(A \bigcap B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcup B) = 0{,}60 + 0{,}30 - (1 - 0{,}25) = 0{,}15$.

b)Los sucesos no son independientes ya que $P(A \bigcap B) = 0{,}15 \neq P(A) \cdot P(B) = 0{,}60 \cdot 0{,}30 = 0{,}18$.

c)El suceso B se puede escribir como B = (A $\bigcap$ B) $\bigcup$ ($\overline{A}$ $\bigcap$ B), una unión de sucesos incompatibles.

P($\overline{A}$ $\bigcap$ B)= P(B) − P(A $\bigcap$ B) = 0.30 − 0.15 = 0.15.

d)Sea X = “numero de individuos que utilizan un móvil de entre 10 elegidos al azar”, el éxito es E=«utilizar el móvil para trabajar» $P(\acute{e}xito) = 0{,}6$

X sigue una distribución Binomial(n, p) de parametros, n = 10 y p = P(E) = 0.6.

$$P(X = 8) = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} 0{,}6^8 (1 - 0{,}6)^2 = 0{,}121$$

10. **Sabiendo que P(A|B) = 1/3 , P(B|A) = 1/14 y P($\overline{A}$ $\bigcap$ $\overline{B}$) = 7/15 , se pide:**

    a) **(1.5 puntos) Probar razonadamente que P(A $\bigcap$ B) = $\frac{1}{30}$.**

    b) **(1 punto) Calcular P(A) y P(B).(Coincidencia Extraordinaria 2022-Opción B)**

Solución

a)$P(\overline{A}\bigcap\overline{B})=\frac{7}{15}=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$. Entonces $P(A\cup B)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\frac{1}{3}\Rightarrow P(B)=3P(A\bigcap B)$ y $P(B|A)=P(A\bigcap B)P(A)=\frac{1}{14}\Rightarrow$

$P(A)=14P(A\bigcap B)$. .

$P(\overline{A}\bigcap\overline{B})=\frac{7}{15}=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$. Entonces $P(A\cup B)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$

Por lo tanto, tenemos que $P(A\bigcap B)=14P(A\bigcap B)+3P(A\bigcap B)-\frac{8}{15}\Rightarrow P(A\bigcap B)=\frac{1}{20}$.

b)$P(A)=14\cdot\frac{1}{30}=\frac{7}{15}\ \ y\ \ ,P(B)=3\cdot\frac{1}{30}=\frac{1}{10}$