Probabilidad

Ejercicios resueltos

Evau 2024

BY S3R4

1. **La selección española competirá en la Copa Mundial Femenina de Fútbol 2023. En los dos primeros partidos de la fase de grupos, que consta de tres partidos, la probabilidad de ganar cada uno de ellos es del** 80 % **Sin embargo, debido al aumento en la moral de las jugadoras, si ganan los dos primeros partidos la probabilidad de ganar el tercero asciende al 90 %. En caso contrario, la probabilidad de ganar el tercer partido se mantendra en el 80 %. Se pide:**

   a) **(0.5 puntos) Determinar la probabilidad de que la seleccion española no gane ningún partido durante la fase de grupos.**

   b) **(1 punto) Calcular la probabilidad de que la selección gane el tercer partido de la fase de grupos.**

   c) **(1 punto) Si sabemos que la selección ha ganado el tercer partido, determinar la probabilidad de que no haya ganado alguno de los dos encuentros anteriores. (2024 Modelo)**

   Solución

   Primero necesitamos saber la probabilidad de perder un partido, que es el suceso complementario de ganarlo:

   $P(perder) = 1 - P(ganar) = 1 - 0,8 = 0,2$

   Los sucesos son independientes ya que ganar un partido no implica ganar o perder el siguiente.$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

   Como no han ganado los dos primeros partidos,

   $P(perder3partidos) = 0,2^3 = 0,08 = 8\,\%$

   b) Si llamamos A al evento «ganar los dos primeros partidos de la fase de clasificación» y B el evento «ganar el tercer partido» .

   Tenemos:

   $P(A) = 0,8^2 = 0,64$

   $P(B|A) = 0,9$

   $P(B|\overline{A}) = 0,8$

   Empleando el Teorema de la Probabilidad Total obtenemos la probabilidad de ganar el tercer partido de la fase de grupo:

   $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = 0,64 \cdot 0,9 + (1 - 0,64) \cdot 0,8 = 0,864$

   Es decir, hay un 86,4 % de probabilidades de que gane el tercer partido de la fase de grupo.

   c) En este caso, recurriremos al teorema de Bayes:

$$P(\overline{A}|B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A})P(B) = \frac{0,64 \cdot 0,8}{0,864} = 0{,}3333$$

2. **Sabiendo que** $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$**,**$P(A|B) - P(B|A) = \frac{1}{24}$**;y** $P(A \bigcap \overline{B}) = \frac{3}{10}$**, se pide:**

   a) **(1.5 puntos) Calcular P(A $\bigcap$ B) y P(B).**

   b) **(1 punto) Calcular P(C), siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que** $P(A \bigcup C) = \frac{14}{25}$**(Ordinaria 2024)**

   Solución

   a) Si $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, sabemos que $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$ y $P(A \bigcap \overline{B}) = P(A) - P(A \bigcap B)$

   Así pues:

   $P(A \bigcap B) = P(A) - P(A \bigcap \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}) - P(A \bigcap \overline{B}) = 1 - \frac{11}{20} - \frac{3}{10} = \frac{3}{20} = 0,15$

   Empleando la definición de probabilidad condicionada:

   $P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$ y $P(B|A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)}$ con lo que:

   $P(B|A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{20}}{(1 - \frac{11}{20})} = \frac{1}{3} = 0,666$

   $P(A|B) - P(B|A) = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$

   $\frac{3/20}{P(B)} = (\frac{1}{24} + \frac{1}{3}) \Rightarrow \frac{\frac{3}{20}}{P(B)} = \frac{3}{8} \Rightarrow P(B) = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} = 0,4$

   b) Como sabemos que $P(A \bigcup C) = P(A) + P(C) - P(A \bigcap C)$ y al ser A y C dos sucesos independientes $P(A) \cdot P(C) = P(A \bigcap C)$ tenemos:

   $P(A \bigcup C) = P(A) + P(C) - P(A \bigcap C) = P(A) + P(C) - P(A) \cdot P(C) = P(A) + P(C)(1 - P(A))$

   De la anterior expresión se obtiene

   $P(C)(1 - P(A)) = P(A \bigcup C) - P(A) \Rightarrow P(C) = \frac{P(A \bigcup C) - P(A)}{(1 - P(A))}$

   $= \frac{\frac{14}{25} - \frac{9}{20}}{\frac{11}{20}} = \frac{1}{5} = 0,2$

3. **En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles,** A_1 **de probabilidad 0.5 y** A_2 **de probabilidad** $0{,}3$ **y se considera** $A_3 = \overline{A_1 \bigcup A_2}$**. De cierto suceso B de probabilidad** $0{,}4$ **se sabe que es independiente de** A_1 **y que la probabilidad del suceso** $A_3 \bigcap B$ **es 0.1. Con estos datos se pide:**

   a) **(1 punto) Calcular la probabilidad de** A_3**.**

   b) **(1.5 puntos) Decidir si** B **y** A_2 **son independientes. (2024 Modelo)**

   Solución

   a)Calcular la probabilidad de A_3

   Como son incompatibles $P(A_1 \bigcup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

$P(A_3) = 1 - P(A_1 \bigcup A_2) = 1 - P(A_1) - P(A_2) = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$
Los sucesos A_1, A_2 y A_3 forman una partición del espacio muestral, es decir $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 = \Omega$
b) Decidir si B y A_2 son independientes
Para que sean independientes debemos comprobar si $P(B \bigcap A_2) = P(B)P(A_2)$.
La probabilidad del suceso B se puede interpretar a partir de la intersección con los sucesos $A_1, A_2\ y\ A_3$.
$P(B) = P(B \bigcap A_1) + P(B \bigcap A_2) + P(B \bigcap A_3)$,
de donde
$P(B \bigcap A_2) = P(B) - P(B \bigcap A_1) - P(B \bigcap A_3) = 0,4 - 0,4 \cdot 0,5 - 0,1 = 0,1$.
De este modo se puede comparar con el producto de probabilidades de $B\ y\ A_2$.
$0,1 \neq 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$
Como se puede comprobar, no son sucesos independientes

4. **Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego lanzamos dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:**

    a) **(1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.**

    b) **(1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.**

    Solución

    a) Las posibles combinaciones que dan una puntuación de 10 son:

    - sacar en el azul un 2 y en el rojo un 4,
    - Sacar en el azul un 4 y en el rojo un 3,
    - Sacar en el azul un 6 y en el rojo un 2, y
    - Sacar un 5 en cada dado.

    La probabilidad de cada combinación es $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Como son sucesos excluyentes (o, lo que es lo mismo, ramas distintas de un árbol), la probabilidad total será la suma de todos los $\frac{1}{36}$ que nos da cada rama, es decir, $P(10) = 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$.

b) La primera pregunta la podemos calcular mediante el teorema de Bayes:

$P(Azul - par|8) = \frac{P(Azul-par \bigcap 8)}{P(8)}$.

Las combinaciones que dan 8 son :

- Azul 2 y rojo 3,
- Azul 3 y rojo 5,
- Azul 4 y rojo 2,
- Azul 5 y rojo 3,
- Azul 6 y rojo 1

En total, cinco combinaciones. La probabilidad de cada una es $\frac{1}{36}$, así que en total, $P(8) = \frac{5}{36}$.

De estas, sólo tres tienen un resultado par en el dado azul, así que $P(azul-par \bigcup 8) = \frac{3}{36}$.

Por tanto, $P(Azul - par|8) = \frac{3}{5}$

Para la segunda parte, observamos que si el número obtenido en el dado azul es par, la puntuación será par automáticamente. En cambio, si la puntuación en el azul es impar, la puntuación total será par sólo si el resultado del rojo es impar también. Aplicamos de nuevo el teorema de Bayes:

$P(Rojo - impar|Total - par) = \frac{P(Rojo-impar \bigcup Total-par)}{P(Total-par)}$.

Por la discusión anterior, si el rojo es impar la puntuación total es par tanto si azul es par como si no. Por tanto,

$P(Rojo - impar \bigcup Total - par) = P(Rojo - impar) = 1/2$.

Por otro lado, $P(Total-par) = P(Azul-par)+P(Azul-impar)P(Rojo-Impar) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

En total, entonces, $P(Rojo - impar|Total - par) = \frac{2}{3}$

5. **En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles,** A_1 **y** A_2**, de igual probabilidad 0.4 y se considera** $A_3 = \overline{A_1 \bigcup A_2}$ **(por tanto, la probabilidad de** A_3 **es 0.2). De cierto suceso B se sabe que** $P(B|A_1) = P(B|A_2)$ **y** $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$**. Y de un suceso** C **independiente de** A_1 **se sabe que** $P(C|A_2) = 0{,}3$ **y** $P(C|A_3) = 0{,}6$**. Con estos datos se pide:**

   a) **(1 punto) Calcular la probabilidad de** B **si** $P(B|A_1) = 0{,}25$.

   b) **(1.5 puntos) Calcular la probabilidad de** C **y determinar si** C **es independiente de** A_2**.(Extraordinaria 2024)**

   Solución

   a)Como A_1, A_2 y A_3 forman una partición del espacio muestral $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 = \Omega$ y son incompatibles dos a dos se puede aplicar la regla de la probabilidad total para el suceso B se tiene $B = (B \bigcap A_1) \bigcup (B \bigcap A_2) \bigcup (B \bigcap A_3)$

$P(B) = P(B \bigcap A_1) + P(B \bigcap A_2) + P(B \bigcap A_3)$
$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}3.$

b) Los sucesos A_1 y A_2 son incompatibles y $A_3 = \overline{A_1 \bigcup A_2}$, por lo que $P(C) = P(C \bigcap A_1) + P(C \bigcap A_2) + P(C \bigcap A_3)$.

El suceso C es independiente de A_1, luego

$P(C) = P(C) \cdot P(A_1) + P(C|A_2) \cdot P(A_2) + P(C|A_3) \cdot P(A_3) \Rightarrow$
$P(C) = 0{,}4 \cdot P(C) + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}2$, de manera que $P(C) = \frac{0{,}24}{0{,}6} = 0{,}4$.

Finalmente, $P(C \bigcap A2) = P(C|A2) \cdot P(A2) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$ no coincide con $P(C) \cdot P(A2) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$, y así se tiene que el suceso C no es independiente de A_2.

6. **Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir˜quien friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25 % de sus lanzamientos y Benito en el 30 %, se pide:**

   a) **(1 punto) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.**

   b) **(1.5 puntos) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.(Extraordinaria 2024)**

Solución

a) Para que se decida el que friega en la tercera ronda uno de los dos debe acertar tres centros en las tres primeras tiradas y el otro fallarlos todos. Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$P(FriegaBenito\ sin\ cuarta\ tirada)$=$0,25^3 \cdot 0,7^3$ Antonio acierta 3 veces y Benito falla 3 veces

$P(FriegaAntonio\ sin\ cuarta\ tirada)$=$0,75^3 \cdot 0,3^3$Antonio falla 3 veces y Benito acierta 3 veces

$P(Nohacefalta4tiradas) = 0,25^3 \cdot 0,7^3 + 0,75^3 \cdot 0,3^3 = 0,01675$

b) Si X representa “centros acertados en 60 lanzamientos de Antonio”, X sigue una distribucion binomial de parametros $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$ y $n = 60$ que podemos aproximar por una normal $X \sim N(15, 3{,}35)$, de manera que $P(X \leq 20) \approx P(X\prime \leq 20{,}5) = P(Z \leq 1{,}64) \approx 0{,}9495$.